Analysis (WS2017/18 + SS2018)

Dozent: Prof. Dr. Friedemann Schuricht

Kursassistenz: Moritz Schönherr

15. August 2018

Inhaltsverzeichnis

Teil A

1. Semester

Kapitel I

Grundlagen der Mathematik

1. Grundbegriffe aus Logik und Mengenlehre

Mengenlehre: Universalität von Aussagen, Verwendung von Mengen
Logik: Regeln des Folgerns, wahre und falsche Aussagen
$\rightarrow$ hier werden einige Aspekte etwas vereinfacht, aber ausreichend genug behandelt

Definition (Aussage)
Aussage ist ein Schverhalt, dem man entweder den Warheitswert wahr (w) oder falsch (f) zuordnen kann (und nichts anderes).

■ **Beispiel 1.1**

- 5 ist eine Quadratzahl (Aussage) $\rightarrow$ falsch
- Die Elbe fließt durch Dresden (Aussage) $\rightarrow$ wahr
- Mathematik ist rot (keine Aussage)

Definition (Menge)
Menge ist (nach Cantor 1877) eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten der Anschauung oder des Denkens, welche die Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen.

■ **Beispiel 1.2**

- M_1 = Menge aller Städte in Deutschland
- $M_2 = \{1, 2, 3\}$

Definition

- $M = N$, falls dieselben Elemente enthalten sind
- $N \subset M$ (Teilmenge), falls $n \in M$ für jedes $n \in \mathbb{N}$
- $N \subsetneq M$ (echte Teilmenge), falls zusätzlich $N \neq M$.
- Aussageform : Sachverhalt mit Variablen, der durch geeignete Ersetzung der Variablen zur Aussage führt

■ **Beispiel 1.3**

- $A(X)$ = Die Elbe fließt durch X
- $B(X, Y, Z) = X + Y = Z$
- $\rightarrow A(\text{Dresden})$ und $B(2, 3, 4)$ sind Aussagen
- $\rightarrow A(\text{Mathematik})$ ist keine Aussage
- $\rightarrow A(X)$ ist Aussage für jedes $X \in M_1$

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \iff B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F
F	F	W	F	F	W	W

■ **Beispiel 1.4**

- $\neg$(3 ist gerade) - wahr
- (4 ist gerade) $\wedge$ (4 ist Primzahl) - falsch
- (3 ist gerade) $\vee$ (3 ist Primzahl) - wahr
- (Sonne ist heißt) $\Rightarrow$ (Es gibt Primzahlen) - w
- (3 ist gerade) $\iff$ ($\pi \in \mathbb{N}$) - w
- Ausschließendes oder wird realisiert durch $\neg(A \iff B)$

Definition (Quantoren)
Neue Aussagen können mittels Quantoren gebildet werden:

- $\forall x \in M : A(x)$ wahr genau dann wenn (gdw.) $A(x)$ wahr für jedes $x \in M$
- $\exists x \in M : A(x)$ wahr gdw. $A(x)$ wahr für mindestens ein $x \in M$

■ **Beispiel 1.5**

- $\forall n \in \mathbb{N} : n$ ist gerade - f
- $\exists n \in \mathbb{N} : n$ ist gerade - w

Definition (Tautologie, Kontraduktion)
Tautologie bzw. Kontradiktion /Widerspruch (`) ist zusätzlich gesetzte Aussage, die unabhängig vom Wahrheitswert der Teilaussagen stets wahr bzw. falsch ist.

■ **Beispiel 1.6**

- Tautologien: $A \vee \neg A$, $\neg(A \wedge \neg A)$, $(A \wedge B) \Rightarrow A$
- Widerspruch: $A \wedge \neg A$, $A \iff \neg A$
- besondere Tautologie: $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Satz 1.7 (de Morgan'sche Regeln)
Folgende Aussagen sind stets Tautologien

a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

c) $\neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$

d) $\neg(\exists x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$

Beweis. Übung □

Definition

- leere Menge $\emptyset$=: Menge, die kein Element enthält
- M, N sind disjunkt , falls $M \cap N = \emptyset$
- Sei $\mathcal{M}$ Mengensystem , d.h. Mengen von Mengen, dann
  - $\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M := \{x \mid \exists M \in \mathcal{M} : x \in M\}$
  - $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M := \{x \mid \forall M \in \mathcal{M} : x \in M\}$
- Potenzmenge : $\mathcal{P}(XM) := \{\tilde{M} | \tilde{M} \in M\}$
- de Morgan'sche Regeln (für $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(M)$)
  - $\left(\bigcup_{N \in \mathcal{N}} N\right)^C = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N^C$
  - $\left(\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N\right)^C = \bigcup_{N \in \mathcal{N}} N^C$
- kartesisches Produkt $M \times N := \{(m,n) | m \in M \text{ und } n \in N\}$
- $(m_1, \ldots, m_n)$ ist n-Tupel
- Auswahlaxiom (AC / axiom of choice)

  Sei $\mathcal{M}$ Menge nichtleerer, paarweise disjunkter Mengen M
  $\Rightarrow$ es gibt immer (Auswahl-) Menge $\tilde{M}$, die mit jedem $M \in \mathcal{M}$ genau ein Element gemein hat.

1.1. Aufbau einer mathematischen Theorie

Axiome (als wahr angenommene Aussagen) $\rightarrow$ Beweise $\rightarrow$ Sätze ("neue" wahre Aussagen)
$\Rightarrow$ ergibt Ansammlung (Menge) wahrer Aussagen

Formulierung mathematischer Aussagen:

- typische Form eines mathematischen Satzes: $\underbrace{\text{Wenn A gilt,}}_{\text{Vorraussetzung}}\underbrace{\text{dann folgt B}}_{\text{Behauptung}}$
- formal: $A \Rightarrow B$

■ **Beispiel 1.8**

- $n \in \mathbb{N}$ ist durch 4 teilbar $\Rightarrow$ n ist durch 2 teilbar
- genauer meint man sogar $A \wedge C \Rightarrow B$, wobei C aus allen bekannten wahren Aussagen besteht
- B ist notwendig für A
- A ist hinreichend für B

Anmerkung
Aus dem Wikipedia-Artikel zu notwendiger und hinreichender Bedingung:

- notwendige Bedingung: Wenn B wahr ist, dann muss auch A wahr sein. Es kann nicht sein, dass B wahr ist, ohne dass A wahr ist.
- Beispiel: Für jede Primzahl > 2 gilt: Sie ist ungerade. Also: ist die Eigenschaft "Primzahl" notwendig für die Eigenschaft "ist ungerade", denn es gibt keine Primzahl, die gerade ist.
- hinreichende Bedingung: Eine hinreichende Bedingung sorgt für das Eintreten des Ereignisses. Wenn die Bedingung nicht notwendig, sondern nur hinreichend ist, dann gibt es andere hinreichende Bedingungen, die zum Eintreten des Ereignisses führen.
- Beispiel: Cola trinken ist nicht notwendig zum überleben, da man auch Wasser trinken kann.

Definition (direkter Beweis, indirekter Beweis)

- direkt er Beweis: $(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \ldots \wedge (A_n \Rightarrow B)$ wahr für $A \Rightarrow B$
- indirekt er Beweis durch Tautologie $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$

1.2. Relation und Funktion

Definition (Relation)

- Relation ist Teilmenge $R \subset M \times N$. $(x, y) \in R$ heißt: x und y stehen in Relation zueinander.
- Relation $R \subset M \times N$ heißt Ordnungsrelation (kurz Ordnung) auf M, falls $\forall a, b, c \in M$:
  a) $(a, a) \in R$ (reflexiv)
  b) $(a, b), (b, a) \in R \to a = b$ (antisymmetrisch)
  c) $(a, b), (b, c) \in R \to (a, c) \in R$ (transitiv)
- Ordnungsrelation R auf M heißt Totalordnung , falls $\forall a, b \in M : (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$
- Relation auf M heißt Äquivalenzrelation , falls $\forall a, b, c \in M$:
  a) $(a, a) \in R$ (reflexiv)
  b) $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$ (symmetrisch)
  c) $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ (transitiv)
- $[a] := \{b \in M \mid (a, b) \in R\}$ heißt Äquivalenzklasse von $a \in M$ bzgl. R

  Jedes $b \in [a]$ ist ein Repräsentant von $[a]$

Beispiel 1.9
$B = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ Menge der Brüche
man hat Äquivalenzrelation auf B mit $R = \left\{\left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) \in B \times B \mid mq = np\right\}$
beachte: Menge der Äquivalenzklassen $\left\{\left[\frac{m}{n}\right] \mid \frac{m}{n} \in B\right\}$ ist die Menge der rationalen Zahlen

Anmerkung

- Mit einer Ordungsrelation kann man eigentlich unordenbare Dinge wie Funktionen (gilt $x^2 < x^3$ oder $x^2 > x^3$?) ordnen.
- Eine Äquivalenzrelation ist eine Art Gleichheitszeichen, nur eben für mathematische Objekte, die keine Zahen sind.
- zu Beispiel 1.9: Zwei Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ sind gleich, wenn $mq = np$, d.h. diese zwei Brüche gehören zu einer Äquivalenzklasse. So gehören die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{6}$ zu einer Äquivalenzklasse, nämlich zu $\left[\frac{2}{3}\right]$, da $2 \cdot 6 = 12 = 3 \cdot 4$. Alle Äquivalenzklassen, also alle nicht mehr kürzbaren Brüche ergeben dann die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

Definition (Abbildung)

Abbildung /Funktion von M nach N, kurz: $F : M \to N$ ist Vorschrift, die jedem Argument / Urbild $m \in M$ genau einen Wert / Bild $F(m) \in N$ zuordnet.

- $\mathcal{D}(F) := M$ heißt Definitionsbereich / Urbildmenge
- N heißt Zielbereich
- $F(M') := \{n \in N \mid n = F(m) \text{ für ein } m \in M'\}$ ist Bild von $M' \subset M$
- $F^{-1}(N') := \{m \in M \mid n = F(m) \text{ für ein } N'\}$ ist Urbild von $N' \subset N$
- $\mathcal{R}(F) := F(M)$ heißt Wertebereich / Bildmenge
- $\text{graph}(F) := \{(mn,) \in M \times N | n = F(m)\}$ heißt Graph von F
- $F|_{M'}$ ist Einschränkung der Funktion von F auf $M' \subset M$
- Zwei Funktionen F und G sind gleich, wenn
  - $\mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(G)$
  - $F(m) = G(m) \quad \forall m \in \mathcal{D}(F)$
- Komposition von $F : M \to N$ und $G : N \to P$ ist Abbildung $G \circ F : M \to P$ mit $(G \circ F)(m) := G(F(m))$
- Abbildung $F : M \to N$ heißt
  - injektiv , falls eineindeutig (d.h. $F(m_1) = F(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$)
  - surjektiv , falls $F(M) = N$, d.h. $\forall n \in N \, \exists m \in M : F(m) = n$
  - bijektiv , falls injektiv und surjektiv
- Für bijektive Abb. $F : M \to N$ ist Umkehrabbildung / inverse Abbildung F^{-1}: $N \to M$ definiert durch $F^{-1}(n) = m \Leftrightarrow F(m) = n$

Beispiel 1.10

betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f(x) = \sin(x)$

Zielmenge: $\mathbb{R}$, aber Wertebereich $[-1, 1]$!

Satz 1.12
Sei $F : M \to N$ surjektiv. Dann existiert Abbildung $G : N \to M$, sodass $F \circ G = \mathrm{id}_N$ (d.h. $F(G(n)) = n \,\forall n \in N$)

Beweis. Definiere Menge $\Gamma_n = \{m \in M \mid F(m) = n\} \overset{\text{surjektiv}}{\neq} \emptyset$. Nach Auswahlaxiom existiert Abbildung $G : N \to M$ mit $G(n) \in \Gamma_n$; $\forall n \in N \Rightarrow F(G(n)) = n$; $\forall n \in N \Rightarrow$ Behauptung. □

Definition (Verknüpfung)
Eine Rechenoperation / Verknüpfung auf M ist Abb. $* : M \times M \to M$, d.h. $m, n \in M$ wird Ergebnis $m * n \in M$

Rechenoperation

- hat neutrales Element $e \in M$, falls $m * e = e * m = m \,\forall m \in M$
- ist kommutativ , falls $m * n = n * m$
- ist assoziativ , falls $k * (m * n) = (k * m) * n \,\forall k, m, n \in M$
- hat inverses Element $m' \in M$ zu $m \in M$, falls $m * m' = m' * m = e$

■ **Beispiel 1.13**

- Addition : $(m, n) \mapsto: m + n$ Summe ,
  - neutrales Element heißt Null / Nullelement
  - Inverses Element: $-m$
- Multiplikation $\cdot : (m, n) \mapsto: m \cdot n$ Produkt
  - neutrales Element heißt Eins / Einselement
  - Inverses Element:m^{-1}

Definition (distributiv)
Addition und Multiplikation heißen distributiv , falls $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n \,\forall k, m, n \in M$

Definition (Körper)
Menge K heißt Körper , falls auf K eine Addition und Multiplikation existiert mit

- es existieren neutrale Elemente $0 \in K$ und $1 \in K_{\neg 0}$
- Addition und Multiplikation sind distributiv
- Es gibt Inverse

Definition
Menge M habe Ordnung „$\leq$“, sowie Addition und Multiplikation. Ordnung ist verträglich mit Addition und Multiplikation, wenn $\forall a, b, c \in M$

- $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$
- $a \leq b \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ mit $c > 0$

Definition (angeordnet)
Körper K heißt angeordnet , falls mit Addition und Multiplikation verträgliche Totalordnung existiert.

Definition (Isomorphismus)
Isomorphismus bezüglich einer Struktur ist bijektive Abbildung $I : M_1 \to M_2$, die auf M_1 und M_2 vorhandene Struktur erhält, z.B.

- Ordnung: $a \leq b \iff I(a) \leq I(b)$
- Rechenoperationen: $I(a * b) = I(a) * I(b)$

Mengen M_1 und M_2 heißen isomorph .

Anmerkung
Mit einem Isomorphismus kann man die Elemente einer Menge, z.B. ganze Zahlen, den Elementen einer anderen Menge, z.B. den natürlichen Zahlen, zuordnen. Konkret würde das dann so aussehen: $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$, $-1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $-2 \mapsto 4$, ...
Insbesondere wenn es darum geht, ob die ganzen Zahlen abzählbar sind, also ob ich diese mit den natürlichen Zahlen neu durchnummerieren kann, ist ein solcher Isomorphismus (denn dieses "neunummerieren" ist ein Isomorphismus) notwendig. Alle Aussagen, die die Struktur betreffen, z.B. die Kommutativität, bleiben erhalten und müssen nicht neu bewiesen werden.

■ **Beispiel 1.14**
$M_1 = \mathbb{N}$, $M_2 = \{\text{gerade Zahlen}\}$ jeweils mit Addition, Multiplikation, Ordnung
$\Rightarrow I : M_1 \to M_2$ mit $I(n) = 2n$ ist ein Isomorphismus, denn alle geraden Zahlen werden einfach nur neu durchgezählt
$\Rightarrow$ Isomorphismus erhält Addtion, Ordnung und die 0, aber nicht die Multiplikation, da $I(a)*I(b) = 2a * 2b = 4ab$ aber $I(a * b) = 2(a * b) = 2ab$, also $I(a) * I(b) \neq I(a * b)$

2. Bemerkungen zum Fundament der Mathematik

Forderungen an eine mathematische Theorie

- widerspruchsfrei: Satz und seine Negation sind nicht gleichzeitig herleitbar
- vollständig: alle Aussagen innerhalb einer Theorie sind als wahr oder falsch beweisbar

2 Unvollständigkeitssätze

- jedes System ist nicht gleichzeitig widerspruchsfrei und vollständig
- in einem System kann man nicht die eigenen Widerspruchsfreiheit zeigen

Kapitel II

Zahlenbereiche

3. Natürliche Zahlen

Definition (Peano Axiome)
$\mathbb{N}$ sei Menge, die die PEANO-Axiome erfüllen, d.h.

P1) $\mathbb{N}$ sei indutkiv, d.h. es ex.

- Nullelement $0 \in \mathbb{N}$ und
- injektive (Nachfolger-) Abb. $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\nu(n) \neq 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$

P2) (Induktionsaxiom)

Falls $N \subset \mathbb{N}$ induktiv in $\mathbb{N}$ (d.h. $0, \nu(n) \in \mathbb{N}$ falls $n \in \mathbb{N}$)
$\Rightarrow N = \mathbb{N}$ (N ist die kleinste indutkive Menge)

Nach Mengenlehre ZF existiert eine Solche Menge der natürliche Zahlen mit üblichen Symbolen.

Theorem 3.1
Falls $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}*$ PEANO-Axiome erfüllen, dann sind sie isomorph bezüglich Nachfolger-Abbildung und Nullelement (Anfangselement).

