

# **Analysis 1. Semester (WS2017/18)**

Dozent: Prof. Dr. Friedemann Schuricht  
Kursassistenz: Moritz Schönherr

Stand: 7. Dezember 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>I Grundlagen der Mathematik</b>	<b>1</b>
<b>1 Grundbegriffe aus Mengelehre und Logik</b>	<b>1</b>
<b>2 Aufbau einer mathematischen Theorie</b>	<b>5</b>
2.1 Relationen und Funktionen . . . . .	5
<b>II Zahlenbereiche</b>	<b>10</b>
<b>3 Natürliche Zahlen</b>	<b>10</b>
<b>4 Ganze und rationale Zahlen</b>	<b>13</b>
<b>5 Reelle Zahlen</b>	<b>17</b>
5.1 Struktur von archimedisch angeordneten Körper (allg.) . . . . .	17
<b>6 Komplexe Zahlen (kurzer Überblick)</b>	<b>19</b>
<b>III Metrische Räume und Konvergenz</b>	<b>20</b>
<b>7 Grundlegen Ungleichungen</b>	<b>20</b>
<b>8 Metrische Räume</b>	<b>21</b>

# Teil I

## Grundlagen der Mathematik

Mathematik besitzt eine Sonderrolle unter den Wissenschaften, da

- Resultate nicht empirisch gezeigt werden müssen
- Resultate nicht durch Experimente widerlegt werden können

### Literatur

- Forster: Analysis 1 + 2, Vieweg
- Königsberger: Analysis 1 + 2, Springer
- Hildebrandt: Analysis 1 + 2, Springer
- Walter: Analysis 1 + 2, Springer
- Escher/Amann: Analysis 1 + 2, Birkhäuser
- Ebbinghaus: Einführung in die Mengenlehre, BI-Wissenschaftsverlag
- Teubner-Taschenbuch der Mathematik, Teubner 1996
- Springer-Taschenbuch der Mathematik, Springer 2012

## Kapitel 1

### Grundbegriffe aus Mengenlehre und Logik

**Mengenlehre:** Universalität von Aussagen

**Logik:** Regeln des Folgerns, wahre/falsche Aussagen

#### **Definition 1.1 (Definition Aussage)**

*Sachverhalt, dem man entweder den Wahrheitswert "wahr" oder "falsch" zuordnen kann, aber nichts anderes.*

#### **Beispiel**

5 ist eine Quadratzahl  $\rightarrow$  falsch (Aussage)

Die Elbe fließt durch Dresden  $\rightarrow$  wahr (Aussage)

Mathematik ist rot  $\rightarrow$  ??? (keine Aussage)

### Definition 1.2 (Menge)

Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten der Anschauung oder des Denkens, welche die Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen.

(CANTOR, 1877)

### Beispiel

$M_1 :=$  Menge aller Städte in Deutschland

$M_2 := \{1; 2; 3\}$

Für ein Objekt  $m$  und eine Menge  $M$  gilt stets  $m \in M$  oder  $m \notin M$

Für die Mengen  $M$  und  $N$  gilt  $M = N$ , falls dieselben Elemente enthalten sind  $\{1; 2; 3\} = \{3; 2; 1\} = \{1; 2; 2; 3\}$

-  $N \subseteq M$ , falls  $n \in M$  für jedes  $n \in N$

-  $N \subset M$ , falls zusätzlich  $M \neq N$

### Definition 1.3 (Aussageform)

Sachverhalt mit Variablen, der durch geeignete Ersetzung der Variablen zur Aussage wird.

### Beispiel

- $A(X) :=$  Die Elbe fließt durch  $X$
- $B(X; Y; Z) := X + Y = Z$
- aber  $A(\text{Dresden}), B(2; 3; 4)$  sind Aussagen,  $A(\text{Mathematik})$  ist keine Aussage
- $A(X)$  ist eine Aussage für jedes  $X \in M_1 \rightarrow$  Generalisierung von Aussagen durch Mengen

## Bildung und Verknüpfung von Aussagen

$A$	$B$	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \iff B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

### Beispiel 1.4

- $\neg(3 \text{ ist gerade}) \rightarrow w$

- $(4 \text{ ist gerade}) \wedge (4 \text{ ist Primzahl}) \rightarrow f$
- $(3 \text{ ist gerade}) \vee (3 \text{ ist Primzahl}) \rightarrow w$
- $(3 \text{ ist gerade}) \Rightarrow (\text{Mond ist Würfel}) \rightarrow w$
- $(\text{Die Sonne ist heiß}) \Rightarrow (\text{es gibt Primzahlen}) \rightarrow w$

Ausschließendes oder: (entweder  $A$  oder  $B$ ) wird realisiert durch  $\neg(A \iff B)$ .

Aussageform  $A(X)$  sei für jedes  $X \in M$  Aussage: neue Aussage mittels Quantoren

- $\forall$ : "für alle"
- $\exists$ : "es existiert"

### Beispiel 1.5

$\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade} \rightarrow f$

$\exists n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade} \rightarrow w$

### Definition 1.6 (Tautologie bzw. Kontraduktion/Widerspruch)

Zusammengesetzte Aussage, die unabhängig vom Wahrheitsgehalt der Teilaussagen stets wahr bzw. falsch ist.

