Geometrie WS2018/19

Dozent: Prof. Dr. Arno Fehm

10. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Kapitel I

Endliche Gruppen

1. Erinnerung und Beispiele

▶ **Erinnerung 1.1**

Eine Gruppe ist ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung $* : G \times G \to G$, dass die Axiome Assoziativität, Existenz eines neutralen Elements und Existenz von Inversen erfüllt, und wir schreiben auch G für die Gruppe $(G, *)$. Die Gruppe G ist abelsch , wenn $g * h = h * g$ für alle $g, h \in G$. Eine allgemeine Gruppe schreiben wir multiplikativ mit neutralem Element 1, abelsche Gruppen auch additiv mit neutralem Element 0.

Eine Teilmenge $H \subseteq G$ ist eine Untergruppe von G, in Zeichen $H \leq G$, wenn $H \neq \emptyset$ und H abgeschlossen ist unter der Verknüpfung und den Bilden von Inversen. Wir schreiben 1 (bzw. 0) auch für die triviale Untergruppe $\{1\}$ (bzw. $\{0\}$) von G.

Eine Abbildung $\varphi : G \to G'$ zwischen Gruppen ist ein Gruppenhomomorphismus , wenn

$$\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

und in diesem Fall ist

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{1\})$$

der Kern von φ. Wir schreiben $\mathrm{Hom}(G, G')$ für die Menge der Gruppenhomomorphismen $\varphi : G \to G'$.

■ **Beispiel 1.2**

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und X eine Menge.

(a) $\mathrm{Sym}(X)$, die symmetrische Gruppe aller Permutationen der Menge X mit $f \cdot g = g \circ f$, insbesondere $S_n = \mathrm{Sym}(\{1, ..., n\})$

(b) $\mathbb{Z}$ sowie $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{a + n\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ mit der Addition

(c) $\mathrm{GL}_n(K)$ mit der Matrizenmultiplikation, Spezialfall $\mathrm{GL}_1(K) = K^\times = K \backslash \{0\}$

(d) Für jeden Ring R bilden die Einheiten $R^\times$ eine Gruppe unter der Multiplikation, zum Beispiel $\mathrm{Mat}_n(K)^\times = \mathrm{GL}_n(K)$, $\mathbb{Z}^\times = \mu_2 = \{1, -1\}$

■ **Beispiel 1.3**

Ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe, so ist auch $(G^{op}, \cdot^{op})$ mit $G = G^{op}$ und $g \cdot^{op} h = h \cdot g$ eine Gruppe.

▶ **Bemerkung 1.4**
Ist G eine Gruppe und $h \in G$, so ist die Abbildung

$$\tau_h = \begin{cases} G \to G \\ g \mapsto gh \end{cases}$$

eine Bijektion (also $\tau_h \in \mathrm{Sym}(G)$) mit Umkehrabbildung $\tau_{h^{-1}}$.

Satz 1.5
Sei G eine Gruppe. Zu jeder Menge $X \subseteq G$ gibt es eine kleinste Untergruppe $\langle X \rangle$ von G, die X enthält, nämlich

$$\langle X \rangle = \bigcap_{X \subseteq H \leq G} H$$

▶ **Bemerkung 1.6**
Man nennt $\langle X \rangle$ die von X erzeugte von G. Die Gruppe G heißt endlich erzeugt , wenn $G = \langle X \rangle$ für eine endliche Menge $X \subseteq G$.

Satz 1.7
Ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to G'$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn es einen Gruppenhomomorphismus $\varphi' : G' \to G$ mit $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_G$ und $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{G'}$ gibt.

■ **Beispiel 1.8**
Ist G eine Gruppe, so bilden die Automorphismen $\mathrm{Aut}(G) \subseteq \mathrm{Hom}(G, G)$ eine Gruppe unter $\varphi \circ \varphi' = \varphi' \circ \varphi$. Für $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ und $g \in G$ schreiben wir $g^\varphi = \varphi(g)$.

Satz 1.9
Einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to G'$ ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Ker}(\varphi) = 1$.