Satz 3.2 (Prinzip der vollständigen Induktion)
Sei $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ Aussagenmenge mit d. Eigenschaften

(IA) A_0 ist wahr (Induktionsanfang)

(IS) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: A_n (wahr) $\Rightarrow A_{n+1}$

$\Rightarrow A_n$ ist wahr $\forall n \in \mathbb{N}$

Beweis. Sei $N := \{n \in \mathbb{N} \mid A_n \text{ ist wahr}\} \subset \mathbb{N}$, offenbar $0 \in \mathbb{N}$ und $\nu(n) \in \mathbb{N}$, falls $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ induktiv in $\mathbb{N} \overset{P2)}{\Rightarrow} N = \mathbb{N}$ □

Lemma 3.3
Es gilt:

a) $\nu(\mathbb{N}) \cup \{0\} = \mathbb{N}$

b) $\nu(n) \neq n \, \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis. a) $N := \{n \in \mathbb{N} \mid n = \nu(m) \text{ für } n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ist induktiv in $\mathbb{N} \overset{P2)}{\Rightarrow} N = \mathbb{N}$

b) Beweis mittels vollständiger Induktion

(IA) $\nu(0) \neq 0$ nach P1)

(IS) Zeige: $(\nu(n) \overset{\text{IV)}}{\neq} n \Rightarrow \nu(\nu(n)) \neq \nu(n) \forall n \in \mathbb{N}$ indirekter Beweis:
Angenommen $\nu(\nu(n)) = \nu(n) \overset{\nu \text{ inj.}}{\Rightarrow} \nu(n) = n \overset{\text{IV)}}{\Rightarrow}$ ` $\Rightarrow (1) \Rightarrow$ b) nach Prinzip der vollst. Induktion (vgl.Satz 3.2) $\square$

Satz 3.4 (Rekursive Definition / Rekursion)
Sei bB Menge, $b \in B$ u. $F : B \times \mathbb{N} \to B$ Abbildung. Dann liefert die Vorschrift

$$f(0) := b, \tag{1}$$
$$f(n+1) := F(f(n), n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

genau eine Abbildung für $f : \mathbb{N} \to B$ (d.h. solche Abbildung ist eindeutig)

Beweis. mittels vollständiger Induktion:

IA $f(0) = b$ eindeutig definiert

IS angenommen $f(n)$ eindeutig definiert $\overset{1)}{\Rightarrow} f(n+1) \overset{\text{Satz 3.2}}{\Rightarrow}$ Behauptung gilt nach Prinzip der vollständigen Induktion $\square$

Beweis (Theorem 3.1). $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^*$ mögen Peano-Axiome erfüllen mit $(\nu, 0)$ bzw. $(\nu^*, 0^*)$. Betrachte rekursive eindeutige definierte Abbildung: $I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ (Satz 3.4 $B = \mathbb{N}^*$, $F(n^*, n) = \nu^*(n^*)$) $I(0) = 0^*, I(\nu(n)) = \nu^*(I(n)) \forall n \in \mathbb{N}$ I enthält Nullelement und Nachfolgerabbildung. Falls I bijektiv, dann ist I ein Isomorphismus und Behauptung folgt.
Zeige I surjektiv: offenbar $0^* \in I(\mathbb{N})$, falls $n^* \in I(\mathbb{N}) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n^* = I(n) \Rightarrow \nu^*(n^*) = \nu^*(I(n)) = I(\nu(n)) \in I(\mathbb{N})$ (Bild). Folglich ist $I(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}^*$ induktiv in $\mathbb{N}^* \overset{\text{P2)}}{\Rightarrow} I(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$.
Zeige I injektiv: $I(n) \neq I(m) \forall n \neq m$ (*) vollständige Induktion nach m (jeweils $\forall n \neq m$)

IA) $m = 0 : \forall n \neq 0 \exists n \in \mathbb{N}$: $n = \nu(n')$ (vgl. Lemma 3.3) $\Rightarrow I(n) = I(\nu(n')) = \nu^*(I(n')) \overset{\text{P1)}}{\neq} 0^* = I(0) \forall n \neq 0$ (ist gerade (*)))

IS) IV: Sei $I(n) \neq I(m) \forall n \neq m$, dann für $n = 0$, $n = \nu(m)$ mit $I(0) = 0^* \neq \nu^*(I(m)) = I(\nu(m))$.
für $n \neq 0$, $n \overset{\text{Lemma 3.3}}{=} \nu(n') \neq \nu(m) \overset{\nu \text{ inj.}}{\Rightarrow} n' \overset{\text{IV)}}{\neq} m$ und $I(n) = I(\nu(n')) = \nu^*(I(n')) \neq \nu^*(I(m)) = I(\nu(m))$
$\Rightarrow$ in der Behauptung $I(n) \neq I(\nu(m)) \forall n \neq \nu(m) \Rightarrow$(*) mittels vollständiger Induktion,
d.h. I ist injektiv $\square$

3.1. Rechenoperationen

Definition (Rechenoperation auf $\mathbb{N}$)
Definiere Addition $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ durch $n + 0 := n, n + \nu(m) := \nu(n + m) \forall n, m \in \mathbb{N}$

Definiere Multiplikation $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ durch $n \cdot 0 = 0, n \cdot \nu(m) = n \cdot m + n \forall m, n \in \mathbb{N}$

Satz 3.5
Addition und Multiplikation haben folgende Eigenschaften, d.h. $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

		Addition	Multiplikation
a)	$\exists$ neutrales Element	$n + 0 = n$	$n \cdot 1 = n$
b)	kommutativ	$m + n = n + m$	$m \cdot n = n \cdot m$
c)	assoziativ	$(k + m) + n = k + (m + n)$	$(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$
d)	distributiv	$k(m + n) = k \cdot m + k \cdot n$	

Beweis. a) $n + 0 = n$ klar, $n \cdot 1 = n\nu(0) = n \cdot 0 + n = 0 + n \overset{\text{Add. kommutativ}}{=} n$

b) ÜA

c) assoziativ für Addition (vollst. Induktion nach n)

IA) $n = 0$: $k + (m + 0) = k + m = (k + m) + 0 \forall k, m \in \mathbb{N}$

IV) Sei $k + (m + n) = (k + m) + n \forall k, m \in \mathbb{N}$

IS) IV) $\Rightarrow k + (m + \nu(n)) = k + \nu(m + n) = \nu(k + (m + n)) \overset{\text{IV)}}{=} \nu((k + m) + n) = (k + m) + \nu(n) \forall k, m \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Indunktionbehauptung $\overset{\text{voll. Ind.}}{\Rightarrow}$ Addition assoziativ: Beweis für Multiplikation analog

d) distributiv (vollst. Ind. nach k)

IA) $k = 0$ $0 \cdot (m + n) = km + kn \forall m, n \in \mathbb{N}$

IS) Sei $k(m + n) = km + kn \forall m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \nu(k) \cdot (m + n) \overset{\text{Def M.}}{=} k \cdot (m + n) + (m + n) \overset{\text{IV)}}{=} k \cdot m + k \cdot m + m + n \overset{\text{Def M.}}{=} \nu(k) \cdot m + \nu(k) \cdot n \forall m, n \in \mathbb{N} \overset{\text{voll. Ind.}}{\Rightarrow}$ Behauptung $\square$

Folgerung 3.6
Es gilt $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$:

a) $m \neq 0 \Rightarrow m + n \neq 0$

b) $m \cdot n = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee n = 0$

c) $m + k = n + k \Leftrightarrow m = n$ (Kürzungsregel(KR) Addition)

d) $k \neq 0 : m \cdot k = n \cdot k \Leftrightarrow m = n$ (KR Multiplikation)

Beweis. a) $m \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$: $m = \nu(m') \Rightarrow n + m = n + \nu(m') \overset{\text{Def Add.}}{=} \nu(n + m') \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

b) "$\Leftarrow$": folgt nach Def M.
"$\Rightarrow$": SeSt

c) "$\Leftarrow$": Wegen Eindeutigkeit der Addition
"$\Rightarrow$": vollst. Induktion nach k

IA) $n = 0$ klar

IS) Behauptung gelte für k, sei nun $m + (k + 1) = n + (k + 1) \Rightarrow \nu(n + k) \overset{\nu \text{ inj.}}{\Rightarrow} m + k = n + k \overset{\text{IV)}}{\Rightarrow} m = n \Rightarrow$

d) ÜA/SeSt (kann erst nach Satz 3.7 beweisen werden!) $\square$

3.2. Ordnung auf $\mathbb{N}$

Definition (Ordnung auf $\mathbb{N}$)
Betr. Relation $R := \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n\}$

Satz 3.7
Es gilt auf $\mathbb{N}$:

1) $m \leq n \;\Rightarrow\; \exists! k \in \mathbb{N} : n = m + k$, nenne $n - m =: k$ Differenz
2) Relation R (bzw. „$\leq$“) ist Totalordnung auf $\mathbb{N}$
3) Ordnung „$\leq$“ ist verträglich mit Addition und Multiplikation

Beweis. 1) Sei $n = m + k = m + k' \overset{\text{KR}}{\Rightarrow} k = k'$

2) $n = n + 0 \Rightarrow n \leq n \Rightarrow$ reflexiv
Sei $k \leq m, m \leq n \Rightarrow \exists l, j \colon m = k + l, n = m + j = (k + l) + j = k + (l + j) \Rightarrow k \leq n \Rightarrow$ transitiv
Sei $m \leq n, n \leq m \overset{\text{transitiv} k=n}{\Rightarrow} n = m + j = n + l + j \overset{\text{KR}}{\Rightarrow} 0 = l + j \overset{\text{Folgerung 3.6}}{\Rightarrow} j = 0 \Rightarrow n = m \Rightarrow$ antisymmetrisch
$\Rightarrow R$ ist eine Ordnung auf $\mathbb{N}$
Zeige R Totalordnung, d.h. $\forall m, n \in \mathbb{N}$: $m \leq n$ oder $n \leq m$ (Folgerung 3.6)
vollst. Induktion nach m:
   IA) $m = 0$: wegen $n = 0 + n$ folgt $0 \leq n \forall n$
   IS) gelte Folgerung 3.6 für festes m und $\forall n \in \mathbb{N}$, dann
   falls $n \leq m \overset{m \leq m+1 \text{ transitiv}}{\Rightarrow} n \leq m + 1$
   falls $m \leq n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$: $n = m + (k + 1) = (m + 1) + k \Rightarrow m + 1 \leq n \Rightarrow$ Folgerung 3.6 gilt für $m + 1$ und $\forall n \in \mathbb{N} \overset{\text{voll. Ind.}}{\Rightarrow}$ Folgerung 3.6

3) Sei $m \leq n \Rightarrow \exists j \colon n = m + j \overset{\text{KR}}{\Rightarrow} n + k = m + j + k \Rightarrow m + k \leq n + k$ und Rest analog $\square$

4. Ganze und rationale Zahlen

4.1. Ganze Zahlen

Frage: Existiert eine natürliche Zahl x mit $n = n' + x$ für ein gegebenes n und n'?
Antwort: Das geht nur falls $n \geq n'$, dann ist $x = n - n'$.
Ziel: Zahlbereichserweiterung, sodass die Gleichung immer lösbar ist. Ordne jedem Paar $(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine neue Zahl x als Lösung zu. Gewisse Paare liefern die gleiche Lösung, z.B. $(6,4)$, $(5,3)$ und $(7,5)$. Diese müssen mittels Relation identifiziert werden.

Definition (Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$)
Definiere Äquivalenzrelation $Q := \{((n_1, n_1'), (n_2, n_2')) \in ((\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})) | n_1 + n_2' = n_1' + n_2\}$

■ **Beispiel 4.1**

- $(5,3) \sim (6,4) \sim (7,5)$ bzw. $5-3 \sim 6-4 \sim 7-5$
- $(3,6) \sim (5,8)$ bzw. $3-6 \sim 5-8$

Satz 4.2
Q ist Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Beweis.
- offenbar $(n, n') \in Q$ und $(n', n) \in Q \Rightarrow$ reflexiv
- falls $((n_1, n_1'), (n_2, n_2')) \in Q \Rightarrow ((n_2, n_2'), (n_1, n_1')) \in Q \Rightarrow$ symmetrisch
- sei $((n_1, n_1'), (n_2, n_2')) \in Q$ und $((n_2, n_2'), (n_3, n_3')) \in Q \Rightarrow n_1 + n_2' = n_1' + n_2$ und $n_2 + n_3' = n_2' + n_3 \Rightarrow n_1 + n_3' = n_1' + n_3 \Rightarrow ((n_1, n_1'), (n_3, n_3')) \in Q \Rightarrow$ transitiv □

Setze $\overline{\mathbb{Z}} = \{[(n, n')] \mid n, n' \in \mathbb{N}\}$ Menge der ganzen Zahlen
Kurzschreibweise: $\overline{m} = [(m, m')]$

Satz 4.3
Sei $[(n, n')] \in \overline{\mathbb{Z}}$. Dann ex. eindeutige $n^* \in \mathbb{N} : (n^*, 0) \in [(n, n')]$ falls $n \geq n'$ bzw. $(0, n^*) \in [(n, n')]$ falls $n \leq n'$.

Beweis.
- $n \geq n' \Rightarrow$ es existiert genau ein $n* \in \mathbb{N} : n = n' + n* \Rightarrow (n*, 0) \sim (n, n')$
- $n < n' \Rightarrow$ es existiert genau ein $n* \in \mathbb{N} : n + n* = n' \Rightarrow (0, n*) \sim (n, n')$ □

Frage: Was hat $\overline{\mathbb{Z}}$ mit $\mathbb{Z}$ zu tun?
Antwort: Identifiziere $(n, 0)$ bzw. $(n - 0)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $(0, n)$ bzw. $(0 - n)$ mit Symbol $-n$.
$\Rightarrow$ ganze Zahlen kann man eindeutig den Elementen folgender Mengen zuordnen: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{(-n) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

4.2. Rechenoperationen auf $\overline{\mathbb{Z}}$

Definition (Addition, Multiplikation)
$\underline{\text{Addition}} : \overline{m} + \overline{n} = [(m, n')] + [(n, n')] := [(m + n, m' + n')]$

$\underline{\text{Multiplikation}} : \overline{m} \cdot \overline{n} = \overline{mn} = [(m, m')] \cdot [(n, n')] := [(mn + m'n', mn' + m'n)]$

Satz 4.4
Addition und Multiplikation sind eindeutig definiert, d.h. unabhängig vom Repräsentanten bzgl. Q.

Beweis. Sei $(m_1, m_1') \sim (m_2, m_2')$ und $(n_1, n_1') \sim (n_2, n_2') \Rightarrow m_1 + m_2' = m_1' + m_2$ und $n_1 + n_2' = n_1' + n_2 \Rightarrow m_1 + n_1 + m_2' + n_2' = m_1' + n_1' + m_2 + n_2 \Rightarrow (m_1, m_1') + (n_1, n_1') \sim (m_2, m_2') + (n_2, n_2')$ □

Satz 4.5
Für Addition und Multiplikation auf Z gilt $\forall \overline{m}, \overline{n} \in \overline{\mathbb{Z}}$:

1) Es ex. neutrales Element $0 := [(0,0)]$ (Add.), $1 := [(1,0)]$ (Mult., $= [(k,k)]$)
2) Jeweils kommutativ, assoziativ und gemeinsam distributiv
3) $-\overline{n} := [(n', n)] \in \overline{\mathbb{Z}}$ ist Inverses bzgl. Addition von $[(n, n')] = \overline{n}$
4) $(-1) \cdot \overline{n} = -\overline{n}$
5) $\overline{m} \cdot \overline{n} = 0 \Leftrightarrow \overline{m} = 0 \vee \overline{n} = 0$

Beweis.
1) offenbar $\overline{n} + 0 = 0 + \overline{n} = \overline{n}$ und $\overline{n} \cdot 1 = 1 \cdot \overline{n} = \overline{n}$
2) SeSt
3) offenbar $\overline{n} + (-\overline{n}) = (-\overline{n}) + \overline{n} = 0$
4) $-1 \cdot \overline{n} = [(0,1)] \cdot [(n,n')] = [(n', n)] = -\overline{n}$
5) ÜA □

Satz 4.6
Für $\overline{m}, \overline{n} \in \overline{\mathbb{Z}}$ hat Gleichung $\overline{m} = \overline{n} + \overline{x}$ eindeutige Lösung $\overline{x} = \overline{m} + (-\overline{n}) = [(m + n'), (m' + n)]$.

Beweis. $\overline{m} = \overline{n} + \overline{x} \iff \overline{x} = (-\overline{n}) + \overline{n} + \overline{x} = -\overline{n} + \overline{m}$ □

4.3. Ordnung auf $\overline{\mathbb{Z}}$

Definition (Ordnungsrelation auf $\overline{\mathbb{Z}}$)
Betr. Relation $R := \{(\overline{m}, \overline{n}) \in \overline{\mathbb{Z}} \times \overline{\mathbb{Z}} | \overline{m} \leq \overline{n}\}$, wobei $\overline{m} = [(m, m')] \leq [(n, n')]$ gdw. $(m + n' \leq m' + n)$

Satz 4.7
R ist Totalordnung auf $\overline{\mathbb{Z}}$, die verträglich ist mit Addition und Multiplikation.

Beweis. SeSt und analog □

Ordnung verträglich mit Addition: $\overline{n} < 0 \iff 0 = \overline{n} + (-\overline{n}) < -\overline{n} = -1 \cdot \overline{n}$

Satz 4.8
Betr. $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cup \{(-k) | k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ mit üblicher Addition, Multiplikation und Ordnung „$\geq$“.
$\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Z}}$ sind isomorph bzgl. Addition, Multiplikation, Ordnung.

Beweis. betrachte Abbildung $I : \mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Z}}$ mit $I(k) = [(k, 0)]$ und $I(-k) = [(0, k)]$
$\Rightarrow$ Übungsaufgabe □

Notation: verwende stets $\mathbb{Z}$, schreibe $m, n, ...$ statt $\overline{m}, \overline{n}, ...$

4.4. Rationale Zahlen

Frage: Existiert eine ganze Zahl mit $n = n' \cdot x$ für $n, n' \in \mathbb{Z}$, $n' \neq 0$?
Antwort: Im Allgemeinen nicht.
Ziel: Zahlbereichserweiterung analog zu $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
ordne jedem Paar $(n, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine neue Zahl x zu, schreibe (n, n') auch als $\frac{n}{n'}$ oder $n : n'$, identifiziere Paare wie z.B. $\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}$ durch Relation

Definition (Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Q}$)
Betr. Relation $Q := \left\{ \left(\frac{n_1}{n_1'}, \frac{n_2}{n_2'} \right) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}) \middle| n_1 n_2' = n_1' n_2 \right\}$

Setzte $\mathbb{Q} := \left\{ \left[\frac{n}{n'} \right] \middle| (n, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0} \right\}$ Menge der <u>rationale Zahlen</u> .

Offenbar gilt <u>Kürzungsregel</u> $\left[\frac{n}{n'} \right] = \left[\frac{k \cdot n}{k \cdot n'} \right] \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$.

4.5. Rechenoperationen auf $\mathbb{Q}$

Definition
<u>Addition</u> : $\left[\frac{m}{m'} \right] + \left[\frac{n}{n'} \right] := \left[\frac{mn' + m'n}{m' + n'} \right]$

<u>Multiplikation</u> : $\left[\frac{m}{m'} \right] \cdot \left[\frac{n}{n'} \right] := \left[\frac{m \cdot n}{m' \cdot n'} \right]$

Addition und Multiplikation sind unabhängig vom Repräsentanten bzgl. $Q \Rightarrow$ Operationen auf Q eindeutig definiert.