### Beispiel 1.7

- Tautologie (immer wahr):  $(A) \vee (\neg A), \neg(A \wedge (\neg A)), (A \wedge B) \Rightarrow A$
- Widerspruch (immer falsch):  $A \wedge (\neg A), A \iff \neg A$
- besondere Tautologie:  $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$

### Satz 1.8 (Morgansche Regeln)

Folgende Aussagen sind Tautologien:

- $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$

## Bildung von Mengen

Seien  $M$  und  $N$  Mengen

- Aufzählung der Elemente:  $\{1; 2; 3\}$
- mittels Eigenschaften:  $\{X \in M \mid A(X)\}$
- $\emptyset :=$  Menge, die keine Elemente enthält
  - leere Menge ist immer Teilmenge jeder Menge  $M$
  - **Warnung:**  $\{\emptyset\} \neq \emptyset$
- Verknüpfung von Mengen wie bei Aussagen

**Definition 1.9 (Mengensystem)**

Ein Mengensystem  $\mathcal{M}$  ist eine Menge, bestehend aus anderen Mengen.

- $\bigcup \mathcal{M} := \{X \mid \exists M \in \mathcal{M} : X \in M\}$  (Vereinigung aller Mengen in  $\mathcal{M}$ )
- $\bigcap \mathcal{M} := \{X \mid \forall M \in \mathcal{M} : X \in M\}$  (Durchschnitt aller Mengen in  $\mathcal{M}$ )

**Definition 1.10 (Potenzmenge)**

Die Potenzmenge  $\mathcal{P}$  enthält alle Teilmengen einer Menge  $M$ .

$$\mathcal{P}(X) := \{\tilde{M} \mid \tilde{M} \subset M\}$$

Beispiel:

- $M_3 := \{1; 3; 5\}$   
 $\rightarrow \mathcal{P}(M_3) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1; 3\}, \{1; 5\}, \{3; 5\}, \{1; 3; 5\}\}$

**Satz (de Morgansche Regeln für Mengen):**

- $(\bigcup_{N \in \mathcal{N}} N)^C = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N^C$
- $(\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N)^C = \bigcup_{N \in \mathcal{N}} N^C$

**Definition 1.11 (Kartesisches Produkt)**

$$M \times N := \{m, n \mid m \in M \wedge n \in N\}$$

$(m, n)$  heißt geordnetes Paar (Reihenfolge wichtig!)

$$\text{allgemeiner: } M_1 \times \dots \times M_k := \{(m_1, \dots, m_k) \mid m_j \in M_j, j = 1, \dots, k\}$$

$$M^k := M \times \dots \times M := \{(m_1, \dots, m_k) \mid m_j \in M, j = 1, \dots, k\}$$

**Satz 1.12 (Auswahlaxiom)**

Sei  $\mathcal{M}$  ein Mengensystem nichtleerer paarweise disjunkter Mengen  $M$ .

- Es existiert eine Auswahlmenge  $\tilde{M}$ , die mit jedem  $M \in \mathcal{M}$  genau 1 Element gemeinsam hat.
- beachte: Die Auswahl ist nicht konstruktiv!

# Kapitel 2

## Aufbau einer mathematischen Theorie

Axiome  $\rightarrow$  Beweise  $\rightarrow$  Sätze ("neue" wahre Aussagen)  
 $\rightarrow$  ergibt Ansammlung (Menge) wahrer Aussagen

### Formulierung mathematischer Aussagen

- typische Form eines mathematischen Satzes: "Wenn A gilt, dann gilt auch B."
- formal:  $A \Rightarrow B$  bzw.  $A(X) \Rightarrow B(X)$  ist stets wahr (insbesondere falls A wahr ist)

Beispiel

- $X \in \mathbb{N}$  und ist durch 4 teilbar  $\Rightarrow X$  ist durch 2 teilbar
- beachte: Implikation auch wahr, falls  $X = 5$  oder  $X = 6$ , dieser Fall ist aber uninteressant
- genauer meint man sogar  $A \wedge C \Rightarrow B$ , wobei  $C$  aus allen bekannten wahren Aussagen besteht
- man sagt:  $B$  ist **notwendig** für  $A$ , da  $A$  nur wahr sein kann, wenn  $B$  wahr ist
- man sagt:  $A$  ist **hinreichend** für  $B$ , da  $B$  stets wahr ist, wenn  $A$  wahr ist

### Mathematische Beweise

- **direkter Beweis:** finde Zwischenaussagen  $A_1, \dots, A_k$ , sodass für  $A$  auch wahr:  
 $(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \dots \wedge (A_k \Rightarrow B)$
- Beispiel: Zeige  $x > 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$   
 $(x > 2) \Rightarrow (x - 2 > 0) \wedge (x - 1 > 0) \Rightarrow (x - 2) \cdot (x - 1) \Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$
- **indirekter Beweis:** auf Grundlage der Tautologie  $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$  führt man direkten Beweis  $\neg B \Rightarrow \neg A$  (das heißt angenommen  $B$  falsch, dann auch  $A$  falsch)
- praktisch formuliert man das auch so:  $(A \wedge \neg B) \Rightarrow \dots \Rightarrow (A \wedge \neg A)$
- Beispiel: Zeige  $x^2 - 3x + 2 \leq 0$  sei wahr  
 $\neg B \Rightarrow (x - 2) \cdot (x - 1) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow \neg A$

## 2.1 Relationen und Funktionen

### Definition 2.1 (Relation)

Seien  $M$  und  $N$  Mengen. Dann ist jede Teilmenge  $R$  von  $M \times N$  eine Relation.

$(x, y) \in R$  heißt:  $x$  und  $y$  stehen in Relation zueinander

### Beispiel

$M$  ist die Menge aller Menschen. Die Liebesbeziehung  $x$  liebt  $y$  sieht als geordnetes Paar geschrieben so aus:  $(x, y)$ . Das heißt die Menge der Liebespaare ist das:  $L := \{(x, y) \mid x \text{ liebt } y\}$ . Und es gilt:  $L \subset M \times M$ .