■ **Beispiel 1.10**
Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper.

(a) $\mathrm{sgn} : S_n \to \mu_2$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern die alternierende Gruppe A_n.

(b) $\det : \mathrm{GL}_n(K) \to K^\times$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $\mathrm{SL}_n(K)$.

(c) $\pi_{n\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $a \mapsto a + n\mathbb{Z}$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $n\mathbb{Z}$

(d) Ist A eine abelsche Gruppe, so ist

$$[n] : \begin{cases} A \to A \\ x \to nx \end{cases}$$

ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $A[n]$, die n-Torsion von A und Bild nA.

(e) Ist G eine Gruppe, so ist

$$\begin{cases} G \to G^{op} \\ g \mapsto g^{-1} \end{cases}$$

ein Isomorphismus.

Definition 1.11 (Zykel, disjunkte Zykel)
Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Für paarweise verschiedene Elemente $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ bezeichnen wir mit $(i_1 ... i_k)$ des $\sigma \in S_n$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \sigma(i_j) &= i_{j+1} \quad \text{für } j = 1, ..., k-1 \\ \sigma(i_k) &= i_1 \\ \sigma(i) &= i \quad \text{für } i \in \{1, ..., n\} \backslash \{i_1, ..., i_k\} \end{aligned}$$

Wir nennen $(i_1 ... i_k)$ eine k-Zykel . Zwei Zykel $(i_1 ... i_k)$ und $(j_1 ... j_l) \in S_n$ heißen disjunkt , wenn $\{i_1, ..., i_k\} \cap \{j_1, ..., j_l\} = \emptyset$.

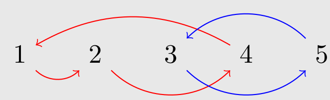
Satz 1.12
Jedes $\sigma \in S_n$ ist das Produkt von Transpositionen (das heißt 2-Zykeln).

Lemma 1.13
Disjunkte Zykel kommutieren, das heißt sind $\tau_1, \tau_2 \in S_n$ disjunkte Zykel, so ist $\tau_1 \tau_2 = \tau_2 \tau_1$.

Beweis. Sind $\tau_1 = (i_1 ... i_k)$ und $\tau_2 = (j_1 ... j_l)$ so ist

$$\tau_1 \tau_2(i) = \tau_2 \tau_1(i) = \begin{cases} \tau_1(i) & i \in \{i_1 ... i_k\} \\ \tau_2(i) & i \in \{j_1 ... j_l\} \\ i & \text{sonst} \end{cases}$$ □

Satz 1.14
Jedes $\sigma \in S_n$ ist ein Produkt von paarweise disjunkten k-Zykeln mit $k \geq 2$ eindeutig bis auf Reihenfolge (sogenannte Zykelzerlegung von σ).



Also ein 3-Zykel und ein 2-Zykel.

Beweis. Induktion nach $N = |\{i \mid \sigma(i) \neq i\}|$.
$N = 0$: $\sigma = \mathrm{id}$
$N > 0$: Wähle i_1 mit $\sigma(i_1) \neq i_1$, betrachte $i_1, \sigma(i_1), \sigma^2(i_1), ...$ Da $\{1, ..., n\}$ endlich und σ bijektiv ist, existiert ein minimales $k \geq 2$ mit $\sigma^k(i_1) = i_1$. Setze $\tau_1 = (i_1\, \sigma(i_1) ... \sigma^{k-1}(i_1))$. Dann ist $\sigma = \tau_1 \circ \tau_1^{-1} \sigma$, und nach Induktionshypothese ist $\tau_1^{-1} \sigma = \tau_2 \circ ... \circ \tau_m$ mit disjunkten Zyklen $\tau_2, ..., \tau_m$.
Eindeutigkeit ist klar, denn jedes i kann nur in einem Zykel $(i\, \sigma(i) ... \sigma^{k-1}(i))$ vorkommen. □

Kapitel II

Kommutative Ringe

Kapitel III

Körpererweiterungen

Anhang