Satz 4.9
Mit Addition und Multiplikation ist $\mathbb{Q}$ Körper mit

- neutralem Element $0 := \left[\frac{0_\mathbb{Z}}{1_\mathbb{Z}} \right] = \left[\frac{0_\mathbb{Z}}{n} \right], 1 := \left[\frac{1_\mathbb{Z}}{1_\mathbb{Z}} \right] = \left[\frac{n}{n} \right] \neq 0 \; n \neq 0$
- Inverse Elemente $-\left[\frac{n}{n'} \right] = \left[\frac{-n}{n'} \right], \left[\frac{n}{n'} \right]^{-1} = \left[\frac{n'}{n} \right]$

Beweis. SeSt, ÜA □

4.6. Ordnung auf $\mathbb{Q}$

Definition
Relation $R := \left\{ \left(\left[\frac{m}{m'} \right], \left[\frac{n}{n'} \right] \right) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \middle| mn' \leq m'n'; m', n' > 0 \right\}$ gibt Ordnung „$\leq$“.

Satz 4.10
$\mathbb{Q}$ ist angeordneter Körper („$\leq$“) ist Totalordnung verträglich mit Addition und Multiplikation).

Beweis. SeSt, ÜA □

Notation: schreibe vereinfacht nur noch $\frac{n}{n'}$ für die Zahl $\left[\frac{n}{n'} \right] \in \mathbb{Q}$ und verwende Symbole $p, q, ...$ für Elemente aus $\mathbb{Q}$.

Gleichung $p \cdot x = q$ hat stets eine eindeutige Lösung: $x = q \cdot p^{-1}$.

Frage: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (nach Definition) $\to \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$?
Antwort: Sei $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}} = \left\{ \frac{n}{1} \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$, $I : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\mathbb{Q}$ mit $I(n) = \frac{n}{1}$
$\Rightarrow I$ ist Isomorphismus bezüglich Addition, Multiplikation, Ordnung; in diesem Sinne: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Folgerung 4.11
Körper $\mathbb{Q}$ ist archimedisch angeordnet , d.h. $\forall q \in \mathbb{Q}\, \exists n \in \mathbb{N} : q < n$.

Beweis. Sei $q = \left[\frac{k}{k'}\right]$ mit $k' > 0$

- $n = 0$ falls $k < 0 \Rightarrow q = \left[\frac{k}{k'}\right] < \left[\frac{0}{k'}\right] = 0 = n$
- $n = k + 1$ falls $k \geq 0 \Rightarrow q = \left[\frac{k}{k'}\right] \leq \left[\frac{k+1}{k'}\right] \leq \left[\frac{k+1}{1}\right] = n$ $\square$

5. Reelle Zahlen

Struktur von archimedisch angeordneten Körpern

Satz 5.2
Sei K Körper. Dann gilt $\forall a, b \in K$:

1) $0, 1, (-a), b^{-1}(b \neq 0)$ sind eindeutig bestimmt
2) $(-0) = 0, 1^{-1} = 1$
3) $-(-a) = a, (b^{-1})^{-1} = b(b \neq 0)$
4) $-(a+b) = (-a) + (-b), (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}(a, b \neq 0)$
5) $-a = (-1)a, (-a)(-b) = ab,\ a \cdot 0 = 0$
6) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$
7) $a + x = b$ hat eindeutige Lösung $x = b + (-a) =: b - a$ Differenz $ax = b(a \neq 0)$ hat eindeutige Lösung $x = a^{-1}b =: \frac{b}{a}$ Quotient

Definition
- Vielfache : $na := \sum_{k=1}^{n} a$

  Damit:

  - $(-n)a := n(-a), 0_{\mathbb{N}}a := a_K$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$
  - $ma + na = (m+n)a, na + nb = n(a+b)$
  - $(ma) \cdot (na) = (mn)a^2, (-n)a = -(na)$
- Potenz : a^n von $a \in K, n \in \mathbb{Z} := \prod_{k=1}^{n} a$

  Damit

  - $a^{-n} := (a^{-1})^n, a^{0_K} := 1_K$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, a \neq 0$
  - $a^m a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, a^n b^n = (ab)^n, a^{-n} = (a^n)^{-1}$
- Fakkultät für $n \in \mathbb{N}$:$n! := \prod_{k=1}^{n} k, 0! = 1$
- Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N}\ \forall k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$
  - $\binom{k+1}{n+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$
  - Rechenregel führt auf PASCAL'sches Dreieck

Satz 5.3 (Binomischer Satz)
In Körper K gilt: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^n b^{n-k}, , b \in K, n \in \mathbb{N}$

Beweis. ÜA □

Satz 5.4

Sei K angeordneter Körper. Dann gilt $\forall a, b, c, d \in K$:

a) $a < b \Leftrightarrow 0 < b - a$

b) $a < b, c < d \Leftrightarrow a + c < b + d$

$0 \leq a < b, 0 \leq c < d \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot d$

c) $a < b \Leftrightarrow -b < -a$ (insbes. $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$)

$a < b, c < 0 \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c$

d) $a \neq 0 \Leftrightarrow a^2 > 0$ (insbes. 1 ¿ 0)

e) $a > 0 \Leftrightarrow a^{-1} > 0$

f) $0 < a < b \Leftrightarrow b^{-1} < a^{-1}$

Beweis. Betrachte Ordnung veträglich mit Addition und Multiplikation.

a) $a < b \Leftrightarrow a + (-a) < b(-a) \Leftrightarrow 0 \leq b - a$

b) $a < b, c < d \Rightarrow a + c < b + d \overset{\text{transitiv}}{\Rightarrow} a + c < b + d$ Multi. analog

c) $a < b \Leftrightarrow a - a - b < b - a - b \Leftrightarrow -b < -a$
$a < b, -c > 0 \overset{\text{Ord. vertr. Multi}}{\Leftrightarrow} a \cdot (-1) < b \cdot (-1) \Rightarrow (-1)ac < -1(bc) \Rightarrow -(ac) < -(bc) \overset{c)}{\Rightarrow} ac > bc$

d) Sei $a > 0 \overset{2)}{\Rightarrow} a^2 > 0$. Sei $a > 0 \Rightarrow (-a) > 0 \overset{b)}{\Rightarrow} 0 < (-a)^2 \overset{\text{Satz 5.2}}{=} a$

e) "$\Rightarrow$": $(a^{-1})^2 > 0$ nach d) $\overset{\text{vertr. mit Multi}}{\Rightarrow} a \cdot (a^{-1})^2 = a^{-1} > 0$
"$\Leftarrow$": Analog zu "$\Rightarrow$" ersetze a^{-1} durch a

6) $ab > 0$ nach b) $\overset{5)}{\Rightarrow} 0 < (ab)^{-1} \overset{\text{Satz 5.2}}{=} a^{-1}b^{-1}$ wegen $a < b \Rightarrow b^{-1} = a^{-1}b^{-1}a \leq a^{-1}b^{-1}b = a^{-1}$ □

Definition

Absolutbetrag $|\cdot| : K \to K$ (auf angeordneten Körper K)

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Satz 5.5
Sei K angeordneter Körper. Dann gilt $\forall a, b \in K$:

1) $|a| \geq 0, |a| \geq a$
2) $|a| = 0$ gdw. $a = 0$
3) $|a| = |-a|$
4) $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$
5) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$
6) Dreiecksungleichung

   $|a+b| \leq |a| + |b|$ $(|a-b| = |a+(-b)| \leq |a| + |b|)$
7) $|a| - |b| \leq |a+b|$
8) Bernoulli-Ungleichung

   $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a \forall a \geq -1, n \in \mathbb{N} (a \neq -1 \text{ bei } n = 0)$

   (Gleichheit gdw. $n = 0, 1$ oder $a = 0$)

Definition
Betr. $f : \mathbb{Q} \to K$ mit $f\left(\frac{m}{n}\right) := \frac{m \cdot 1_K}{n \cdot 1_K} = (m1_k)(n1_K)^{-1} \forall m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$

Beweis.
1) klar
2) klar
3) Fallunterscheidung SeSt
4) Fallunterscheidung SeSt
5) $a = \frac{a}{b} \cdot a \overset{4)}{\Rightarrow} |a| = \left|\left|\frac{a}{b}\right| \cdot |b|\right| \overset{\cdot |b|^{-1}}{\Rightarrow} \frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$
6) nach 1) $a \leq |a|, b \leq |b| \xRightarrow{\text{Satz 5.5}} a + b \leq |a| + |b|$ analog $-a - b \leq |a + |b| \Rightarrow$ Behauptung
7) $|a| = |a+b-b| \overset{6)}{\leq} |a+b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a+b|$ analog $|b| - |a| \leq |a+b| \Rightarrow$ Behauptung
8) für $n = 0, 1,\ a = 0$ klar
   Zeige: $(1+a)^n > 1 + na \forall n \leq 2, a \neq 0$ durch voll. Induktion ÜA □

Betrachte: $f : \mathbb{Q} \to K$ mit $f\left(\frac{m}{n}\right) := \frac{m \cdot 1_K}{n \cdot 1_K} = (m1_k)(n1_K)^{-1} \forall m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} =: \mathbb{Z}_{\neq 0}$

Satz 5.6
Sei K angeordneter Körper
$\Rightarrow f : \mathbb{Q} \to K$ ist injektiv und f erhält die Körperstruktur und Ordnung, d.h. $\forall p, q \in \mathbb{Q}$:

a) $f(p+q) = f(p) + f(q), f(0) = 0_K, f(-p) = -f(p)$
b) $f(p \cdot q) = f(p) \cdot f(q), f(1) = 1_K, f(p^{-1}) = f(p)^{-1} (p \neq 0)$
c) $p \leq_{\mathbb{Q}} q \Leftrightarrow f(p) \leq_K f(q)$

Beweis. a) $0_K \overset{\text{Satz 5.5}}{<} 1 \overset{\text{voll. Ind.}}{\Rightarrow} 0_k < n1_k \forall n \in \mathbb{N} \xRightarrow[\text{Vielfache}]{\text{Satz 5.5}} (-n)1_K = -(n1_k) < 0_K \Rightarrow n1_K \neq 0_K \forall n \in \mathbb{Z}_{\neq 0} \Rightarrow f$ auf $\mathbb{Q}$ definiert

b) Sei $f(\frac{m}{m'}) = f(\frac{n}{n'}) \Rightarrow \frac{m1_K}{m'1_K} = \frac{n1_K}{n'1_K} \Rightarrow (m1_K)(n'1_K) = (n1_K)(m'1_K)$
$\Rightarrow (mn')1_K = (nm')1_K \Rightarrow (mn' - m'n)1_K = 0_K \overset{a)}{\Rightarrow} mn' = m'n =_{\mathbb{Z}} 0 \Rightarrow \frac{m}{m'} =_{\mathbb{Q}} \frac{n}{n'} \Rightarrow f$ injektiv

c) $f(\frac{m}{m'} + \frac{n}{n'}) = f(\frac{mn'+m'n}{m'n'}) = \frac{mn'+m'n}{m'n'} \frac{1_K}{1_K} \overset{b)}{=} \frac{m1_K}{m'1_K} + \frac{n1_K}{n'1_K} \overset{f \text{ inj}}{=} f(\frac{m}{m'}) + f(\frac{n}{n'})$
Multi., spezielle Elemente SeSt, Ordnung ÜA □

Folgerung 5.7
Es gilt im angeordneten Körper:

1) $\mathbb{Q}_K = f(\mathbb{Q})$ ist mit Addition, Multiplikation und Ordnung von K selbst angeordneter Körper
2) $\mathbb{Q}_K$ ist isomorph zu $\mathbb{Q}$ bzgl. Körperstruktur und Ordnung.

Beweis. 1) $\mathbb{Q}_K \subset K$ und Addition und Multi. führen nicht aus $\mathbb{Q}_K$ (vgl. Satz 5.6) $\Rightarrow \mathbb{Q}_K$ selbst Körper mit Ordnung von $K \Rightarrow$ Behauptung

2) nach Satz 5.6 is f entsprechender Isomorphismus □

Anmerkung
$\mathbb{Q}_K \subset K$ und $\mathbb{Q}$ sind strukturell gleich $\Rightarrow$ können identifiziert werden.
Analog $\mathbb{N}_K \subset \mathbb{Z}_K \subset K$, identifiziere: $n_K := n \cdot 1_K$ mit $n \in \mathbb{N}$ bzw. $n \in \mathbb{Z} \to$ Schreibe kurz (im angeordneten Körper K) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset K$
$\to$ Vielfachheit $ma = (1_K a + \cdots + I_K a) = (1_K + \cdots + 1_K)a = (m1_K) \cdot a = m_K \cdot a$
angeordneter Körper K heißt archimedisch falls:

$$\forall a \in K \exists n \in \mathbb{N} \subset K \quad a < n$$

Definition
Angeordneter Körper heißt <u>archimedisch</u> , falls $\forall a \in K\, \exists n \in \mathbb{N} \subset K : a < n$.

Satz 5.8
Sei K archimedisch angeordneter Körper. Dann

1) $\forall a, b \in K$ mit $a, b > 0\, \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot a > b$
2) $\forall a \in K\, \exists!\, [a] \in \mathbb{Z} : [a] \leq a \leq [a] + 1$, $[a]$heißt <u>ganzer Anteil</u> von a
3) $\forall \varepsilon \in K$ mit $\varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N}_{\neq 0} : \frac{1}{n} < \varepsilon$ (beachte: $0 < \frac{1}{n}$)
4) $\forall a, b \in K$ mit $a > 1\, \exists n \in \mathbb{N} : a^n > b$
5) $\forall a, \varepsilon > 0\, \exists p, q \in \mathbb{Q} : p \leq aq$ und $q - p < \varepsilon$

   (d.h. $a \in K$ kann auch rationale Zahlen beliebig genau approximiert werden, $\mathbb{Q}$ „dicht“ in K)
6) $\forall a, b \in K, a < b\, \exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$.

Beweis. 1) $a > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} \in K \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$: $n > \frac{b}{a} \overset{\cdot a}{\Rightarrow}$ Behauptung

2) es ist $N := \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 < n\} \neq \emptyset$:
N hat <u>kleinstes Element</u> $\tilde{n} \in N$ (d.h. $\tilde{n} \leq n \forall n \in \mathbb{N}$) vgl. ÜA
Setze $[a] := \tilde{n} - 1 \xRightarrow{\text{Def } \tilde{n}} [a] = \tilde{n} - 1 \leq a < \tilde{n} = [a] + 1$ falls *alpha* ganzer Anteil mit $\alpha < [a] \Rightarrow [a] \leq a <$

$\alpha + 1 \xRightarrow{-\alpha} 0 < \underbrace{[a] - \alpha}_{\in \mathbb{N}} < \alpha \Rightarrow ` \xRightarrow{\text{oBdA}} [a]$ eindeutig

3) Wähle $n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$ Behauptung

4) $\exists n \in \mathbb{N} b \overset{1)}{<} n(a-1) < 1 + n(a-1) \overset{\text{Bernoulli-Ungl.}}{\leq} (1 + (a-1))^n = a^n$

5) Verwende 4) mit $\tilde{a} := \frac{1}{a}, \tilde{b} := \frac{1}{\varepsilon}$

6) nach 3) $\exists n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon, p := \frac{[na]}{n}, q := \frac{}{den}$ □

Definition (Intervall)

Intervall für angeordneten Körper K: Sei $a, b \in K$:

- beschränktes Intervall
  - $[a, b] := \{x \in K | a \leq x \leq b\}$ abgeschlossen
  - $(a, b) := \{a < x < b\}$ offen
  - $[a, b) := \{a \leq x < b\}, (a, b] := \{a < x \leq b\}$ halboffen
- unbeschränktes Intervall
  - $[a, \infty] := \{x \in K \mid a \leq x\}$
  - $(a, \infty) := \{x \in K \mid a > x\}$
  - $(-\infty, b] := \{x \in K \mid x < a\}$
  - $(-\infty, b) := \{x \in K \mid x \leq b\}$

Definition (Folge)

Eine Folge in Menge M ist eine Abbildung $\alpha : \mathbb{N} \to M$ (evtl. $\alpha : \mathbb{N}_{\geq n} \to M$), $\alpha_n := \alpha(n)$ heißen Folgenglieder , und Folgenindex .

Notation: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\alpha_n\}_{k=1}^{\infty}$ bzw. $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$
kurz: $\{\alpha_n\}_n, \{\alpha_n\}$

Hinweis: $\{x\}_n$ ist konstante Folge , d.h. $\alpha_n = \alpha \, \forall n$

Aussage gilt für fast alle (fa.) $n \in \mathbb{N}$, wenn höchstens für endlich viele n falsch.

Definition (Intervallschachtelung)

Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} =: \mathcal{X}$ von abgeschlossenen Intervallen $X_n = [x_n, x_n'] \subset K$ $(x_n, x_n' \in K)$ heißt Intervallschachtelung (im angeordneten Körper K), falls

a) $X_n \neq \emptyset$ und $X_{n+1} \subset X_n \, \forall n \in \mathbb{N}$

b) $\forall \varepsilon > 0$ in K existiert $n \in \mathbb{N} : l(X_n) := x_n' - x_n < \varepsilon$, mit l Intervalllänge

Lemma 5.9

Sei $\mathcal{X} = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Intervallschachtelung im angeordneten Körper K
$\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$ enthält höchstens ein Element.

Definition

Archimedisch angeordneter Körper heißt vollständig , falls $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$ für jede Intervallschachtelung $\mathcal{X} = \{x_n\}$ in K.

Definition
$Q := \{(\{x_n\}, \{y_n\}) \in I_\mathbb{Q} \times I_\mathbb{Q}\}$ ist Relation auf $I_\mathbb{Q}$, $I_\mathbb{Q}$:= Menge aller Intervallschachtelungen $\mathcal{X} = \{x_n\} \in \mathbb{Q}$.

Satz 5.10
Q ist Äquivalenzrelation auf $I_\mathbb{Q}$.

Definition
setze $\mathbb{R} := \{[\mathcal{X}] \mid \mathcal{X} \in I_\mathbb{Q}\}$ Menge der reellen Zahlen .