Die Relation  $R \subset M \times N$  heißt **Ordnungsrelation** (kurz. Ordnung) auf  $M$ , falls für alle  $a, b, c \in M$  gilt:

- $(a, a) \in R$  (reflexiv)

- $(a, b), (b, a) \in R$  (antisymmetrisch)
- $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$  (transitiv)
- z.B.  $R = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(Y) \times \mathcal{P}(Y) \mid X \subset Y\}$

Eine Ordnungsrelation heißt **Totalordnung**, wenn zusätzlich gilt:  $(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$

Beispiel

Seien  $m, n$  und  $o$  natürliche Zahlen, dann ist  $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n\}$  eine Totalordnung, da

- $m \leq m$  (reflexiv)
- $(m \leq n \wedge n \leq m) \Rightarrow m = n$  (antisymmetrisch)
- $(m \leq n \wedge n \leq o) \Rightarrow m \leq o$  (transitiv)
- $m \leq n \vee n \leq m$  (total)

Eine Relation auf  $M$  heißt **Äquivalenzrelation**, wenn für alle  $a, b, c \in M$  gilt:

- $(a, a) \in R$  (reflexiv)
- $(a, b), (b, a) \in R$  (symmetrisch)
- $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$  (transitiv)

Obwohl Ordnungs- und Äquivalenzrelation die gleichen Eigenschaften haben, haben sie unterschiedliche Zwecke: Ordnungsrelationen ordnen Elemente in einer Menge (z.B. das Zeichen  $\leq$  ordnet die Menge der natürlichen Zahlen), während Äquivalenzrelationen eine Menge in disjunkte Teilmengen (Äquivalenzklassen) ohne Rest aufteilen.

Wenn  $R$  eine Ordnung auf  $M$  ist, so wird häufig geschrieben:

- $a \leq b$  bzw.  $a \geq b$  falls  $(a, b) \in R$
- $a < b$  bzw.  $a > b$  falls zusätzlich  $a \neq b$

### Definition 2.2 (Abbildung/Funktion)

Eine Funktion  $F$  von  $M$  nach  $N$  (kurz:  $F : M \rightarrow N$ ), ist eine Vorschrift, die jedem Argument/Urbild  $m \in M$  genau einen Wert/Bild  $F(m) \in N$  zuordnet.

$D(F) := M$  heißt Definitionsbereich/Urbildmenge

$N$  heißt Zielbild

$F(M') := \{n \in N \mid n = F(m) \text{ für ein } m \in M'\}$  ist Bild von  $M' \subset M$

$F^{-1}(N') := \{m \in M \mid n = F(m) \text{ für ein } n \in N'\}$  ist Urbild von  $N' \subset N$

$R(F) := F(M)$  heißt Wertebereich/Bildmenge

$\text{graph}(F) := \{(m, n) \in M \times N \mid n = F(m)\}$  heißt Graph von  $F$

$F|_{M'}$  ist Einschränkung von  $F$  auf  $M' \subset M$

Unterschied Zielmenge und Wertebereich:  $f(x) = \sin(x) :$

Zielmenge:  $\mathbb{R}$

Wertebereich:  $[-1; 1]$

Funktionen  $F$  und  $G$  sind gleich, wenn



- $D(F) = D(G)$
- $F(m) = G(m) \quad \forall m \in D(F)$

Manchmal wird auch die vereinfachende Schreibweise benutzt:

- $F : M \rightarrow N$ , obwohl  $D(F) \subsetneq M$  (z.B.  $\tan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , Probleme bei  $\frac{\pi}{2}$ )
- gelegentlich spricht man auch von "Funktion  $F(m)$ " statt Funktion  $F$

### Definition 2.3 (Komposition/Verknüpfung)

Die Funktionen  $F : M \rightarrow N$  und  $G : N \rightarrow P$  sind verknüpft, wenn  $F \circ G : M \rightarrow P$  mit  $(F \circ G)(m) := G(F(m))$

### Eigenschaften von Funktionen:

- injektiv: Zuordnung ist eineindeutig  $\rightarrow F(m_1) = F(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$
- Beispiel:  $x^2$  ist nicht injektiv, da  $F(2) = F(-2) = 4$
- surjektiv:  $F(M) = N \quad \forall n \in N \exists m \in M : F(m) = n$
- Beispiel:  $\sin(x)$  ist nicht surjektiv, da es kein  $x$  für  $y = 27$  gibt
- bijektiv: injektiv und surjektiv

Für bijektive Abbildung  $F : M \mapsto N$  ist Umkehrabbildung/inverse Abbildung  $F^{-1} : N \mapsto M$  definiert durch:  $F^{-1}(n) = m \iff F(m) = n$

Hinweis: Die Notation  $F^{-1}(N')$  für Urbild bedeutet nicht, dass die inverse Abbildung  $F^{-1}$  existiert.

### Satz 2.4

Sei  $F : M \rightarrow N$  surjektiv. Dann existiert die Abbildung  $G : N \rightarrow M$ , sodass  $F \circ G = id_N$  (d.h.  $F(G(n)) = n \quad \forall n \in N$ )

### Definition 2.5 (Rechenoperation/Verknüpfung)

Eine Rechenoperation auf einer Menge  $M$  ist die Abbildung  $*$  :  $M \times M \rightarrow M$  d.h.  $(m, n) \in M$  wird das Ergebnis  $m * n \in M$  zugeordnet.