- $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \neq 0 \to [\mathcal{X}]$ ist „neue“ sog. irrationale Zahl

5.1. Rechenoperationen

Definition
Für Intervalle $X = [x, x'], Y = [y, y']$ in $\mathbb{Q}$ defineren wir Intervall in $\mathbb{Q}$:

- $X + Y := \{\xi + \eta \mid \xi \in X, \eta \in Y\} = [x + y, x' + y']$
- $X \cdot Y := \{\xi \cdot \eta \mid \xi \in X, \eta \in Y\} = [\tilde{x}\tilde{y}, \tilde{x}'\tilde{y}']$, wobei $\tilde{x}, \tilde{x}' \in \{x, x'\}, \tilde{y}, \tilde{y}' \in \{y, y'\}$
- $-X := [-x, -x']$, $X^{-1} := [\frac{1}{x'}, \frac{1}{x}]$ falls $0 \in X$

Für relle Zahl $[\mathcal{X}] = [\{x_n\}], [\mathcal{Y}] = [\{y_n\}]$ sei

- $[\mathcal{X}] + \mathcal{Y} := [\{x_n + y_n\}]$
- $[\mathcal{X}] \cdot [\mathcal{Y}] := [\{x_n \cdot y_n\}]$
- $-[\mathcal{X}] := [\{-x_n\}]$

  $[\mathcal{X}]^{-1} := [\{x_n^{-1}\}]$ falls $[\mathcal{X}] \neq 0_\mathbb{R}$

Satz 5.11
1) Addition, Multiplikation und Inverse sind in $\mathbb{R}$ eindeutig definiert
2) $\mathbb{R}$ ist damit und neutralen Elementen ein Körper.

5.2. Ordnung auf $\mathbb{R}$

Definition
Betr. Relation „$\leq$“: $R := \{([\{x_n\}], [\{y_n\}]) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x_n \leq y_n \, \forall n \in \mathbb{N}\}$

Satz 5.12
$\mathbb{R}$ ist mit „$\leq$“ angeordneter Körper.

Satz 5.13
$\mathbb{R}$ ist archimedisch angeordneter Körper.

Theorem 5.14
$\mathbb{R}$ ist vollständiger, archimedisch angeordneter Körper.

Theorem 5.15
Sei K vollständiger, archimedisch angeordneter Körper
$\Rightarrow K$ ist isomorph zu $\mathbb{R}$ bzgl. Körperstruktur und Ordnung.

Definition
Sei $M \subset K$, K angeordneter Körper.

- $s \in K$ ist obere / untere Schranke von M, falls $x \leq s (x \geq s) \, \forall x \in M$

  M ist nach oben / unten beschränkt, falls obere (untere) Schranke existiert.
- M beschränkt , falls M nach oben und unten beschränkt.
- kleinste obere (größte untere) Schranke $\tilde{s}$ von M ist Supremum (Infimum) von M, d.h. $\sup M := \tilde{s} \leq s (\inf M = s \geq \tilde{s})$ obere (untere) Schranken $s \in M$.
- Falls $\sup M \in M (\inf M \in M)$ nennt man dies auch Maximum (Minimum) von M.

  kurz: $\max M = \sup M (\min M = \inf M)$
- falls M nach oben (unten) unbeschränkt , d.h. nicht beschränkt, schreibt man auch $\sup M = \infty (\inf M = -\infty)$

Man hat

$$\begin{aligned} \sup M &= \min\{s \mid s \text{ obere Schranke von } M\} \\ \inf M &= \max\{s \mid s \text{ untere Schranke von } M\} \end{aligned}$$

Satz 5.17
Sei K angeordneter Körper, $M \subset K$. Falls $\sup M$ $(\inf M)$ existiert, dann

1) $\sup M$ $(\inf M)$ eindeutig
2) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists y \in M : \sup M < y + \varepsilon$ $(\inf M > y - \varepsilon)$

Theorem 5.18
Sei K archimedisch angeordneter Körper. Dann

$$K \text{ vollständig } \Leftrightarrow \sup M / \inf M \text{ ex. } \forall M \in K, M \neq \emptyset \text{ nach oben /unten beschränkt}$$

5.3. Anwendung: Wurzeln, Potenzen, Logarithmen in $\mathbb{R}$

Satz 5.19 (Wurzeln)
Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}, k \in \mathbb{N}_{>0} \Rightarrow \exists! x \in \mathbb{R}_{>0} : x^k = a$, $\sqrt[k]{a} := a^{\frac{1}{k}} = x$ heißt k-te Wurzel von a.

Definition (Potenz)
n-te Potenz von $a \in \mathbb{R}_{>0}, r \in \mathbb{R}$:

Zunächst $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ (oBdA) $n \in \mathbb{N}_{>0}$): $a^{\frac{m}{n}} := (a^m)^{\frac{1}{n}}$ Allgemein für $a \geq 0, a >$: $a^r := \sup\{a^q \mid 0 \leq q \leq r, q \in \mathbb{Q}\}$ offenbar eindeutig definiert und allgemeine Definition konsistent mit Definition für $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Damit: Exponentialfunktion

Satz 5.20
Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}, r, s \in \mathbb{R}$. Dann

1) $a^r b^r = (ab)^r, (a^r)^s = a^{rs}, a^r a^s = a^{r+s}$
2) f. $r > 0 : a < b \Leftrightarrow a^r < b^r$
3) für $a > 1 : r < s \Leftrightarrow a^r < a^s$

Definition (Logarithmus)
Sei $a, b \in \mathbb{R}_{<0}, a \neq 1$: Logarithmus von b zur Basis a ist

$$\log_a b := \begin{cases} \sup\{r \in \mathbb{R} \mid a^r \leq b\} & a > 1 \\ \sup\{r \in \mathbb{R} \mid a^r \geq b\} & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Satz 5.21
Se $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}, a \neq 1$. Dann

1) $log_a b$ ist eindeutige Lösung von $a^x = b$, d.h. $a^{log_a b} = b$
2) $\log_a a = 1, log_a 1 = 0$
3) $\log_a b^\gamma = \gamma \log_a b \forall \gamma \in \mathbb{R}$
4) $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c, \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
5) $\log_a b = \frac{\log_\alpha b}{\log_\alpha a} \forall \alpha \in \mathbb{R}_{>0}, \alpha \neq 1$

5.4. Mächtigkeit von Mengen

Definition
M endlich , falls M endlich viele Elemente hat, sonst unendlich .

Unendliches M ist abzählbar , falls bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ existiert, sonst ist M überabzählbar .

Satz 5.22
Es gilt:

1) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ abzählbar
2) M abzählbar, $n \in \mathbb{N}_{>0} \Rightarrow M^n$ abzählbar ($\Rightarrow \mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}^n$ abzählbar)
3) Ein offenes Intervall $I \in \mathbb{R} \neq \emptyset$ ist überabzählbar
4) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

6. Komplexe Zahlen (kurzer Überblick)

Frage: Hat $x^2 = -1$ eine Lösung in $\mathbb{R}$?
Antwort: keine Lösung $\Rightarrow$ Körpererweiterung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Definition (komplexe Zahlen)
betrachte Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ mit Addition und Multiplikation:

- $(x, x^{'}) + (y, y^{'}) = (x + y, x^{'} + y^{'})$
- $(x, x^{'}) \cdot (y, y^{'}) = (xy - x^{'}y^{'}, xy^{'} + x^{'}y)$

$\mathbb{C}$ ist ein Körper mit (vgl. lin Algebra):
$0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$, $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$, $-(x, y) = (-x, -y)$ and $(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$
mit imaginärer Einheit $\iota = (0, 1)$
$z = x + \iota y$ statt $z = (x, y)$ mit $x := \mathrm{Re}(z)$ Realteil von z, $y := \mathrm{Im}(z)$ Imaginärteil von z
komplexe Zahl $z = x + \iota y$ wird mit reeller Zahl $x \in \mathbb{R}$ identifiziert
offenbar $\iota^2 = (-1, 0) = -1$, d.h. $z = \iota \in \mathbb{C}$ und löst die Gleichung $z^2 = -1$ (nicht eindeutig, auch $(-\iota)^2 = -1$)
Betrag $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ (ist Betrag/Länge des Vektors (x, y))

Satz 6.1
Es gilt:

a) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \mathrm{Im}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2\iota}$
b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
c) $|z| = 0 \iff z = 0$
d) $|\overline{z}| = |z|$
e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
f) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecks-Ungleichung: Mikoswski-Ungleichung)

Beweis. SeSt ■

Kapitel III

Metrische Räume und Konvergenz

8. Grundlegende Ungleichungen

Satz 8.1 (geoemtrisches / arithemtisches Mittel)
Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}_{\text{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}}_{\text{arithmetisches Mittel}}$$

Beweis. Zeige zunächst mit vollständiger Induktion

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n, \text{ mit } x_1 = \cdots = x_n \tag{1}$$

- (IA) $n = 1$ klar
- (IS) (1) gelte für n, zeige (1) für $n+1$ d.h. $\prod_{i=1}^{n+1} = 1$, falls alle $x_i = 1 \Rightarrow$ Behauptung. Sonst oBdA $x_n < 1$, $x_{n+1} > 1:$
  mit $y_n := x_n x_{n+1}$ gilt $x_1 \cdot \cdots \cdot x_{n-1} \cdot y_n = 1$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x_1 + \cdots + x_{n+1} &= \underbrace{x_1 + \cdots + x_{n-1}}_{\geq \text{ (IV)}} + y_n - y_n + x_n + x_{n+1} \\ &\geq n + \underbrace{(x_{n+1} - 1)}_{>n} \underbrace{(1 - x_n)}_{>n} \\ &\Rightarrow (1) \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

allgemein sei nun $g := \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{g} = 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{g} \geq n \Rightarrow \text{ Behauptung}$$

Aussage über Gleichheit nach nochmaliger Durchsicht.

□

Satz 8.2 (allgemeine Bernoulli-Ungleichung)
Seien $\alpha, x \in \mathbb{R}$. Dann

1) $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \, \forall x \geq -1, \alpha > 1$
2) $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \, \forall x \geq -1, 0 < \alpha < 1$

Beweis. 2) Sei $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_{<1}$, d.h. $m \leq n$

$$\Rightarrow (1+x)^{\frac{m}{n}} \overset{Definition}{=} \sqrt[n]{(1+x)^m \cdot 1^{n-m}}$$
$$\leq \frac{m(1+x)+(n-m)\cdot 1}{n}$$
$$= \frac{n+mx}{n} = 1 + \frac{m}{n}x, \text{ für } \alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \text{ Behauptung}$$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ angenommen $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$ ($x \neq 0$ sonst klar!)

$$\overset{\text{Satz 5.8}}{\Rightarrow} \exists \in \mathbb{Q}_{<1} \begin{cases} x > 0 & \alpha < q < \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \\ x < 0 & \alpha < q \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 + qx < (1+x)^\alpha \leq (1+x)^q \overset{\text{Satz 5.20}}{\Rightarrow} \text{↯} \Rightarrow \text{ Behauptung}$$

1) Sei $1 + \alpha x \geq 0$, sonst klar

$$\Rightarrow \alpha x \geq -1 \overset{2)}{\Rightarrow} (1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$\geq 1 + \frac{1}{\alpha}\alpha x = 1 + x$$
$$\Rightarrow \text{ Behauptung und Gleichheit ist Selbststudium.}$$

□

Satz 8.3 (Young'sche Ungleichung)
Seien $p, q \in \mathbb{R}, p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
$\Rightarrow a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \, \forall a, b \geq 0$

<u>Spezialfall:</u> $p = q = 2 : ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \, \forall a, b \in \mathbb{R}$

Beweis.

Sei $a, b > 0$ (sonst klar!)

$$\Rightarrow \left(\frac{b^q}{a^p}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(1 + \left(\frac{b^q}{a^p} - 1\right)\right)^{\frac{p}{q}}$$
$$\overset{\text{Bernoulli}}{\leq} 1 + \frac{1}{q}\left(\frac{b^q}{a^p} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{q}\frac{b^q}{a^p} - \frac{1}{q}$$
$$\overset{\cdot a^p}{\Rightarrow} a^p \frac{b}{a}^{\frac{p}{q}} = a^{p(1-\frac{1}{q})} b = ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

□

Satz 8.4 (Hölder'sche Ungleichung)
Sei $p, q \in \mathbb{R}, p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Beweis. Faktoren rechts seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ d.h.

$$\mathcal{X}^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{p}}, \mathcal{Y}^p = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^{\frac{1}{q}}, \text{ falls } \mathcal{X} = 0$$
$$\Rightarrow x_i = 0 \,\forall i \Rightarrow \text{ Behauptung, analog für } \mathcal{Y} = 0$$

Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y} > 0$

$$\overset{\text{Young}}{\Rightarrow} \frac{|x_i y_i|}{\mathcal{X}\mathcal{Y}} \leq \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\mathcal{X}^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\mathcal{Y}^p} \forall i$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\mathcal{X}\mathcal{Y}} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \frac{1}{p}\frac{\mathcal{X}^p}{\mathcal{X}^p} + \frac{1}{q}\frac{\mathcal{Y}^p}{\mathcal{Y}^p} = 1 \Rightarrow \text{ Behauptung}$$

□

▶ Bemerkung 8.5

- Ungleichung gilt auch für $x_i, y_i \in \mathbb{C}$ (nur Beträge gehen ein)
- für $p = q = 2$ heißt Ungleichung Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Gleichheit gdw. $\exists x \in \mathbb{R} x_i = \alpha y_i$ oder $y_i = \alpha x_i \;\forall i$)

Satz 8.6 (Minkowski-Ungleichung)
Sei $p \in \mathbb{R}, p > 1$
$\Rightarrow \big(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} \leq \big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} + \big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} \forall x, y \in \mathbb{R}$

Beweis. $p = 1$ Beh. folgt aus Δ-Ungleichung $|x_i + y_i| \overset{\text{Satz 5.5}}{\leq} |x_i| + |y_i| \forall i$
$p > 1$ sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$, $z_i := |x_i + y_i|^{p-1} \forall i$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^{p\cdot q} &= \sum_{i=1}^{n} |z_i|^q \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \cdot |z_i|^q \\
&\overset{\Delta\text{-Ungleichung}}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i \cdot z_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i \cdot z_i| \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \big(\mathcal{X} + \mathcal{Y}\big)\big(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^q\big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \big(\mathcal{X} + \mathcal{Y}\big)\mathcal{S}^{\frac{p}{q}} \\
&\Rightarrow S \leq \mathcal{X} + \mathcal{Y} \Rightarrow \text{ Behauptung}
\end{aligned}$$

□

▶ Bemerkung 8.7

- Ungleichung gilt auch für $x_i, y_i \in \mathbb{C}$
- ist Δ-Ungleichung für p-Normen

9. Metrische Räume

Definition (Metrik)
Sei X Menge, Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Metrik auf X, falls $\forall x, y, z \in X$:

a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

b) $d(x, y) = d(y, x)$ Symmetrie

c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ Dreiecksungleichung

(X, d) heißt metrischer Raum .

■ **Beispiel 9.2**
Diskrete Metrik auf bel. Menge X ist

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

ist offenbar Metrik.

■ **Beispiel 9.3**
Sei (X, d) metrischer Raum, $Y \subset X$
$\Rightarrow (Y, \tilde{d})$ ist metrischer Raum mit induzierte Metrik $\tilde{d}(x, y) := d(x, y)\, \forall x, y \in X$.

Definition (Norm)
Sei X Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$.

Abbildung $\|.\|$: $X \to \mathbb{R}$ heißt Norm auf X, falls $\forall x, y \in X$

a) $\|x\| = 0$ gdw. $x = 0$

b) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|\, \forall \lambda \in K$ (Homogenität)

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungleichung

$(X, \|.\|)$ heißt normierter Raum

Definition (Halbnorm)
$\|.\| : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Halbnorm , falls nur b) und c) gelten.

Folgerung 9.4

- $\|x\| \geq 0$
- $|\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x - y\|$

Satz 9.5
Sei $(X, \|.\|)$ normierter Raum.
$\Rightarrow X$ ist metrischer Raum mit Metrik $d(x, y) := \|x - y\|\, \forall x, y \in X$.

■ **Beispiel 9.6**
Man hat u.a. folgende Normen auf $\mathbb{R}^n$:

p-Norm $|x|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $(1 \leq p < \infty)$

Maximum-Norm $|x|_\infty := \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}$

Standardnorm im $\mathbb{R}^n : |\cdot| := |\cdot|_{p=2}$ heißt euklidische Norm

Definition (Skalarprodukt)
$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ heißt Skalarprodukt (inneres Produkt) von $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Offenbar ist $\langle x, x\rangle = |x|^2 \, \forall x \in \mathbb{R}^n$ (ausschließlich für Euklidische Norm)
Man hat $|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y| \, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (CAUCHY-SCHWARZ'sche Ungleichung)

Beispiel 9.7
$X = \mathbb{C}^n$ ist Vektorraum über $\mathbb{C}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, x_i \in \mathbb{C}$.

Analog zu 2.6 sind $|\cdot|_p$ und $|\cdot|_\infty$ Normen auf $\mathbb{C}^n$

$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i \, \forall x, y \in \mathbb{C}$ heißt Skalarprodukt von $x, y \in \mathbb{C}^n$.

$x, y \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ heißen orthogonal , falls $\langle x, y\rangle = 0$.

Beispiel 9.8
Sei M beliebige Menge, $f : M \to \mathbb{R}$.

- $\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in M\}$ Supremumsnorm
- $B(M) := \{f : M \to \mathbb{R} \mid \ \|f\| < \infty\}$ Menge der beschränkten Funktionen

Beispiel 9.9
$\|x\| := |x_1|$ ist Halbnorm auf $X = \mathbb{R}^n$, da $\|(0, 1)\| = 0$, aber $(0, 1) \neq 0$

Definition
Normen $\|.\|_1, \|.\|_2$ auf X heißen äquivalent , falls $\exists \alpha, \beta > 0 : \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1 \, \forall x \in X$

Beispiel 9.10
$|x|_\infty \leq |x|_p \leq \sqrt[p]{n} \cdot |x|_\infty$, d.h. $|\cdot|_\infty$ und $|\cdot|_p$ sind äquivalent für alle $p \geq 1$

Beweis. $|x|_\infty = (\max\{|x_1|, ...\}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |x|_p \leq (n \cdot \max\{|x_1|, ...\}^p)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{n} \cdot |x|_\infty$ □

Folgerung 9.11
$|\cdot|_p, |\cdot|_q$ sind äquivalent auf $\mathbb{R}^n \, \forall p, q \geq 1$.

Definition

- $B_r(a) := \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$ heißt (offene) Kugel um a mit Radius $r > 0$
- $B_r[a] := \bar{B}_r(a) := \{x \in X \mid d(a,x) \leq r\}$ heißt (abgeschlossene) Kugel um a mit Radius $r > 0$

Hinweis: muss keine „übliche" Kugel sein, zum Beispiel $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(0,x) = \|x\|_\infty < 1\}$ hat die Form eines „üblichen" Quadrats.

- Menge $M \subset X$ heißt offen , falls $\forall x \in M \, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset M$
- Menge $M \subset X$ ist abgeschlossen , falls $X \setminus M$ offen
- $U \subset X$ Umgebung von M, falls $\exists V \subset X$ offen mit $M \subset V \subset U$
- $x \in M$ innerer Punkt , von M, falls $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset M$
- $x \in X \setminus M$ äußerer Punkt von M, falls $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset X \setminus M$
- $x \in X$ heißt Randpunkt , von M, wenn x weder innerer noch äußerer Punkt
- $\text{int}M :=$ Menge aller inneren Punkte von M, heißt Inneres von M
- $\text{ext}M :=$ Menge aller äußeren Punkte von M, heißt Äußeres von M.
- $\partial M :=$ Menge der Randpunkte von M, heißt Rand von M
- cl$:= \overline{M} = \text{int}\, M \cup \partial M$ heißt Abschluss von M
- $M \subset X$ heißt beschränkt , falls $\exists a \in X, r > 0 : M \subset B_r(a)$
- $x \in X$ heißt Häufungspunkt (HP) von M, falls $\forall \varepsilon > 0$ enthält $B_\varepsilon(x)$ unendlich viele Elemente aus M
- $x \in M$ heißt isolierter Punkt von M, falls x kein Häufungspunkt

Beispiel 9.12

1. $X = \mathbb{R}$ mit $d(x,y) = |x - y|$
   - (a,b) offen, $[a,b]$ abgeschlossen
   - $[a,b)$ halboffen, aber beschränkt
   - $\text{int}(a,b) = \text{int}[a,b] = (a,b)$
   - $\text{ext}(a,b) = \text{ext}[a,b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$
   - $\partial(a,b) = \partial[a,b] = \{a,b\}$
   - $\text{cl}(a,b) = \text{cl}[a,b] = [a,b]$
   - $\mathbb{Q}$ weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$, $\text{int}\,\mathbb{Q} = \emptyset$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$
   - $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ offen, $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossen und nicht beschränkt
   - $[0,3]$ ist Umgebung von $[1,2]$, $B_r(a)$ ist Umgebung von a
   - a ist HP von (a,b) und $[a,b]$, wenn $a < b$, aber nicht von $[a,a]$
   - alle $a \in \mathbb{R}$ sind HP von $\mathbb{Q}$

2. für $X = \mathbb{R}$ mit diskreter Metrik: $x \in M \Rightarrow B_{0,5}(x) = \{x\}$
   $\Rightarrow$ alle $M \subset \mathbb{R}$ sind offen und abgeschlossen

Lemma 9.13
Sei (X, d) metrischer Raum. Dann

1) $B_r(a)$ offene Menge $\forall r > 0, a \in X$

2) $M \subset X$ beschränkt $\Rightarrow$ $\forall a \in X\, \exists r > 0 : M \subset B_r(a)$

Beweis. 1) Sei $b \in B_r(a), \varepsilon := r - a - d(a,b) > 0$, dann gilt für beliebige $x \in B_\varepsilon(b)$

$$\begin{aligned} d(a,x) &\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(a,b) + d(b,x) \\ &< d(a,b) + r - d(a,b) \\ &= r \Rightarrow B_\varepsilon(b) \subset B_\varepsilon(a) \Rightarrow \text{ Behauptung} \end{aligned}$$

2) Sei $M \subset B_\rho(b), a \in X$ beliebig, $r := \rho + d(a,b), m \in M$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(m,a) &\leq d(m,b) + d(b,a) \\ &< \rho + d(b,a) = r \Rightarrow m \in B_r(a) \end{aligned}$$ □

Satz 9.14
Sei (X, d) metrischer Raum, $\tau := \{U \subset X \mid U \text{ offen}\}$. Dann

1) $X, \emptyset \in \tau$ offen

2) $\bigcap_{i=1}^n U_i \subset \tau$ falls $U_i \in \tau$ für $i = 1, \ldots, n$

3) $\bigcup_{U \in \tau'} U \in \tau$ falls $\tau' \in \tau$

Beweis. 1) X offen, da stets $B_\varepsilon(x) \subset X$, Definition "offen" wahr für $\emptyset$

2) Sei $X \in \bigcap_{i=0}^n U_i \Rightarrow \exists \varepsilon_i > 0\colon B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i \forall i, \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n\}$
$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \in \bigcap_{i=0}^n U_i \Rightarrow$ Behauptung

3) Sei $x \in \bigcup_{U \in \tau'} U \Rightarrow \exists \tilde{U} \in \tau'\colon x \in \tilde{U} \overset{\tilde{U} \text{ offen}}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \subset \tilde{U} \in \bigcup_{U \in \tau'} U \Rightarrow$ Behauptung. □

<u>Hinweis:</u> Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen im Allgemeinen nicht offen

■ Beispiel 9.15
$\bigcap(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) = [0, 1]$

Folgerung 9.16
Sei (X, d) metrischer Raum, $\sigma := \{V \subset X \mid V \text{ abgeschlossen}\}$. Dann

1) $X, \emptyset \in \sigma$ abgeschlossen

2) $\bigcup_{i=1}^n V_i \subset \sigma$ falls $V_i \in \sigma_i$ für $i = 1, \ldots, n$

3) $\bigcap_{V \in \sigma'} V \in \sigma$ falls $\sigma' \subset \sigma$

Definition (Topologie)
Sei X Menge, und τ Menge von Teilmengen von X, d.h. $\tau \subset \mathcal{P}(X)$.
τ ist Topologie und (X, τ) topologischer Raum , falls 1),2),3) aus 2.14 gelten.
Mengen $U \subset \tau$ heißen dann (per Definition) offene Mengen, folglich in metrischen Räumen definierte offene Mengen sind ein Spezialfall einer Topologie.

beachte: $\tilde{\tau} = \{\emptyset, X\}$ ist stets Topologie für beliebige Menge X

Satz 9.17
Seien $\|.\|_1, \|.\|_2$ äquivalente Normen in X und $U \subset X$. Dann

$$U \text{ offen bezüglich } \|.\|_1 \Leftrightarrow U \text{ offen bzgl. } \|.\|_2$$

Beweis. Übungsaufgabe □

Satz 9.18
Sei (X, d) metrischer Raum und $M \subset X$: Dann

1) $\operatorname{int} M, \operatorname{ext} M$ offen
2) $\partial M, \operatorname{cl} M$ abgeschlossen
3) $M = \operatorname{int} M$, falls M offen, $M = \operatorname{cl} M$ falls M abgeschlossen

Beweis. 1) Seien $x \in \operatorname{int} M$, d.h. innere Punkte von $M \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x) \subset M$, da $B_\varepsilon(x)$ offene Menge, ist jedes $y \in B_\varepsilon(x)$ eine Teilemenge von $\operatorname{int} M \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset M \Rightarrow$ Behauptung ($\operatorname{ext} M$ analog)

2) $\partial X \setminus (\operatorname{int} M \cup \operatorname{ext} M)$ ist abgeschlossen, $\operatorname{cl} M = X \setminus \operatorname{ext} M$ abgeschlossen

3) M offen: es ist stets $\int M$ und da M offen $M \subset \operatorname{int} M \Rightarrow$ Behauptung $\Rightarrow X \setminus M = \operatorname{int}(X \setminus M) = \operatorname{ext} M = X \setminus \operatorname{cl} M \Rightarrow$ Behauptung. (M abgeschlossen analog) □

10. Konvergenz

Definition (konvergent)
Sei (X,d) metrischer Raum. Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X, (d.h. $x_n \in X \, \forall n$) heißt konvergent , falls $x \in X$ existiert mit

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

x heißt dann Grenzwert (auch Limes) der Folge.

Notation: $x = \lim_{n\to\infty}$, $x_n \to x$ für $n \to \infty$, $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

Folge heißt divergent , falls nicht konvergent.

Folgerung 10.1
Für Folge $\{x_n\}$ gilt:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \ \Leftrightarrow \text{Jede Kugel } B_\varepsilon(x) \text{ enthält fast alle } x_n$$

■ **Beispiel 10.2**

- konstante Folge: Sei $\{x_n\}_n = \{x\}_n \in \mathbb{N}$, d.h. $x = x_n$
- $X = \mathbb{R}$: Folge $\{\frac{1}{n}\}$ konvergent, Grenzwert 0
- $X = \mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$
- $X = \mathbb{R}$: $\{-1\}^n$ ist divergent

Satz 10.3 (Eindeutigkeit des Grenzwertes)
Sei (X,d) metr. Raum, $\{x_n\}$ Folge in X. Dann

$$x, x' \text{ Grenzwert von } \{x_n\} \ \Rightarrow \ x = x'$$

Beweis. Sei $\varepsilon := \frac{1}{3}$, $d(x,x') > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : d(x_m, x) < \varepsilon$, $d(x_m, x') < \varepsilon$
$3\varepsilon = d(x,x') \leq d(x_m,x) + d(x_m,x') < 2\varepsilon \Rightarrow$ ` $\Rightarrow d(x,x') = 0$ □

Satz 10.4
Sei (X,d) metrischer Raum, $\{x_n\}$ konvergente Folge in X
$\Rightarrow \{x_n\}$ ist beschränkt.

Beweis. Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow$ für $\varepsilon = 1 \exists n_0 : d(x_n,x) < 1$ mit $r = \max\{d(x,x_n)\} + 1$ folgt: $x_n \in B_r(x) \Rightarrow$ beschränkt □

■ **Beispiel 10.5**
$X = \mathbb{R}$ mit diskreter Metrik: betrachte $\{x_n\}$
angenommen $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow$ für $\varepsilon = \frac{1}{2} \exists n_0 : x_n \in B_{0,5}(x) = \{x\}$
$\Rightarrow$ fast alle x_n sind gleich x bei Konvergenz $\Rightarrow \left\{\frac{1}{n}\right\}$ ist divergent $\Rightarrow$ Konvergenz ist abhängig von Metrik

Beispiel 10.6

$X = \mathbb{C}$ mit $|\cdot|$. betrachte $\{z^n\}$ für $z \in \mathbb{C}$

- $|z| < 1$: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : |z^n - n_0| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$
- $|z| > 1$: $\forall r > 0 \exists n_0 : |z^{n_0} - 0| = |z|^{n_0} > r \Rightarrow$ es gibt also kein $r > 0 \Rightarrow \{z^n\}$ ist nicht beschränkt $\Rightarrow$ divergent
- $z = 1$ offenbar $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$
- $|z| = 1$, aber $z \neq 1$: angenommen $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = \tilde{z} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}|z-1| \Rightarrow |z - \tilde{z}| < \varepsilon \Rightarrow 2\varepsilon = |z-1| = |z^{n_0}| \cdot |z-1| = |z^{n_0} + 1 - \tilde{z} + \tilde{z} - z^{n_0}| \leq |z^{n_0} + 1 - \tilde{z}| + |\tilde{z} - z^{n_0}| < 2\varepsilon \Rightarrow$ ` $\Rightarrow \{z^n\}$ divergent

Beispiel 10.7

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, denn:

$$\begin{aligned} x_n &:= \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0 \\ n = (1 + x_n)^n &\geq 1 + \binom{n}{2} \cdot x_n^2 \\ n - 1 &\geq n\frac{n-1}{2x_n^2} \\ x_n = \sqrt[n]{n} - 1 &\leq \sqrt{\frac{2}{n}} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Beispiel 10.8

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ für $a > 1$, denn

$1 < \sqrt[n]{n} < a^\varepsilon \Rightarrow 0 < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$

Definition (Teilfolge, Häufungswert)

Sei $\{x_n\}$ beliebige Folge in X, $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{N}$ mit $n_{k+1} > n_k \, \forall k \in \mathbb{N}$. Dann heißt $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge (TF) von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$\gamma \in X$ heißt Häufungswert (Hw) (auch Häufungspunkt) der Folge $\{x_n\}$, falls $\forall \varepsilon > 0$ enthält $B_\varepsilon(\gamma)$ unendlich viele x_n.

beachte: HP der Folge muss nicht HP der Menge $\{x_n\}$ sein, z.B. konstante Folge

Satz 10.9

Sei $\{x_n\}$ Folge im metrischen Raum (X, d). Dann

1) $x_n \to x \;\Rightarrow\; x_{n_k} \xrightarrow{n\to\infty} x$ für jede TF $\{x_{n_k}\}_k$
2) γ ist Hw der Folge $\{x_n\} \Leftrightarrow \exists$TF $\{x_{n_k}\} : x_{n_k} \xrightarrow{n\to\infty} \gamma$
3) Teilfolgenprinzip : Jede TF $\{x_{k'}\}$ von $\{x_n\}$ hat TF $\{x_{k''}\}$ mit $x_{n''} \to x \Rightarrow x_n \to x$

Beweis. 1. folgt aus Definition

2. $(\Rightarrow) : \exists n_k : x_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(x), n_{k+1} > n_k \Rightarrow \{x_{n_k}\}$ ist TF mit $x_{n_k} \to x$
   $(\Leftarrow) : x_{n_k} \to x \Rightarrow B_\varepsilon(x)$ fast alle $x \Rightarrow$ Behauptung
3. Übungsaufgabe

□

■ **Beispiel 10.10**
$\{(-1)^n\}$ hat TF $\{(-1)^{2k}\}$ und $\{(-1)^{2k+1}\}$ mit Grenzwert +1 und -1 $\Rightarrow \{(-1)^n\}$ ist divergent, da es 2 HW gibt.

Satz 10.11
Sei (X, d) metrischer Raum, $M \subset X$ Teilmenge. Dann

$$M \text{ abgeschlossen} \quad \Leftrightarrow \quad \text{für jede konv. Folge } \{x_n\} \text{ in } M \text{ gilt: } \lim_{n\to\infty} x_n \in M$$

Beweis. $(\Rightarrow)$: sei $\{x_n\} \in M$ mit $x_n \to x \notin M \Rightarrow \exists \varepsilon : B_\varepsilon \subset X \setminus M \Rightarrow x_n \not\to x$` $\Rightarrow$ Behauptung
$(\Leftarrow)$: sei $X \setminus M$ nicht offen, also abgeschlossen $\Rightarrow \exists x \in X \setminus M : B_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap M \Rightarrow x_n \to x \in M$` $\Rightarrow X \setminus M$ offen □

10.1. Konvergenz im normierten Raum X

$x_n \to x$ in $(X, \|.\|)$ und $\lambda_n \to \lambda$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

Satz 10.12
Sei X normierter Raum, $\{x_n\}, \{y_n\}$ in X, $\{\lambda_n\}$ in K mit $\lim x_n = x, \lim y_n = y$. Dann

1) $\{x_n \pm y_n\}$ konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
2) $\{\lambda_n x_n\}$ konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
3) $\lambda \neq 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda}$ (in K) für $\{\frac{1}{\lambda_n}\}_{n \geq \tilde{n}}$ $(\lambda_n \neq 0 \,\forall n \geq \tilde{n})$

Beweis. 1. Übungsaufgabe

2. $\{x_n\}$ beschränkt $\Rightarrow \exists r > |\lambda| > 0 : \|rx_n\| \leq r$
   $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 : |\lambda_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2r}, \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2r}$
   $\Rightarrow \|\lambda_{x_n} - \lambda_n\| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda x_n\| + \|\lambda x_n \lambda x\| = |\lambda_n - \lambda \cdot \|x_n\| + |\lambda| \cdot \|x_n - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2r} \cdot r + r \cdot \frac{\varepsilon}{2r} = \varepsilon \Rightarrow$ Behauptung
3. offenbar: $\exists \tilde{n} : \lambda_n \neq 0$ für $\varepsilon > 0 \exists n_0 : |\lambda - \lambda_n| < m \cdot n \cdot \left\{ \left(\frac{|x|}{2} \right), \left(\frac{\varepsilon \cdot |\lambda|^2}{2} \right) \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot |\lambda| \leq |\lambda| - |\lambda + \lambda_n| \leq \lambda_n \Rightarrow ... \Rightarrow$ Behauptung □

Folgerung 10.13
Seien $\{\lambda_n\}, \{\mu_n\}$ Folgen in K mit $\lambda_n \to \lambda, \mu_n \to \mu$. Dann

1) $\lambda_n + \mu_n \to \lambda + \mu, \lambda_n \mu_n \to \lambda\mu$
2) falls $\lambda \neq 0$ (oBdA $\lambda_n \neq 0$): $\frac{\mu_n}{\lambda_n} \to \frac{\mu}{\lambda}$

Definition (Nullfolge)
$\{x_n\}$ im normierten Raum heißt Nullfolge , falls $x_n \to 0$

Lemma 10.14
1) Im metrischen Raum X gilt:$x_n \to x$ in $X \Leftrightarrow d(x_n, x) \to 0$ in $\mathbb{R}$
2) Sei $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n \,\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}, \beta_n \to 0$
   $\Rightarrow \alpha_n \to 0$ Sandwich-Prinzip

Beweis. 1. benutze $d(x_n, x) < \varepsilon \iff |d(x_n, x) - 0| < \varepsilon$

2. $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n : \beta_n = |\beta_n - 0\beta_n| < \varepsilon \Rightarrow \alpha_n = |\alpha_n - 0| \leq \beta_n < \varepsilon \Rightarrow$ Behauptung □

Satz 10.15
Sei X normierter Raum, $\{x_n\}$ in X. Dann
$x_n \to x$ in $X \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$ in $\mathbb{R}$

Beweis. $0 \leq |\ \|x_n\| - \|x\|\ | \leq \|x_n - x\| \to 0 \overset{\text{Lemma 3.14}}{\Rightarrow}$ Behauptung □

Satz 10.16
Seien $(X, \|.\|_1)$, $(X, \|.\|_2)$ normierte Räume mit äquivalenten Normen. Dann

$$x_n \to x \text{ in } (X, \|.\|_1) \Leftrightarrow x_n \to x \text{ in } (X, \|.\|_2)$$

Beweis. Es gibt $a, b > 0 : a \cdot \|y\|_1 \leq \|y\|_2 \leq b \cdot \|y\|_1$
($\Rightarrow$): es ist $0 \leq \|x_n - x\|_2 \leq b \cdot \|x_n - x\|_1 \to 0 \Rightarrow$ Behauptung
($\Leftarrow$): analog □

■ **Beispiel 10.17**
$X = \mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$: $x_n \to x$ bezüglich $\|.\|_1 \iff x_n \to x$ bezüglich $\|.\|_2$, somit Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ unabhängig von Norm.