### Eigenschaften von Rechenoperationen:

- hat neutrales Element  $e \in M : m * e = m$
- ist kommutativ  $m * n = n * m$
- ist assoziativ  $k * (m * n) = (k * m) * n$
- hat ein inverses Element  $m' \in M$  zu  $m \in M : m * m' = e$

$e$  ist stets eindeutig,  $m'$  ist eindeutig, wenn die Operation  $*$  assoziativ ist.

Beispiele:

- Addition  $+$ :  $(m, n) \mapsto m + n$  Summe, neutrales Element heißt Nullelement, inverses Element  $-m$
  - Multiplikation  $\cdot$ :  $(m, n) \mapsto m \cdot n$  Produkt, neutrales Element Eins, inverses Element  $m^{-1}$
- Addition und Multiplikation sind distributiv, falls  $k(m + n) = k \cdot m + k \cdot n$

**Definition 2.6 (Körper)**

Eine Menge  $M$  ist ein Körper  $K$ , wenn man auf  $K$  eine Addition und eine Multiplikation mit folgenden Eigenschaften durchführen kann:

- es gibt neutrale Elemente  $0$  und  $1 \in K$
- Addition und Multiplikation sind jeweils kommutativ und assoziativ
- Addition und Multiplikation sind distributiv
- es gibt Inverse  $-k$  und  $k^{-1} \in K$   
 $\rightarrow$  die reellen Zahlen sind ein solcher Körper

Eine Menge  $M$  habe die Ordnung " $\leq$ " und diese erlaubt die Addition und Multiplikation, wenn

- $a \leq b \iff a + c \leq b + c$
- $a \leq b \iff a \cdot c \leq b \cdot c \quad c > 0$   
 $\rightarrow$  Man kann die Gleichungen in gewohnter Weise umformen.

Ein Körper  $K$  heißt angeordnet, wenn er eine Totalordnung besitzt, die mit Addition und Multiplikation verträglich ist.

**Isomorphismus** bezüglich einer Struktur ist die bijektive Abbildung  $I : M_1 \mapsto M_2$ , die die vorhandene Struktur auf  $M_1$  und  $M_2$  erhält, z.B.

- Ordnung  $\leq_1$  auf  $M_1$ , falls  $a \leq_1 b \iff I(a) \leq_2 I(b)$
- Abbildung  $F_i : M_i \rightarrow M_i$ , falls  $I(F_1(a)) = F_2(I(a))$
- Rechenoperation  $*_i : M_i \times M_i \rightarrow M_i$ , falls  $I(a *_1 b) = I(a) *_2 I(b)$
- spezielles Element  $a_i \in M_i$ , falls  $I(a_1) = a_2$

*Es gibt 2 verschiedene Arten von reellen Zahlen, meine und Prof. Schurichts. Wenn wir einen Isomorphismus finden, dann bedeutet das, dass unsere Zahlen strukturell die selben sind.*

Beispiele:  $M_1 = \mathbb{N}$  und  $M_2 = \{\text{gerade Zahlen}\}$ , jeweils mit Addition, Multiplikation und Ordnung  
 $\rightarrow I : M_1 \rightarrow M_2$  mit  $I(k) = 2k \quad \forall k \in \mathbb{N}$   
 $\rightarrow$  Isomorphismus, der die Addition, Ordnung und die Null, aber nicht die Multiplikation erhält

**Bemerkungen zum Fundament der Mathematik**

Forderungen an eine mathematische Theorie:

- widerspruchsfrei: Satz und Negation nicht gleichzeitig herleitbar
- vollständig: alle Aussagen innerhalb der Theorie sind als wahr oder falsch beweisbar

zwei Unvollständigkeitssätze:

- jedes System ist nicht gleichzeitig widerspruchsfrei und vollständig
- in einem System kann man nicht die eigene Widerspruchsfreiheit zeigen

# Teil II

## Zahlenbereiche

### Kapitel 3

#### Natürliche Zahlen

$\mathbb{N}$  sei diejenige Menge, die die **Peano-Axiome** erfüllt, das heißt

- $\mathbb{N}$  sei induktiv, d.h. es existiert ein Nullelement und eine injektive Abbildung  $\mathbb{N}$  to  $\mathbb{N}$  mit  $\nu(n) \neq 0 \quad \forall n$
- Falls  $N \subset \mathbb{N}$  induktiv in  $\mathbb{N}$  ( $0, \nu(n) \in N$  falls  $n \in N \Rightarrow N = \mathbb{N}$ )  
 $\rightarrow \mathbb{N}$  ist die kleinste induktive Menge

Nach der Mengenlehre ZF (Zermelo-Fraenkel) existiert eine solche Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen. Mit den üblichen Symbolen hat man:

- $0 := \emptyset$
- $1 := \nu(0) := \{\emptyset\}$
- $2 := \nu(1) := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $3 := \nu(2) := \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Damit ergibt sich in gewohnter Weise  $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$

anschauliche Notation  $\nu(n) = n + 1$  (beachte: noch keine Addition definiert!)

**Theorem 3.1** Falls  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{N}'$  die Peano-Axiome erfüllen, sind sie isomorph bezüglich Nachfolgerbildung und Nullelement. Das heißt alle solche  $\mathbb{N}'$  sind strukturell gleich und können mit obigem  $\mathbb{N}$  identifiziert werden.

#### **Satz 3.2 (Prinzip der vollständigen Induktion)**

Sei  $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  eine Menge von Aussagen  $A_n$  mit der Eigenschaft:

*IA:  $A_0$  ist wahr*

*IS:  $\forall n \in \mathbb{N}$  gilt  $A_n \Rightarrow A_{n+1}$*

*$A_n$  ist wahr für alle  $n \in \mathbb{N}$*

### Lemma 3.3

*Es gilt:*

1.  $\nu(n) \cup \{0\} = \mathbb{N}$
2.  $\nu(n) \neq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

### Satz 3.4

*(rekursive Definition/Rekursion) Sei  $B$  eine Menge und  $b \in B$ . Sei  $F$  eine Abbildung mit  $F : B \times \mathbb{N} \mapsto B$ . Dann liefert nach Vorschrift:  $f(0) := b$  und  $f(n+1) = F(f(n), n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$  genau eine Abbildung  $f : \mathbb{N} \mapsto B$ . Das heißt eine solche Abbildung existiert und ist eindeutig.*

### Rechenoperationen:

- Definition Addition '+':  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  auf  $\mathbb{N}$  durch  $n+0 := n, n+\nu(m) := \nu(n+m) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$
- Definition Multiplikation '·':  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  auf  $\mathbb{N}$  durch  $n \cdot 0 := 0, n \cdot \nu(m) := n \cdot m + n \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Für jedes feste  $n \in \mathbb{N}$  sind beide Definitionen rekursiv und eindeutig definiert.

$\forall n \in \mathbb{N}$  gilt:  $n+1 = n + \nu(0) = \nu(n+0) = \nu(n)$

### Satz 3.5

*Addition und Multiplikation haben folgende Eigenschaften:*

- *es existiert jeweils ein neutrales Element*
- *kommutativ*
- *assoziativ*
- *distributiv*

Es gilt  $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$ :

- $m \neq 0 \Rightarrow m + n \neq 0$
- $m \cdot n = 0 \Rightarrow n = 0$  oder  $m = 0$
- $m + k = n + k \Rightarrow m = n$  (Kürzungsregel der Addition)
- $m \cdot k = n \cdot k \Rightarrow m = n$  (Kürzungsregel der Multiplikation)

Ordnung auf  $\mathbb{N}$ : Relation  $R := \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n\}$

wobei  $m \leq n \iff n = m + k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$

**Satz 3.6**

Es gilt auf  $\mathbb{N}$ :

- $m \leq n \Rightarrow \exists! k \in \mathbb{N} : n = m + k$ , nenne  $n - m := k$  (Differenz)
- Relation  $R$  (bzw.  $\leq$ ) ist eine Totalordnung auf  $\mathbb{N}$
- Ordnung  $\leq$  ist verträglich mit der Addition und Multiplikation

**Beweis**

Sei  $n = m + k = m + k' \Rightarrow k = k'$

Sei  $n = n + 0 \Rightarrow n \leq n \Rightarrow$  reflexiv

sei  $k \leq m, m \leq n \Rightarrow \exists l, j : m = k + l, n = m + j = (k + l) + j = k + (l + j) \Rightarrow k \leq n \Rightarrow$  transitiv

sei nun  $m \leq n$  und  $n \leq m \Rightarrow n = m + j = n + l + j \Rightarrow 0 = l + j \Rightarrow j = 0 \Rightarrow n = m \Rightarrow$  antisymmetrisch

Totalordnung, d.h.  $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \leq n$  oder  $n \leq m$

IA:  $m = 0$  wegen  $0 = n + 0$  folgt  $0 \leq n \forall n$

IS: gelte  $m \leq n$  oder  $n \leq m$  mit festem  $m$  und  $\forall n \in \mathbb{N}$ , dann

falls  $n \leq m \Rightarrow n \leq m + 1$

falls  $m < n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = m + (k + 1) = (m + 1) + k \Rightarrow m + 1 \leq n$

$m \leq n$  oder  $n \leq m$  gilt für  $m + 1$  und  $\forall n \in \mathbb{N}$ , also  $\forall n, m \in \mathbb{N}$

sei  $m \leq n \Rightarrow \exists j : n = m + j \Rightarrow n + k = m + j + k \Rightarrow m + k \leq n + k$  ■

# Kapitel 4

## Ganze und rationale Zahlen

**Frage:** Existiert eine natürliche Zahl  $x$  mit  $n = n' + x$  für ein gegebenes  $n$  und  $n'$ ?

**Antwort:** Das geht nur falls  $n \leq n'$ , dann ist  $x = n - n'$

**Ziel:** Zahlenbereichserweiterung, sodass die Gleichung immer lösbar ist. Ordne jedem Paar  $(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  eine neue Zahl als Lösung zu. Gewisse Paare liefern die gleiche Lösung, z.B.  $(6, 4)$ ,  $(5, 3)$ ,  $(7, 5)$ . Diese müssen mittels Relation identifiziert werden.

$$\mathbb{Q} := \{(n_1, n'_1), (n_2, n'_2) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid n_1 + n'_2 = n'_1 + n_2\}$$

### Definition 4.1

$\mathbb{Q}$  ist die Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

### Beispiel

$$(5, 3) \sim (6, 4) \sim (7, 5) \text{ bzw. } (5 - 3) \sim (6 - 4) \sim (7 - 5)$$

$$(3, 6) \sim (5, 8) \text{ bzw. } (3 - 6) \sim (5 - 8)$$

### Beweis

offenbar  $((n, n'), (n, n')) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$  reflexiv

falls  $((n_1, n'_1), (n_2, n'_2)) \in \mathbb{Q} \Rightarrow (n_2, n'_2), (n_1, n'_1) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$  symmetrisch

sei  $((n_1, n'_1), (n_2, n'_2)) \in \mathbb{Q}$  und  $((n_2, n'_2), (n_3, n'_3)) \in \mathbb{Q} \Rightarrow n_1 + n'_2 = n'_1 + n_2, n_2 + n'_3 = n'_2 + n_3 \Rightarrow n_1 + n'_3 = n'_1 + n_3 \Rightarrow ((n_1, n'_1), (n_3, n'_3)) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$  transitiv. ■

setze  $\overline{\mathbb{Z}} := \{[(n, n')] \mid n, n' \in \mathbb{N}\}$  Menge der ganzen Zahlen, [ganze Zahl]

Kurzschreibweise:  $\overline{m} := [(m, m)]$  oder  $\overline{n} := [(n, n')]$

### Satz 4.2

Sei  $[(n, n')] \in \overline{\mathbb{Z}}$ . Dann existiert eindeutig  $n^* \in \mathbb{N}$  mit  $(n^*, 0) \in [(n, n')]$ , falls  $n \geq n'$  bzw.  $(0, n^*) \in [(n, n')]$  falls  $n < n'$ .