Satz 10.18 (Konvergenz in $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$ bzgl. Norm)
Sei $\{x_n\}$ Folge mit $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^n) \in \mathbb{R}(\mathbb{C}^n)$, $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ in } \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_k^j = xj \text{ in } \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}\ \forall j = 1, \ldots, n$$

Beweis. nur in $\mathbb{R}^n$
($\Rightarrow$): sei $x_k \to x$ in $\mathbb{R}^n$ bezüglich $|\cdot|_p \Rightarrow x_n \to x$ bezüglich $|\cdot|_\infty$. Wegen $|x_k^j - x^j| \leq |x_k - x|_\infty \to 0$ hieraus folgt die Behauptung
($\Leftarrow$): sei $x_k^j \to x^j \Rightarrow |x_k - x|_1 = |x_k^1 - x^1| + ... + |x_k^n - x^n| \to 0 \Rightarrow x_k \to x$ bezüglich $|\cdot|_1 \Rightarrow$ Behauptung □

Hinweis: zukünftig bei Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ in der Regel keine Angabe der konkreten Norm.

▶ **Bemerkung 10.19**
offenbar gilt:
$z_n = x_n + iy_n \to z = x + iy \iff (x_n, y_n) \to (x, y)$ in $\mathbb{R}^2$ bezüglich $|\cdot| \iff \mathfrak{Re}(z_n)\mathfrak{Re}(z)$ und $\mathfrak{Im}(z_n) \to \mathfrak{Im}(z)$

■ **Beispiel 10.20**
$\{x_k\} = \{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}, \sqrt{k + \sqrt{k}} - \sqrt{k})\}$ Folgen in $\mathbb{R}^2$
es ist $0 \leq x_k^1 = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0 \Rightarrow x_k^1 \to 0$
$x_k^2 = \sqrt{k + \sqrt{k}} - \sqrt{k} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+\sqrt{k}}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{k}}}+1} \to \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = \frac{1}{2}$

■ **Beispiel 10.21**

$z_k = \frac{1+ki}{1+k} \to i$, denn:

$\mathfrak{Re}(z_n) = \frac{1}{1+k} \to 0$ und $\mathfrak{Im}(z_n) = \frac{k}{k+1} \to 1 \Rightarrow\to (0,1) = i$

10.2. Konvergenz in $\mathbb{R}$

Satz 10.22

Seien $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Dann

1) $x_n \leq y_n \, \forall n \geq n_0, x_n \to x, y_n \to y \;\Rightarrow x \leq y$

2) $x_n \leq y_n \leq z_n \, \forall n \geq n_0, x_n \to c, z_n \to c \;\Rightarrow y_n \to c$ (Sandwich-Prinzip)

Beweis. 1. angenommen $x > y$, sei $\varepsilon := \frac{1}{2}(x-y) > 0$

$\Rightarrow \exists m : x_n \in B_\varepsilon(x), y_n \in B_\varepsilon(y)$

$\Rightarrow y_n < y + \varepsilon = x - \varepsilon < x_n \Rightarrow$ ` $\Rightarrow$ Behauptung

2. offenbar $0 \leq y_n - x_n \leq z_n - x_n \to 0 \Rightarrow y_n - x_n \to 0 \Rightarrow\to c$ □

Definition (monoton)

Folge $\{x_n\}$ heißt wachsend / fallend , falls gilt:

$x_n \leq x_{n-1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$ (in beiden Fällen heißt Folge monoton).

Falls stets „<“ („>“) ist $\{x_n\}$ strikt

Satz 10.23

Sei $\{x_n\}$ in $\mathbb{R}$ monoton und beschränkt.

$$\{x_n\} \text{ konvergiert gegen } x := \begin{cases} \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}, & \text{falls monoton} \quad \text{wachsend} \\ \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}, & \qquad\qquad\qquad\; \text{fallend} \end{cases}$$

Beweis. Sei $\{x_n\}$ monoton wachsend und beschränkt $\Rightarrow x = \sup\{x_n\}$ existiert $\Rightarrow \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists m : x - \varepsilon \leq x_m \leq x_n \leq x \Rightarrow$ Behauptung

Monoton fallend analog □

■ **Beispiel 10.24**

Sei $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$

vollständige Induktion: $x_n > 0$, somit $\{x_n\}$ rekursiv eindeutig definiert

$\Rightarrow x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}(x_n + \frac{a}{x_n})^2 - a = \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2 \geq 0$

$\Rightarrow x_n - x_{n+1} = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - a) \geq 0$

$\Rightarrow \{x_n\}$ ist mon. fallend, beschränkt $\Rightarrow x_n \to x \in \mathbb{R}$

da $x_{n+1} \cdot x_n = \frac{1}{2}(x_n^2 + a) \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(x^2 + a) \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$

Fehlerabschätzung: $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2 \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(x_n - \sqrt{a})^2$, so genannte quadratische Konvergenz (schnelle Konvergenz, vgl. Newton-Verfahren), d.h. die Anzahl der signifikanten Dezimalstellen verdoppelt sich mit jedem Schritt!

Beispiel 10.25

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z^n}{n!} = 0$

betrachte reelle Folge $a_n := \frac{|z^n|}{n!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{|z|}{n+1} a_n$

$\Rightarrow \exists \tilde{n} : \{a_n\}$ fallend $\left(\frac{|z|}{\tilde{n}+1} < 1\right) \Rightarrow a_n \to a$

$\Rightarrow a = 0 \cdot a = 0 \Rightarrow |\frac{z^n}{n!} - 0| = \frac{vertz|^n}{n!} \to 0 \Rightarrow$ Behauptung

> **Theorem 10.26 (Bolzano-Weierstraß)**
> $\{x_n\}$ beschränkte Folge in $\mathbb{R} \Rightarrow \{x_n\}$ hat konvergente TF.

Beweis. es gibt $y_0, y_0' : y_0 \le x_n \le y_0'$

rekursive Definition von $y_n, y_n' \in \mathbb{R}$

$zn+1 := \frac{y_n + y_n'}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{unendlich viele } y_n \in [z_{n+1}, y_n'] & y_{n+1} = z_{n+1} \quad y_{n+1}' = y_n' \\ \text{sonst} & y_{n+1} = y_n \quad y_{n+1}' = z_{n+1} \end{cases} \Rightarrow$ Folge $Y_n = [y_n, y_n']$ ist Intervallschachtelung in $\mathbb{R} \Rightarrow \exists y \in \bigcap Y_n \Rightarrow y$ ist HW in $\{x_n\} \Rightarrow$ Behauptung ☐

Beispiel 10.27

$\{z_n\}$ für $z \in \mathbb{C}, |z| = 1, z \ne 1$: ist divergent, aber $\{\mathfrak{Re}(z_n)\}$ und $\{\mathfrak{Im}(z_n)\}$ sind beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists$ TF $\{n'\}$ von $\{n\}$ mit $\mathfrak{Re}(z^{n'}) \to \alpha$

$\Rightarrow \exists$ TF $\{n''\}$ von $\{n\}$ mit $\mathfrak{Im}(z^{n''}) \to \beta$

$\Rightarrow z^n \to \alpha + i\beta \Rightarrow \{z_n\}$ hat konvergente TF in $\mathbb{C}$!

10.3. Oberer und Unterer Limes

Definition

Seien $\{x_n\}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$.

$H := \{\gamma \in \mathbb{R} \mid \gamma$ ist Hw von $\{x_n\}\}$ ($\ne \emptyset$ nach 3.26)

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n =: \sup H \qquad \underline{\text{Limes superior}} \text{ von } \{x_n\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n := \inf H \qquad \underline{\text{Limes inferior}} \text{ von } \{x_n\}$$

<u>beachte:</u> lim sup und lim inf existieren stets für beschränkte Folgen!

Satz 10.28

Sei $\{x_n\}$ beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann

1) Sei $\{x_{n'}\}$ TF mit $x_{n'} \to \gamma \;\Rightarrow\; \liminf\limits_{n\to\infty} x_n \le \gamma \le \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$

2) $\gamma' := \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ und $\gamma'' := \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ sind Hw von $\{x_n\}$

   (folglich) $\inf H = \min H, \sup H = \max H$ und

   $\exists$ TF $\{x_{n'}\}, \{x_{n''}\}, x_{n'} \to \gamma', x_{n''} \to \gamma''$

3) $x_n \to \alpha \;\Leftrightarrow\; \alpha = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$

Beweis. 1. $x \in H \overset{3.9}{\Rightarrow}$ Behauptung

2. $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x \in H \cap B_\varepsilon(x')$
   $B_\varepsilon(x')$ offen $\Rightarrow \exists \tilde{\varepsilon} > 0 : B_{\tilde{\varepsilon}}(x') \subset B_\varepsilon(x') \Rightarrow$ unendlich viele x_n in $B_\varepsilon(x') \Rightarrow$ Behauptung für $\liminf$

3. Übungsaufgabe, Selbststudium □

Beispiel 10.29

$\{q_n\} \in \mathbb{R}$ sei Folge alle rationalen Zahlen in $(0, 1)$
$\Rightarrow$ Menge aller HW ist $H = [0, 1] \Rightarrow \liminf q_n = 0$ und $\limsup q_n = 1$

10.4. Uneigentliche Konvergenz

Definition (Uneigentliche Konvergenz)

Folge $\{x_n\}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert uneigentlich gegen $+\infty(-\infty)$, falls $\forall R > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \geq R(x_n \leq -R)\, \forall n \geq n_0$

(heißt auch bestimmt divergent) gegen ∞, „uneigentlich“ wird meist weggelassen.

Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$ bzw. $\xi_n \to \pm\infty$

Beispiel 10.30

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = +\infty$, denn für $R > 0$ gilt: $\frac{n^2+1}{n+1} = \frac{n+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{2} \geq R$ für $n \geq 2R$

Satz 10.31 (Satz von Stolz)

Sei $\{x_n\}, \{y_n\}$ Folgen in $\mathbb{R}$, $\{y_n\}$ sei stren monoton wachsend, $\{y_n\} \to \infty$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$, falls rechter Grenzwert existiert (endlich oder unendlich)

Beweis. Grenzwert rechts sei $g \in \mathbb{R}$, oBdA $y_n > 0$.
Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow n_0 : |\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} - g| < \varepsilon \Rightarrow (g-\varepsilon)\cdot(y_{n+1}-y_n) \leq x_{n+1}-x_n \leq (g+\varepsilon)\cdot(y_{n+1}-y_n) \overset{(*)}{\Rightarrow} (g-\varepsilon)(y_m - y_{n_0}) \leq x_m - x_{n_0} \leq (g+\varepsilon)(y_m - y_{n_0}) \Rightarrow (g-\varepsilon)(1-\frac{y_{n_0}}{y_m}) \leq \frac{x_m}{y_m} \leq (g+\varepsilon)(1-\frac{y_{n_0}}{y_m}) + \frac{x_{n_0}}{y_m} \Rightarrow g - \varepsilon \leq \liminf \frac{x_m}{y_m} \limsup \frac{x_m}{y_m} \leq g + \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \frac{y_m}{x_m} = g$
$(*)$ $\sum_{n=n_0}^{m-1}$ □

Beispiel 10.32

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0$ für $z \in \mathbb{C}, |z| > 1, k \in \mathbb{N}_{>0}$
$k = 1$: $\frac{n+1-n}{|z|^{n+1}-|z|^n} = \frac{1}{|z|} \to 0 \Rightarrow$ Behauptung
$k > 1$: $\frac{n^k}{|z|^n} = \left(\frac{n}{\sqrt[k]{|z|}^n}\right)^k \to 0^k = 0 \Rightarrow$ Behauptung

Satz 10.33

Sei $\{x_n\}$ mit $x_n \to x$ im normierten Raum X.
$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

Beweis. Es ist $\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j - x\| = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j - x \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \|x_j - x\| =: c_n$
$\frac{\sum_{j=1}^{n+1}\|x_j-x\| - \sum_{j=1}^{n}\|x_j-x\|}{n+1-n} = \frac{\|x_j - x\|}{1} \to 0 \Rightarrow c_n \to 0 \Rightarrow$ Behauptung □

11. Vollständigkeit

Definition (Cauchy-Folge)
Folge $\{x_n\}$ im metrischen Raum (X,d) heißt Cauchy-Folge (CF) (Fundamentalfolge), falls

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Satz 11.1
Sei $\{x_n\}$ Folge im metrischen Raum (X,d). Dann

1) $x_n \to x \Rightarrow \{x_n\}$ ist Cauchy-Folge
2) $\{x_n\}$ CF $\Rightarrow \{x_n\}$ ist beschränkt und hat maximal einen Hw.

Beweis. 1. Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow n_0 : d(x_{n_0}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow d(x_{n_0}, x_m) \leq d(x_{n_0}, x) + d(x, x_m) < \varepsilon \Rightarrow$ Behauptung

2. $\exists n_0 : d(x_n, x_m) < 1 \Rightarrow$ fast alle $x_n \in B_1(x_{n_0}) \Rightarrow$ Folge beschränkt
Sei g HW: $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ unendlich viele $x_n \in B_\varepsilon(g) \Rightarrow$ fast alle $x_n \in B_\varepsilon(g) \Rightarrow$ nur 1 HW möglich $\Rightarrow$ Behauptung □

Definition (Durchmesser)
Durchmesser von $M \subset X$ beschränkt, $\neq 0$, (X,d) metrischer Raum ist $\operatorname{diam} M := \sup\{d(x,y) | x, y \in M\}$

Folge $\{A_n\}$ von abgeschlossenen Mengen heißt Schachtelung falls $A_n \neq \emptyset, A_{n+1} \subset A_n\, \forall n \in \mathbb{N}$ und $\operatorname{diam} A_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Lemma 11.2
Sei $M \subset X$ beschränkt, $\neq 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{diam} M = \operatorname{diam}(\operatorname{cl} M)$.

Beweis. Übungsaufgabe, Selbststudium □

Theorem 11.3
Sei (X,d) metrischer Raum. Dann: für jede Schachtelung A_n in X gilt:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; \text{jede CF in } \{x_n\} \text{ in } X \text{ ist konvergent}$$

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei $\{x_n\}$ CF in X, setze $A_n := \operatorname{cl}\{x_k \mid k \geq n\} \Rightarrow \operatorname{diam} A_n \to 0$ und $\{A_n\}$ Schachtelung $\Rightarrow \exists x \in \bigcap A_n$
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \operatorname{diam} A_{n_0} < \varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon \Rightarrow x_n \to x$
($\Leftarrow$) Sei $\{A_n\}$ Schachtelung, wähle $x_n \in A_n \Rightarrow x_k \in A_n$ $(k \geq n) \Rightarrow \{x_n\}$ ist CF $\Rightarrow x_n \to x \Rightarrow x \in A_n \Rightarrow$ Behauptung □

Lemma 11.4
In $\mathbb{R}$ gilt:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$$

$$\forall \text{ Schachtelungen } \{A_n\} \qquad \forall \text{ Intervallschachtelungen } \{x_n\}$$

Beweis. ($\Rightarrow$) trivial
($\Leftarrow$) Zeige: jede CF konvergiert in $\mathbb{R}$, dann folgt die Behauptung aus Theorem 4.3
Sei $\{x_n\}$ CF in $\mathbb{R}, M_n := \{x_k \mid k \geq n\} \Rightarrow X_n := [\inf M_n, \sup M_n]$ Intervallschachtelung in $\mathbb{R} \Rightarrow \exists x \in \bigcap X_n \Rightarrow x_n \to x \Rightarrow$ Behauptung □

Definition (Vollständigkeit)
Metrischer Raum (X, d) heißt Vollständig , falls jede CAUCHY-Folge $\{x_n\}$ in X konvergiert.

Vollständiger, normierter Raum $(X, \|.\|)$ heißt BANACH-Raum .

Folgerung 11.5
Sei $\{x_n\}$ Folge im vollständigen metrischen Raum (X, d). Dann:

$$\{x_n\} \text{ konvergent } \Leftrightarrow \{x_n\} \text{ CAUCHY-Folge}$$

Beweis. vergleiche Definition Vollständigkeit und Satz 4.1 □

Theorem 11.6
$\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ mit $|.|_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ sind vollständige, normierte Räume (d.h. BANACH-Räume).

Beweis. für $\mathbb{R}^n$: $\{x_k\}$ mit $x_k = (x_k^1, ..., x_k^n)$ CF in $\mathbb{R}^n$ bezüglich $|\cdot|_p$, offenbar $\{x_k\}$ auch CF bezüglich $|\cdot|_\infty$
$\Rightarrow \{x_k^j\}_k$ CF in $\mathbb{R}$ für jedes $j = 1, ..., n \Rightarrow \{x_k^j\}_k$ konvergiert in $\mathbb{R}$ $\quad \forall j \Rightarrow \{x_k\}$ konvergiert in $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ Behauptung
für $\mathbb{C}$: Zurückführung auf $\mathbb{R}^2 \to$ Realteile und Imaginärteile □

12. Kompaktheit

Definition

Sei (X, d) metrischer Raum, Mengensystem $\mathcal{U} \subset \{U \subset X | U \text{ offen } \}$ heißt offene Überdeckung von $M \subset X$, falls $M \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.

Überdeckung $\mathcal{U}$ heißt endlich, falls $\mathcal{U}$ endlich (d.h. $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$).