### Beweis

$$n \geq n' \Rightarrow \exists! n^* \in \mathbb{N} : n = n' + n^* \Rightarrow (n^*, 0) \sim (n, n')$$

$$n < n' \Rightarrow \exists! n^* \in \mathbb{N} : n + n^* = n' \Rightarrow (0, n^*) \sim (n, n')$$

**Frage:** Was hat  $\bar{\mathbb{Z}}$  mit  $\mathbb{Z}$  zu tun?

**Antwort:** identifiziere  $(n, 0)$  bzw.  $(n - 0)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und identifiziere  $(0, n)$  bzw.  $(0 - n)$  mit Symbol  $-n$

$\Rightarrow$  ganze Zahlen kann man eindeutig den Elementen folgender Mengen zuordnen:  $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{(-n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

**Rechenoperationen auf  $\bar{\mathbb{Z}}$ :**

- Addition:  $\bar{m} + \bar{n} = [(m, m')] + [(n, n')] = [(m + n, m' + n')]$
- Multiplikation:  $\bar{m} \cdot \bar{n} = [(m, m')] \cdot [(n, n')] = [(mn + m'n', mn' + m'n)]$

**Satz 4.3**

*Addition und Multiplikation sind eindeutig definiert, d.h. unabhängig von Repräsentant bezüglich  $\mathbb{Q}$*

**Beweis**

Sei  $(m_1, m'_1) \sim (m_2, m'_2), (n_1, n'_1) \sim (n_2, n'_2)$   
 $\Rightarrow m_1 + m'_2 = m'_1 + m_2, n_1 + n'_2 = n'_1 + n_2$   
 $\Rightarrow m_1 + n_1 + m'_2 + n'_2 = m'_1 + n'_1 + m_2 + n_2$   
 $\Rightarrow (m_1, m'_1) + (n_1, n'_1) \sim (m_2, m'_2) + (n_2, n'_2)$  ■

**Satz 4.4**

*Für Addition und Multiplikation auf  $\mathbb{Z}$  gilt  $\forall \bar{m}, \bar{n} \in \bar{\mathbb{Z}}$ :*

1. es existiert ein neutrales Element:  $0 := [(0, 0)], 1 := [(1, 0)]$
2. jeweils kommutativ, assoziativ und gemeinsam distributiv
3.  $-\bar{n} := [(n', n)] \in \mathbb{Z}$  ist invers bezüglich der Addition zu  $[(n, n')] = \bar{n}$
4.  $(-1) \cdot \bar{n} = -\bar{n}$
5.  $\bar{m} \cdot \bar{n} = 0 \iff \bar{m} = 0 \vee \bar{n} = 0$

**Beweis**

zu 1) offenbar  $\bar{n} + 0 = 0 + \bar{n} = \bar{n}$  und  $\bar{n} \cdot 1 = 1 \cdot \bar{n} = \bar{n}$

zu 2) Fleißarbeit  $\rightarrow$  SeSt

zu 3) offenbar  $\bar{n} + (-\bar{n}) = (-\bar{n}) + \bar{n} = [(n + n', m + m')] = 0$

zu 4)  $(-1) \cdot \bar{n} = [(0, 1)] \cdot [n, n'] = [n', n] = -\bar{n}$

zu 5) ÜA ■



**Satz 4.5**

Für  $\bar{m}, \bar{n} \in \mathbb{Z}$  hat die Gleichung  $\bar{m} = \bar{n} + \bar{x}$  die Lösung  $\bar{x} = \bar{m} + (-\bar{n})$ .

Ordnung auf  $\bar{\mathbb{Z}}$ : betrachte Relation  $R := \{(\bar{m}, \bar{n}) \in \bar{\mathbb{Z}} \times \bar{\mathbb{Z}} \mid \bar{m} \leq \bar{n}\}$

**Satz 4.6**

$R$  ist Totalordnung auf  $\bar{\mathbb{Z}}$  und verträglich mit Addition und Multiplikation

Ordnung verträglich mit Addition:  $\bar{n} < 0 \iff 0 = \bar{n} + (-\bar{n}) < -\bar{n} = (-1) \cdot \bar{n}$

**beachte:**  $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{(-n) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

**Satz 4.7**

$\mathbb{Z}$  und  $\bar{\mathbb{Z}}$  sind isomorph bezüglich Addition, Multiplikation und Ordnung.