Menge $M \subset X$ heißt (überdeckungs-)kompakt , falls jede Überdeckung $\mathcal{U}$ eine endliche Überdeckung $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ endhält (d.h. $\exists U_1, \ldots, U_n \subset \mathcal{U}$ mit $M \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_n$).

Menge $M \subset X$ heißt folgenkompakt , falls jede Folge $\{x_n\}$ aus M (d.h. $x_n \in M \, \forall M$) eine konvergente Teilfolge $\{x_{n'}\}$ mit Grenzwert in M besitzt (d.h. $\{x_n\}$ hat Hw in M nach 3.9).

Warnung: existiert endliche offene Überdeckung $\tilde{\mathcal{U}}$ von $M \Rightarrow M$ nicht unbedingt kompakt

Hinweis: Eine Abbildung $A : I \to X$ nennt man auch Familie mit Indexmenge I und schreibt $\{A_n\}_{i \in I}$Definition von "kompakt" in Literatur mittels Familien ist gleichwertig.

Theorem 12.1
Sei (X, d) metrischer Raum, $M \subset X$. Dann:

$$M \text{ kompakt } \Leftrightarrow M \text{ folgenkompakt}$$

Beweis.

- ($\Rightarrow$) Sei $\{x_n\}$ Folge in M, angenommen $\{x_n\}$ hat keinen HW in M $\Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0$: nur endlich viele $x_n \in B_{\varepsilon_x}(x) \Rightarrow M$ kompakt $\Rightarrow$ endlich viele $B_{\varepsilon_x}(x)$ überdecken $M \Rightarrow$ nur endlich viele Glieder x_n in $M \Rightarrow$ aber Folge unendlich vieler Glieder $\Rightarrow$ ` $\Rightarrow \{x_n\}$ hat HW in $M \Rightarrow$ Behauptung
  ($\Leftarrow$) betrachte für $\varepsilon > 0$ fest offene Überdeckung $U_\varepsilon := \{B_\varepsilon(x) \mid x \in M\}$ von M. Angenommen, es gibt keine endliche Überdeckung $U'_\varepsilon \subset U_\varepsilon$ von M
  $\Rightarrow \exists$ Folge $\{x_n\}$ in $M : x_1 \in M$ und $x_{k+1} \in M \setminus \bigcup B_\varepsilon(x_i) \Rightarrow d(x_k, x_l) > \varepsilon \Rightarrow \{x_k\}$ hat keinen HW $\Rightarrow M$ folgenkompakt $\Rightarrow$ `
- Sei U beliebige offene Überdeckung von M. Angenommen, es gibt keine endliche Überdeckung $U' \subset U$ von M (1)
  nach 2.: $\varepsilon_k := \frac{1}{k}$ gibt es offene Überdeckung U_k von M mit endlich vielen ε_k-Kugeln $\overset{(1)}{\Rightarrow} \forall k \; \exists x_k \in M$: $B_k := B_{\varepsilon_k}(x_k) \in U_k$ und es gibt keine endliche Überdeckung $U' \subset U$ von $B_k \cap M$ (2)
  $\Rightarrow M$ folgenkompakt $\exists$ TF $x_{k'} \Rightarrow \tilde{x} \in M \Rightarrow \exists \tilde{U} \in U : \tilde{x} \in \tilde{U} \Rightarrow \tilde{U}$ offen $\Rightarrow \exists \tilde{\varepsilon} > 0 : B_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{x}) \subset \tilde{U} \Rightarrow \exists k_0 :$ $d(x_{k_0}, \tilde{x}) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ und $\frac{1}{k} = \varepsilon_{k_0} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \Rightarrow \forall x \in B_{k_0} : d(x, \tilde{x}) \leq d(x, x_{k_0}) + d(x_{k_0}, \tilde{x}) < \tilde{\varepsilon} \Rightarrow B_{k_0} \subset B_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{x}) \subset \tilde{U} \Rightarrow$ $\{\tilde{U}\} \subset U$ ist endliche Überdeckung von $B_{k_0} \overset{(2)}{\Rightarrow}$ ` $\Rightarrow 1$ falsch $\Rightarrow$ Behauptung □

Satz 12.2
Sei (X, d) metrischer Raum, $M \subset X$. Dann

1) M folgenkompakt $\Rightarrow M$ beschränkt und abgeschlossen
2) M folgenkompakt, $A \subset M$ abgeschlossen $\Rightarrow A$ folgenkompakt.

Beweis. 1. angenommen M unbeschränkt $\Rightarrow \exists$ unbeschränkte Folge $\{x_n\}$ in M ohne HW $\Rightarrow \exists$ keine konvergente TF $\Rightarrow$ ` $\Rightarrow M$ beschränkt

Sei $\{x_n\}$ Folge in M mit $x_n \to x \Rightarrow M$ folgenkompakt $\Rightarrow x \in M \Rightarrow M$ abgeschlossen

2. Sei $\{x_n\}$ Folge in $A \subset X \Rightarrow M$ folgenkompakt $\Rightarrow \exists$ TF $x_{n'} \to x \in M \Rightarrow A$ abgeschlossen $\Rightarrow x \in A \Rightarrow$ Behauptung □

Theorem 12.3 (Heine-Borell kompakt, Bolzano-Weierstraß folgenkompakt)
Sei $X = \mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) mit beliebiger Norm, $M \subset X$. Dann

$$M \text{ kompakt } \Leftrightarrow M \text{ abgeschlossen und beschränkt}$$

Warnung: Theorem gilt nicht in beliebigen metrischen Räumen! Betrachte $\mathbb{R}$ mit diskreter Metrik: $[0,1]$ nicht folgenkomakt, da $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ keine HW hat.

Beweis. ($\Rightarrow$) Folgt aus Theorem 5.1 und Satz 5.2
($\Leftarrow$) für $\mathbb{R}^n$: Norm in $\mathbb{R}^n$ ist äquivalent zu $|\cdot|_\infty$
Sei $\{x_k\}$ Folge in $M, x_k = (x_k^1, ..., x_k^n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow M$ beschränkt $\Rightarrow \{|x_n|_\infty\}$ beschränkt in $\mathbb{R} \Rightarrow \{x_k^j\}$ beschränkt in $\mathbb{R}$ für $j = 1, ..., n \Rightarrow$ Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$
$\Rightarrow \exists$ TF $\{x_{k'}\} : x_{k'}^1 \to x^1$
$\Rightarrow \exists$ TF $\{x_{k''}\} : x_{k''}^2 \to x^2$, offenbar $x_{k''}^1 \to x^1$
$\vdots$
$\Rightarrow \exists$ TF $\{x_{k*}\} : x_{k*}^j \to x^j \quad \forall j = 1, ..., n$
$\Rightarrow x_{k*} \to x = (x^1, ..., x^n)$ in $\mathbb{R}^n \Rightarrow M$ abgeschlossen $\Rightarrow x \in M \Rightarrow M$ kompakt □

Folgerung 12.4
Sei $\{x_n\}$ Folge in $X = \mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$). Dann

$$\{x_n\} \text{ beschränkt } \Rightarrow \{x_n\} \text{ hat konvergente TF}$$

Beweis. folgt direkt aus dem Beweis von Theorem 5.3 □

Satz 12.5
Je 2 Normen aus $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ sind äquivalent.

Beweis. zeige, dass beliebige Norm $\|.\|$ äquivalent zu $|\cdot|_\infty$ ist
Sei $\{e_1, ..., e_n\}$ Standardbasis, dann für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, B = \sum_{j=1}^n \|e_j\| > 0$ gilt: $\|x\| = \|\sum_{j=1}^n x_j \cdot e_j\| \leq \sum_{j=1}^n \|x_j\| \cdot \|e_j\| \leq B \cdot |x|_\infty$ (3)
Sei $a := \inf\{\|x\| \mid x \in S\}$ mit $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_\infty = 1\}$, angenommen, $a = 0 \Rightarrow^\exists \{x_k\}$ in $S : \|x_k\| \to 0$
S beschränkt und abgeschlossen $\Rightarrow \exists$ TF $x_{k'} \to \tilde{x} \in S \Rightarrow \|\tilde{x}\| \leq \|\tilde{x} - x_k\| + \|x_{k'}\| \leq B|\tilde{x} - x_{k_0}|_\infty + \|x_k\| \to 0 \Rightarrow$
$\tilde{x} = 0$, da $|0|_\infty = 0 \Rightarrow$ ` $\Rightarrow a > 0 \Rightarrow a \cdot |x|_\infty \leq \|x\| \Rightarrow$ Behauptung □

13. Reihen

Definition (Partialsumme)
Sei X normierter Raum. $\{x_n\}$ Folge im normierten Raum.
$s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k = x_0 + \ldots + x_n$ heißt Partialsumme .

Folge $\{s_n\}$ der Partialsumme heißt (unendliche)Reihe mit Gliedern x_k.
Notation: durch Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = x_0 + \ldots = \sum_k x_k = \{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

Existiert der Grenzwert $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, so heißt der Summe der Reihe.
Notation: $s = \sum_{k=0}^{\infty} x_n$.

Satz 13.1 (Cauchy-Kriterium)
beweis 64 Sei X normierter Raum, $\{x_k\}$ Folge in X. Dann

1) $\sum_k x_k$ konvergiert $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon > 0\, \exists n_0 : ||\sum_{k=n}^{m} x_k|| < \varepsilon\, \forall m \geq n \geq n_0$
2) falls x vollständiger, normierter Raum, gilt auch $\Leftarrow$ oben.

Beweis. Übungsaufgabe, benutze $\|s_m - s_{n-1}\| = \|\sum_{k=n}^{m} x_k\|$ □

Folgerung 13.2
Sei X normierter Raum, $\{x_n\}$ Folge in X. Dann:
$\sum_k x_k$ konvergiert $\Rightarrow x_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Beweis. mit $m = n$ □

■ **Beispiel 13.3**
geometrische Reihe $X = \mathbb{C}, a_k := z^k, z \in \mathbb{C}$ fest.

$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}\, \forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ divergent, falls $|z| > 1$

■ **Beispiel 13.4**
harmonische Reihe $X = \mathbb{R}, x_k := \frac{1}{k}$ $(k > 1)$. Reihe divergiert.

■ **Beispiel 13.5**
$X = \mathbb{R},\ x_k = \frac{1}{k(k+1)}$
$s_n = ^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} + ... = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow$ konvergiert gegen 1
Derartige Reihen heißen auch Teleskopreihen : $\sum_{k=0}^{\infty}(y_k - y_{k+1})$. Diese konvertieren genau dann, wenn $\{y_k\}$ konvergiert.

■ **Beispiel 13.6**
$X = \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \begin{cases} \text{konvergiert}, & \text{für } s > 1 \\ \text{divergiert}, & \text{für } s \leq 1 \end{cases}$$

Summe heißt RIEMANN'sche Zetafunktion $\zeta(s)$(für $s > 1$). Diese ist beschränkt und konvergent.

Satz 13.7
Sei X normierter Raum, $\{x_n\}, \{y_n\}$ in $X, \lambda, \mu \in K$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Dann:
$\sum_k x_k, \sum_k y_k$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda x_k + \mu x_k$ konvergent gegen $\lambda \sum_k x_k + \mu \sum_k y_k$.

Beweis. benutze Rechenregeln für Folgen □

Definition
Reihe $\sum_k x_k$ heißt absolut konvergent , falls $\sum_k \|x_k\|$ konvergiert.

Satz 13.8
Sei X vollständiger, normierter Raum. Dann:
$\sum_k x_k$ absolut konvergent $\Rightarrow$ $\sum_k x_k$ konvergent

Beweis. Es ist $\| \sum_{k=n}^{m} x_k \| \leq \sum_{k=n}^{m} \|x_k\|$ (1)
$\Rightarrow \tilde{s_m} = \sum_{k=0}^{m} \|x_k\|$ ist CF in $\mathbb{R} \overset{(1)}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{m} x_k$ ist CF in $X \Rightarrow$ Behauptung □

Satz 13.9 (Konvergenzkriterien für Reihen)
Sei X normierter Raum, $\{x_k\}$ in $X, k_0 \in \mathbb{N}$

1. Sei $\{x_k\}$ Folge in $\mathbb{R}$ — Majorantenkriterium
   a) $\|x_k\| \leq \alpha_k \, \forall k \geq k_0, \sum_k \alpha_k$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_k \|x_k\|$ konvergent
   b) $0 \leq \alpha_k \leq \|x_k\| \, \forall k \geq k_0, \sum_k \alpha_k$ divergent $\Rightarrow \sum_k \|x_k\|$ divergent.
2. Sei $x_k \neq 0 \, \forall k \geq k_0$ — Quotientenkriterium
   a) $\frac{\|x_{k+1}\|}{\|x_k\|} \leq q < 1 \, \forall k \geq k_0 \;\; \Rightarrow \;\; \sum_k \|x_k\|$ konvergiert
   b) $\frac{\|x_{k+1}\|}{\|x_k\|} \, \forall k \geq k_0 \;\; \Rightarrow \sum_k \|x_k\|$ divergiert.
3. — Wurzelkriterium
   a) $\sqrt[k]{\|x_k\|} \leq q < 1 \, \forall k \geq k_0 \;\; \Rightarrow \;\; \sum_k \|x_k\|$ konvergiert
   b) $\sqrt[k]{\|x_k\|} \geq 1 \, \forall k \geq k_0 \;\; \Rightarrow \;\; \sum_k \|x_k\|$ divergent.

Beweis.
1. $s_n = \sum_{k=0}^{n} \|a_k\|$ monoton wachsend
   a) $\{s_n\}$ beschränkt $\Rightarrow$ konvergent
   b) $\{s_n\}$ unbeschränkt $\Rightarrow$ divergent
2. a) $\|x_k\| \leq q^2 \|x_{k-2}\| \leq ... \leq q^k \|x_1\| =: a$, da $\sum_{k=0}^{m} a_k = \|x_k\| \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergent
   b) ist $\|x_k\| \not\to 0 \overset{\text{Folgerung 6.2}}{\Rightarrow}$ Behauptung
3. analog zu 2., verwende $\|x_k\| \leq q^k$ □

■ **Beispiel 13.10**
Exponentialreihe $\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ absolut konvergent $\forall z \in \mathbb{C}$.

$e :=$ exp(1) EULER'sche Zahl

■ **Beispiel 13.11**

Potenzreihe : $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ für $z \in \mathbb{C}, a_k \in \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$.

Sei

$$L := \begin{cases} \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}, & \text{falls existiert} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} \qquad R := \frac{1}{L}\ (\text{mit } 0 = \frac{1}{\infty}, \frac{1}{0} = \infty)$$

$|z-z_0| < R$: absolute Konvergenz,
$|z-z_0| > R$: Divergenz,
$|z-z_0| = R$: i.A. keine Aussage möglich.

$B_R(z_0)$ heißt Konvergenzkreis , R Konvergenzradius

■ **Beispiel 13.12**

p-adische Brüche . Sei $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$: betrachte $0, x_1x_2x_3\ldots := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p^{-k}$ für $x_k \in \{0,1,\ldots,p-1\}\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Satz 13.13 (Leibnitz-Kriterium für alternierende Reihen in $\mathbb{R}$)
Sei $\{x_n\}$ monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$. Dann:
alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x_k = x_0 - x_1 + x_2 - \ldots$ ist konvergent.

■ **Beispiel 13.14**

Alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ ist konvergent
man kann zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{1}{k} = \ln 2$

Frage: Ist die Summationsreihenfolge bei Reihen wichtig?

Antwort: im Allgemeinen nicht.

Definition (Umordnung)
Sei $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektive Abbildung: $\sum_{k=0}^{\infty} x_{\beta(k)}$ heißt Umordnung der Reihe $\sum_k x_k$.

Satz 13.15
Sei X normierter Raum. Dann:
$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = x$ absolut konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{k=0} \infty x_{\beta(k)}$ absolut konvergent für jede Umordnung.

Beweis. wegen Konvergenz der Partialsummen: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \sum_{k=n_0}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon$
da $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv $\exists n_1 : \{0,1,\ldots,n_0\} \subset \{b(0),\ldots,b(n_1)\} \Rightarrow \|\sum_{k=0}^{\infty} x_k - \sum_{k=0}^{m} x_{b(k)}\| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon \Rightarrow$
$\sum_{k=0}^{m} x_{b(k)} \to \sum_{k=0}^{\infty} x_k = x$
wegen $\sum_{k=0}^{m} \|x_{b(k)}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| \Rightarrow$ Umordnung ist absolut konvergent □

Hinweis: Satz ??? ist falsch, falls $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ nicht absolut konvergent

Satz 13.16
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ konvergierende Reihe in $\mathbb{R}$, die nicht absolut konvergent ist. Dann:
$\forall s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv mit $s = \sum_{k=0}^{\infty} x_{\beta_k}$

Beweis. für $s \in \mathbb{R}$: Seien x_k^+ und x_k^- positive bzw. negative Glieder $\Rightarrow$ Reihe konvergent $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x_k^{\pm} = \pm\infty$

summiere nun in folgender Reihenfolge: $x_1^+ + x_2^+ + ... + x_n^+$ (Summe erstmals $> s$) $+x_{n+1}^- + x_{n+2}^-...$ (Summe erstmals $< s$) $\Rightarrow$ Partialsummen schwanken um $s \Rightarrow$ wegen $x_k \to 0$ konvergiert umgeordnete Reihe gegen s □

Satz 13.17 (Cauchy-Produkt)
Sei X normierter Raum über $\mathbb{K}$, $\sum_j x_j$ und $\sum_i \lambda_i$ absolut konvergent in X bzw. $\mathbb{K}$. $\beta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, $Y_{\beta(i,j)} = \lambda_i x_i \, \forall i, j \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} Y_l = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \sum_{j=0}^{\infty} x_j$, wobei linke Reihe absolut konvergiert in X.