**Beweis**

betrachte Abbildung  $I : \mathbb{Z} \rightarrow \bar{\mathbb{Z}}$  mit  $I(k) := [(k, 0)]$  und  $I(-k) := [(0, k)] \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \checkmark$  ■

Notation: verwende stets  $\mathbb{Z}$ , schreibe  $m, n, \dots$  statt  $\bar{m}, \bar{n}, \dots$  für ganze Zahlen in  $\mathbb{Z}$

**Frage:** Existiert eine ganze Zahl mit  $n = n' \cdot x$  für  $n, n' \in \mathbb{Z}, n' \neq 0$

**Antwort:** im Allgemeinen nicht **Ziel:** Zahlbereichserweiterung analog zu  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

ordne jedem Paar  $(n, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  neue Zahl  $x$  zu

schreibe  $(n, n')$  auch als  $\frac{n}{n'}$  oder  $n : n'$

identifiziere Paare wie z.B.  $\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}$  durch Relation

$\mathbb{Q} := \left(\frac{n_1}{n_2}, \frac{n_2}{n_2}\right) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}) \mid n_1 n_2' = n_1' n_2$

$\Rightarrow \mathbb{Q}$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$

setze  $\mathbb{Q} := \left[\frac{n}{n'}\right] \mid (n, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$  Menge der rationalen Zahlen

beachte: unendlich viele Symbole  $\frac{n}{n'}$  für gleiche Zahl  $\left[\frac{n}{n'}\right]$

wir schreiben später  $\frac{n}{n'}$  für die Zahl  $\left[\frac{n}{n'}\right]$

offenbar gilt die Kürzungsregel:  $\left[\frac{n}{n'}\right] = \left[\frac{kn}{kn'}\right] \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$

**Rechenoperationen auf  $\mathbb{Q}$ :**

- Addition:  $\left[\frac{m}{m'}\right] + \left[\frac{n}{n'}\right] := \left[\frac{mn' + m'n}{m'n'}\right]$
- Multiplikation:  $\left[\frac{m}{m'}\right] \cdot \left[\frac{n}{n'}\right] := \left[\frac{mn}{m'n'}\right]$

**Satz 4.8**

Mit Addition und Multiplikation ist  $\mathbb{Q}$  ein Körper mit  
 neutralen Elementen:  $0 = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{Z}} \\ 1_{\mathbb{Z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{Z}} \\ n_{\mathbb{Z}} \end{bmatrix}$ ,  $1 := \begin{bmatrix} 1_{\mathbb{Z}} \\ 1_{\mathbb{Z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \neq 0$   
 inversen Elementen:  $-\begin{bmatrix} n \\ n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n \\ n' \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} n \\ n' \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} n' \\ n \end{bmatrix}$

Ordnung auf  $\mathbb{Q}$ : für  $\begin{bmatrix} n \\ n' \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}$  kann man stets  $n' > 0$  annehmen  
 Relation:  $R := \{(\begin{bmatrix} m \\ m' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n \\ n' \end{bmatrix}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid mn' \leq m'n, m', n' > 0\}$  gibt Ordnung  $\leq$

**Satz 4.9**

$\mathbb{Q}$  ist ein angeordneter Körper (d.h.  $\leq$  ist eine Totalordnung und  $\leq$  erträglich mit Addition und Multiplikation).

Notation: schreibe vereinfacht nur noch  $\frac{n}{n'}$  für die Zahl  $\begin{bmatrix} n \\ n' \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}$  und verwende auch Symbole  $p, q, \dots$  für Elemente aus  $\mathbb{Q}$

Gleichung  $p \cdot x = q$  hat stets eindeutige Lösung:  $x = q \cdot p^{-1}$  ( $p, q \in \mathbb{Q}, p \neq 0$ )

**Frage:**  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ? **Antwort:** Sei  $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}} := \{\frac{n}{1} \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $I : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}}$  mit  $I(n) = \frac{n}{1}$   
 $\Rightarrow I$  ist Isomorphismus bezüglich Addition, Multiplikation und Ordnung.

In diesem Sinn:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

**Folgerung 4.10**

Körper  $\mathbb{Q}$  ist archimedisch angeordnet, d.h. für alle  $q \in \mathbb{Q} \exists n \in \mathbb{N} : q <_{\mathbb{Q}} n$ .

**Beweis**

Sei  $q = \frac{k}{k'}$  mit  $k' > 0$

$n := 0$  falls  $k < 0 \Rightarrow q = \frac{k}{k'} < \frac{0}{k'} = 0 = n$

$n := k + 1$  falls  $k \geq 0 \Rightarrow q = \frac{k}{k'} < \frac{k+1}{k'} = n$  ■

# Kapitel 5

## Reelle Zahlen

**Frage:** Frage: algebraische Gleichung  $a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k = 0$  ( $a_j \in \mathbb{Z}$ )  
i.A nur für  $k = 1$  lösbar (d.h. lin. Gl.)

### Beispiel 5.1

$x^2 - 2 = 0$  keine Lösung in  $\mathbb{Q}$ . Angenommen es existiert eine Lösung  $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ , o.B.d.A. höchstens eine der Zahlen  $m, n$  gerade  $\Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m$  gerade  $\stackrel{m=2k}{\Rightarrow} 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow n$  gerade  $\Rightarrow \frac{1}{2}$ .

Offenbar  $1,4^2 < 2 < 1,5^2$ ,  $1,41^2 < 2 < 1,42^2$ ,  $\dots$ , falls es  $\sqrt{2}$  gibt, kann diese in  $\mathbb{Q}$  beliebig genau approximiert werden. Es folgt, dass  $\mathbb{Q}$  anscheinend „Lücken“ hat. **Fläche auf dem Einheitskreis** kann durch rationale Zahlen beliebig genau approximiert werden. Falls „Flächenzahl“  $\pi$  existiert, ist das **nicht** Lösung einer algebraischen Gleichung (Lindemann 1882).

**Ziel:** Konstruktion eines angeordneten Körpers, der diese Lücken füllt.

## 5.1 Struktur von archimedisch angeordneten Körper (allg.)

$\mathbb{K}$  sei ein (bel.) Körper mit bel. Elementen  $0, 1$  bzw.  $0_K, 1_K$ .

### Satz 5.2

Sei  $\mathbb{K}$  Körper. Dann gilt  $\forall a, b \in \mathbb{K}$ :

- 1)  $0, 1, (-a), b^{-1}$  sind eindeutig bestimmt
- 2)  $(-0) = 0, 1^{-1} = 1$
- 3)  $-(-a) = a, (b^{-1})^{-1} = b$  ( $b \neq 0$ )
- 4)  $-(a + b) = (-a) + (-b), (a^{-1}b^{-1}) = (a^{-1}b^{-1})$  ( $a, b \neq 0$ )
- 5)  $-a = (-1) \cdot a, (-a)(-b) = ab, a \cdot 0 = 0$
- 6)  $ab = 0 \iff a = 0$  oder  $b = 0$
- 7)  $a + x = b$  hat eindeutige Lösung  $x = b + (-a) =: b - a$  Differenz  
 $ax = b$  hat eindeutige Lösung  $x = a^{-1}b := \frac{b}{a}$  Quotient

### Beweis

zu 1) vgl. lin. Algebra

zu 2) betrachte  $0 + 0 = 0$  bzw.  $1 \cdot 1 = 1$

zu 3)  $(-a) + a = 0 \stackrel{\text{kommut}}{\Rightarrow} a = -(-a)$  Rest analog

zu 4)  $a + b = ((-a) + (-b)) \Rightarrow$  Behauptung, Addition und Multiplikation analog

zu 5)  $a \cdot 0 = 0$  vgl. lin. Algebra

$$1a + (-1)a = 0 \Leftrightarrow (1 - 1)a = 0 \Rightarrow (-1)a = -1, (-a)(-b) = (-1)(-a)b \stackrel{3,5}{=} ab$$

zu 6)  $(\Leftarrow)$ : nach 5)

$$(\Rightarrow) \text{ sei } a \neq 0 \text{ (sonst klar)} \Rightarrow 0 = a^{-1} \cdot 0 \stackrel{ab=0}{=} a^{-1}ab = b \Rightarrow \text{Beh.}$$

zu 7)  $a + x = b \Leftrightarrow x = (-a) + a \neq x = (-a) + b$ , für  $ax = b$  analog ■

Setze für alle  $a, \dots, a_k \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

**Vielfache**  $n \cdot a$  (kein Produkt in  $\mathbb{K}$ !)

**Potenzen**  $a^n = \prod_{k=1}^n a_k$  für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  damit  $(-n)a := n(-a)$ ,  $0_{\mathbb{N}}a = 0_{\mathbb{N}}$  für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$a^{-n} = (a^{-1})^n, a^{0_{\mathbb{N}}} := 1_{\mathbb{K}} \text{ für } n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, a \neq 0$$

beachte:  $0^0 = (0_{\mathbb{N}})^{0_{\mathbb{N}}}$  nicht definiert!

**Rechenregeln**  $\forall a, b \in \mathbb{K}, m, n \in \mathbb{Z}$  (sofern Potenz definiert)

# Kapitel 6

## Komplexe Zahlen (kurzer Überblick)

**Problem:**  $x^2 = -1$  keine Lösung in  $\mathbb{R} \Rightarrow$  Körpererweiterung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

**Betrachte Menge der komplexen Zahlen**  $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

mit Addition und Multiplikation:

$$\begin{aligned}(x, x') + (y, y') &= (x + y, x' + y') \\ (x, x') \cdot (y, y') &= (xy - x'y', xy' + x'y)\end{aligned}$$

$\mathbb{C}$  ist ein Körper mit (vgl. lin Algebra):

$$0_{\mathbb{K}} = (0, 0), 1_{\mathbb{K}} = (1, 0), -(x, y) = (-x, -y) \text{ and } (x, y)^{-1} = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$$

mit imaginärer Einheit  $\iota = (0, 1)$

$z = x + \iota y$  statt  $z = (x, y)$  mit  $x := \operatorname{Re}(z)$  Realteil von  $z$ ,  $y := \operatorname{Im}(z)$  Imaginärteil von  $z$

komplexe Zahl  $z = x + \iota y$  wird mit reeller Zahl  $x \in \mathbb{R}$  identifiziert

offenbar  $\iota^2 = (-1, 0) = -1$ , d.h.  $z = \iota \in \mathbb{C}$  und löst die Gleichung  $z^2 = -1$  (nicht eindeutig, auch  $(-\iota)^2 = -1$ )

Betrag  $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  mit  $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$  (ist Betrag/Länge des Vektors  $(x, y)$ )

es gilt:

a)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2\iota}$

b)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

c)  $|z| = 0 \iff z = 0$

d)  $|\bar{z}| = |z|$

e)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

f)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  (Dreiecks-Ungleichung; Mikoswski-Ungleichung)

**Beweis**

*SeSt*



## Teil III

# Metrische Räume und Konvergenz

**Konvergenz:** grundlegender Begriff in Analysis

## Kapitel 7

### Grundlegen Ungleichungen

**Satz 7.1 (Geometrisches und arithmetisches Mittel)**

Seien  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} \sqrt[n]{x_1, \dots, x_n} & = & \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \\ \text{geoemtrisches Mittel} & & \text{arithmetisches Mittel} \end{array}$$

Gleichheit gdw  $x_1 = \dots = x_n$ .

**Beweis**

Zeige zunächst mit vollständiger Induktion

$$\prod_{i=1}^n x_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq n \tag{7.1}$$

■

# Kapitel 8

## Metrische Räume