Spezialfall: $\beta(i,j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$ liefert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \lambda_k x_{k-l} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \sum_{j=0}^{\infty} x_j$$

Beweis. Sei $m(k,l) = \max\{k,l\} = m$ und $\tilde{b}(k,l) = m(k,l)^2 + m(k,l) + k - l = n$
$\Rightarrow m(\tilde{b} - 1, n) \to \infty$ für $n \to \infty$
$\Rightarrow \| \sum_{l=0}^{n} y_l - \sum_{i=0}^{m(k,l)} \lambda_i \cdot \sum_{j=0}^{m(k,l)} x_j \| \leq \|x_m\| \cdot \sum_{i=0}^{m} |\lambda_i| + |\lambda_m| \cdot \sum_{j=0}^{m} \|x_j\| \leq \tilde{\lambda} \cdot \|x_m\| + \tilde{j} \cdot |\lambda_m| \to 0$ (3)
$\sum_{i=0}^{m} |\lambda_i| \leq \tilde{\lambda}$
$\sum_{j=0}^{m} \|x_j\| \leq \tilde{j}$
da $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i := \lambda, \sum_{j=0}^{m} x_j =: x$ folgt $\sum_{l=0}^{n} y_l = \lambda \cdot x$ für $l = \tilde{b}(i,j)$ mit $\|y_l\|, |\lambda_i|, |x_j|$ links in (3) folgt absolute Konvergenz von $\sum_{l=0}^{n} y_l \Rightarrow$ Behauptung für beliebige b folgt mit ??? □

■ **Beispiel 13.18**
$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$, denn
$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_2^l}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{z_1^m \cdot z_2^{n-m}}{m! \cdot (n-m!)} \Rightarrow$ Erweiterung mit $\frac{n!}{n!}$ gibt $\binom{n}{m} \Rightarrow$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \exp(z_1 + z_2)$

Satz 13.19 (Doppelreihenproposition)
Sei $\{x_{k,l}\}_{k,l \in \mathbb{N}}$ Doppelfolge im BANACH-Raum X und mögen $\sum_{l=0}^{\infty} \|x_{k,l}\| =: \alpha_k \, \forall k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} x_k =: \alpha$ existieren.

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{l=0}^{\infty} x_{k,l}) = \sum_{l=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{\infty} x_{k,l})$, wobei alle Reihen absolut konvergent sind.

Beweis.
- als Konvergenz der Reihen: links klar nach Vorraussetzungen
  $\|x_{kl}\| \leq a_k \overset{\text{Maj.-Krit.}}{\Rightarrow} \sum_{k=0} \infty x_{kl} := b_l$ absolut konvergent $\sum_{l=0}^{n} \|b_l\| = \sum_{l=0}^{n} \| \sum_{k=0}^{\infty} x_{kl} \| \leq \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \|x_{kl}\| \overset{\text{Add.}}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \|x_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} b_l$ ist absolut konvergent $\Rightarrow$ Reihen rechts sind absolut konvergent
- Sei nun $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 : \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \frac{\varepsilon}{2}, \sum_{l=n+1}^{\infty} \|b_l\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} x_{kl} \right) - \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} x_{kl} \| =: s - s_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k + \sum_{l=n+1}^{\infty} \|b_l\| < \varepsilon$
  $\Rightarrow s_n \to s$, analog $s_n \to \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_{kl} =: \tilde{s} \Rightarrow s = \tilde{s} \Rightarrow$ Behauptung □

Kapitel IV

Funktionen und Stetigkeit

13. Funktionen

Definition

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton falled /wachsend , falls $x < y, x, y \in M \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(y)$ bzw. $f(x) \geq f(y)$

Falls rechts stets $<$ bzw. $>$, sagt man auch streng monoton.

Satz 13.1

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton fallend / wachsend.

$\Rightarrow$ inverse Funktion $f^{-1} : \mathcal{R} \to M$ existiert und ist streng monoton fallend / wachsend.

■ **Beispiel 13.2**

Allgemeine Potenzfunktion in $\mathbb{R}$:

$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^r$ für $r \in \mathbb{R}$ fest.

- $r > 0$: Satz 5.20 $\Rightarrow$ f streng monoton wachsend
- $r < 0$: $x^r = \frac{1}{x^{-r}} \Rightarrow f$ streng monoton fallend

$\overset{\text{Satz 1}}{\Rightarrow}$ f^{-1} existiert für $r \neq 0$ auf $(0, \infty)$, wegen $y = (y^{\frac{1}{r}})^r$ ist $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{r}}$

■ **Beispiel 13.3**

Allgemeine Exponentialfunktion in $\mathbb{R}$:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^x$ für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ fest.

5.20 $\Rightarrow$ streng monoton wachsend für $a > 1$ bzw. fallend für $a < 1$ (benutze $\frac{1}{a} > 1$)

$\overset{\text{Satz 1}}{\Rightarrow}$ f^{-1} existiert auf $(0, \infty)$ für $a \neq 1$. Wegen $y = a^{\log_a y}$ (5.21) ist $f^{-1}(y) = \log_a y$.

■ **Beispiel 13.4**

Polynom in $\mathbb{C}$:

Abbidlung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt Polynom, falls $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ für $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ fest.

- $gradf = n$ falls $a_n \neq 0$
- f ist Nullpolynom , falls $f(z) = 0 \, \forall z \in \mathbb{C}$

  Notation: $f = 0$

  (Menge der Polynome in $\mathbb{C}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$)

Satz 13.5
Seien f, g Polynome mit $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, g(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$. Dann:

1) $f, g \neq 0$, $\operatorname{grad} f \geq \operatorname{grad} g$
$\Rightarrow$ existieren eindeutig bestimmte Polynome q, r mit $f = q \cdot g + r$, wobei $r \neq 0$ oder $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} g$

2) $z_0 \in \mathbb{C}$ Nullstelle von $f \neq 0 \Leftrightarrow f(z) = (z - z_0)q(z)$ für ein Plynom $q \neq 0$ mit $\operatorname{grad} q = \operatorname{grad} f - 1$

3) f hat höchstens $\operatorname{grad} f$ Nullstellen falls $f \neq 0$

4) $f(z_i) = g(z_j)$ für $n+1$ paarweise verschiedene Punkte $z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{C}, n = \operatorname{grad} f \geq \operatorname{grad} g$
$\Rightarrow f(z) = g(z) \, \forall z \in \mathbb{C}$ (d.hz. $a_k = b_k \, \forall k$)

Definition
Abbildung $f : X \to Y, Y$ metrischer Raum heißt beschränkt auf $M \subset X$, falls Menge $f(M)$ beschränkt in Y ist, sonst unbeschränkt.

Definition
$f : X \to Y$ heißt konstante Funktion , falls $f(x) = a \, \forall x \in X$ und $a \in Y$ fest.

Definition
$M \subset X, X$ normierter Raum heißt konvex , falls $x, y \in M \Rightarrow tx + (1-t)y \in M \, \forall t \in (0,1)$

$f : D \subset X \to \mathbb{R}$ heißt strikt konvex , falls $f(tx + (1-t)y) \underset{(<)}{\leq} tf(x) + (1-t)f(y) \forall x, y \in D, t \in (0,1)$

f heißt konkav (bzw. strikt), falls $-f$ (strikt) konvex.

Lineare Funktionen

Definition
Seien X, Y normierte Räume über K.
$f : X \to Y$ heißt linear , falls

- f additiv , d.h. $f(a+b) = f(a) + f(b) \, \forall a, b \in X$ und
- f homogen , d.h. $f(\lambda a) = \lambda f(a) \, \forall a \in X, \lambda \in K$

$f : X \to Y$ heißt affin linear, falls $f + f_0$ linear für eine konstante Funktion f_0

Offenbar f linear $\Rightarrow f(0) = 0$

Definition
Lineare Abbildung $f : X \to Y$ heißt beschränkt , falls f beschränkt auf $\overline{B_1(0)}$, d.h.

$$\exists \text{ konstante } c > 0 : \|f(x)\| \leq c \, \forall x : \|x\| \leq 1 \tag{1}$$

Wegen $\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|}\|f(x)\|$ ist (1) äquivalent zu

$$\|f(x)\| = \sup\{\|f(x)\| | x \in \overline{B_1(0)}\} \tag{1'}$$

Satz 13.9
Seien X, Y normierte Räume über K, dann:
$L(X,Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ linear und beschränkt}\}$ ist normierter Raum über K mit $\|f\| = \sup\{\|f(x)\| | x \in \overline{B_1(0)}\}$

Exponentialfunktion

Definition
$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

Satz 13.10
Sei $\{z_n\}$ Folge in $\mathbb{C}$ mit $z_n \to z$. Dann: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \exp(z)$

Lemma 13.11
Sei $z_n \to 0$ in $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\lim \frac{\exp(z_n)-1}{z^n} = 1$

Satz 13.12
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z_1 + z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2) \, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f\left(\frac{z}{n}\right) - 1}{\frac{z}{n}} = \gamma \in \mathbb{C} \, \forall z \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow$ $f(z) = \exp(\gamma z) \, \forall z \in \mathbb{C}$

Folgerung 13.13
Funktion exp ist durch obiges Lemma und Satz eindeutig definiert.

Satz 13.14
Es gilt: $e^x = \exp(x) \, \forall x \in \mathbb{R}$

Definiert (!) in $\mathbb{C}$: $e^z := \exp(z) \, \forall z \in \mathbb{C}$ (als Potenz nicht erklärt)

Definition
<u>natürlicher Logarithmus</u> : $\ln x = \log_e x \, \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$

<u>Trigonometrische Funktion</u> :

- $\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots \, \forall z \in \mathbb{C}$
- $\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{24} + \ldots \, \forall z \in \mathbb{C}$

Satz 13.15
Es gilt:

1) EULER'sche Formel : $e^{iz} = \cos z + i \sin z$
2) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \, \forall z \in \mathbb{C}$ (beachte: $\not\Rightarrow |\sin z| \leq 1, |\cos z| \leq 1$, $\sin, \cos$ unbeschränkt auf $\mathbb{C}$)
3) $\sin(-z) = -\sin z, \cos z = \cos(-z)$
4) (Additionstheoreme)
   - $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z \, \forall z, w \in \mathbb{C}$
   - $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w \, \forall z, w \in \mathbb{C}$
5) $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z, \cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z \, \forall z \in \mathbb{C}$
6) $\sin z - \sin w = 2 \cos \frac{z+w}{2} - \sin \frac{z+w}{2}$
   $\cos z - \cos w = -2 \sin \frac{z+2}{2} \sin \frac{z-w}{2}$

Satz 13.16
Es gilt $\forall x \in \mathbb{R}$:
$\left|e^{ix}\right| = 1, \sin x = \mathfrak{Im} e^{ix}, \cos = \mathfrak{Re} e^{ix}$ (insbesondere $\sin x, \cos x \in \mathbb{R}$), somit $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Lemma 13.17
Es gilt in $\mathbb{R}$:

1) cos streng fallend auf $[0, 2]$
2) $\cos 2 < 0$ und $\sin x > 0 \, \forall x \in (0, 2]$
3) $\varphi(x) = \varphi(1) \, \forall x \in [0, 2]$ und $45 < \varphi(x) < 90$ (d.h. $\varphi(x)$ proportional zu x)
4) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ für $\pi := \frac{180\text{ř}}{\varphi(1)}$ $(= 3,1415\ldots)$, $\frac{\pi}{2}$ einzige Nulsltelle in $[0, 2]$

Satz 13.19
Für alle $z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$ gilt:

1) $e^{z+2k\pi i} = e^z$, d.h. Periode $2\pi i$
   $\sin(z + 2k\pi) = \sin z$ (d.h. Periode 2π)
   $\cos(z + 2k\pi) = \cos z$ (d.h. Periode 2π)
2) $e^{z+i\pi/2} = ie^z, e^{z+i\pi} = -e^z$
3) $\sin(z + \pi) = -\sin z, \cos(z + \pi) = -\cos z$
   $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$

Satz 13.20
Auf $\mathbb{C}$ gilt:

- $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

sin / cos **in** $\mathbb{R}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Definition
$\sin\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ streng monoton und surjektiv,
$\cos[0,\pi] \to [-1,1]$ streng monoton und surjektiv
$\Rightarrow$ Umkehrfunktion existiert: Arcussinus , Arcuscosinus :

- $\arcsin := \sin^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $\arccos := \cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$

Tangens und Cotangents

Definition
$\tan zz := \frac{\sin z}{\cos z}\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \big| k \in \mathbb{Z}\}$
$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

$$\left.\begin{aligned} \text{Offenbar } \tan(z+\pi) &= \frac{\sin(z+\pi)}{\cos(z+\pi)} = \frac{-\sin z}{-\cos z} = \tan z \\ \cot(z+\pi) &= \cot(z) \end{aligned}\right\} \forall z \in \mathbb{C},\ \text{d.h. Periode } \pi$$

Tangens auf $\mathbb{R}$

Definition
$0 \le x_1 < x_2 < \pi/2 \Rightarrow \tan x_1 = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2} = \tan x_2$
$\Rightarrow \tan(-x) = -\tan(x) \Rightarrow$ streng wachsend auf $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\Rightarrow \arctan = \tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ existiert.

Satz 13.21
Es gilt:

1) $\mathfrak{Re}(exp) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
2) (Polarkoordinaten auf $\mathbb{C}$)

   Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert eindeutiges $\gamma \in [0, 2\pi] mit z = |z|e^{i\gamma} = |z| (\cos\gamma + i \sin\gamma)$ (auch $[-\pi, \pi]$)
3) (Wurzeln)

   Für $Z = |z|e^{i\gamma} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, n \geq 2$ gilt:
   $w^n = z \Leftrightarrow w \in \left\{ \sqrt[n]{z} e^{i\frac{k}{n} + \frac{2k\pi}{n}} =: w_k \middle| k = 1, \ldots, n \right\}$ (Lösungen bilden ein regelmäßiges N-Eck auf dem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{|z|}$)

Logarithmen in $\mathbb{C}$

(sog. Hauptzweig)

Definition
$exp\left(\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathfrak{Im} z < \pi\}\right) \to \mathbb{C} \setminus (\infty, 0]$ ist bijektiv
$\Rightarrow$ Umkehrabbildung $\ln : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ gilt: $e^{\ln|z| + i\gamma} = |z|e^{i\gamma} = z$
$\Rightarrow$ $\ln z = \ln|z| + i\gamma \, \forall z = |z|e^{i\gamma} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$
$\Rightarrow$ $\ln z$ stimmt auf $\mathbb{R}_{>0}$ mit rellen ln überein.

Hyperbolische Funktionen

Definition
- $\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \, \forall z \in \mathbb{C}$ (Sinus Hyperbolicus)
- $\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} \, \forall z \in \mathbb{C}$ (Cosinus Hyperbolicus)
- $\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$ (Tangens Hyperbolicus)
- $\coth(z) = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} \, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ (Cotangens Hyperbolicus)

Satz 13.22
Es gilt $\forall z, w \in \mathbb{C}$

1) $\sin h = -i \sin(z), \cos(z) = \cosh(iz), \sinh(-z) = -\sinh(z), \cosh(-z) = \cosh(x)$ (gibt auch Nullstellen vom sinh / cosh)
2) $\sinh, \cosh$ haben Periode $2\pi i$, $\tanh, \coth$ haben Periode πi
3) $\cosh^2 z - \sin^2 z = 1$
4) $\sinh(z + w) = \sinh z \cosh w + \sinh w \cosh z$
   $\cosh(z + w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sin w$

Definition

Sei $f_n X \to Y$, Y metrischer Raum (X beliebige Menge), $n \in \mathbb{N}$. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Funktionenfolge .

Funktionenfolge $\{f_n\}$ konvergiert punktweise gegen $f : X \to Y$ auf $M \subset X$, falls $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \, \forall x \in M$

Funktionenfolge $\{f_n\}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f : X \to Y$ auf $M \subset X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \, \forall x \in M$$

Notation: $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ bzw. $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ gleichmäßig auf M.

Lemma 13.23

$f_n \to f$ gleichmäßig auf $M \Rightarrow f_n(x) \to f(x) \, \forall x \in M$ (d.h. punktweise auf M)

Satz 13.24

Seien $f_n, f \in B(X, Y)$. Dann (X metrischer Raum):

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig auf } X \Leftrightarrow f_n \to f \text{ in } (B(X, Y), \|.\|_1\infty)$$

Definition

Sei $f_n. : X \to Y$, Y normierter Raum (X beliebige Menge), $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ heißt Funktionenreihe

Reihe $\sum_n f_n$ heißt punktweise (gleichmäßig) konvergent gegen $f : X \to Y$ auf $M \subset X$, falls dies für die zugehörige Folge (Partialsumme!) $\{s_n\}$ gilt.

Satz 13.25

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ Potenzreihe in $\mathbb{C}$ mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$ und sei $M \subset B_R(z_0)$ kompakt

$\Rightarrow$ Potenzreihe konvergiert gleichmäßig auf M.

14. Stetigkeit

Definition

Sei stets $f: D \subset X \to Y$, X, Y metrischer Raum, $D = \mathcal{D}(f) \neq \emptyset, y_0 \in Y$ heißt Grenzwert der Funktion f im Punkt $x_0 \in \overline{D}$, falls gilt:

$$\{x_n\} \text{ Folge in } D \text{ mit } x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to y_0$$

Notaton: $\lim\limits_{x \to x_0} = y_0, f(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} y_0$

▶ **Bemerkung 14.2**

Falls $x_0 \in D$ isolierter Punkt von D, d.h. kein HP von D, dann ist stets $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Satz 14.3 ($\varepsilon\delta$-Kriterium)

Sei $f: D \subset X \to Y, x_0 \in \overline{D}$. Dann

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x_0) \cap D) \subset B_\varepsilon(y_0)$$

Satz 14.4 (Rechenregeln)

1) Sei Y normierter Raum über $\mathbb{R}, f, g : D \subset X \to Y, \lambda : D \to K, x_0 \in \overline{D}, f(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} y, g(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} \tilde{y}, \lambda(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} \alpha$. Dann:
   - $(f + g)(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} y + \tilde{y}$
   - $(\lambda \cdot f)(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} \alpha \cdot y$
   - $\left(\frac{1}{\lambda}\right)(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha}$ falls $\alpha \neq 0$
2) Sei $f: D \subset X \to Y, g: \tilde{D} \subset Y \to Z, \mathfrak{Re}(f) \subset \tilde{D}, X, Y, Z$ metrische Räume, $x \in \overline{D}, f(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} y, g(y) \overset{y \to y_0}{\longrightarrow} z_0$. Dann:
   $g(f(x)) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} z_0$

Definition

Für $f: D \subset X \to Y$ mit $X = \mathbb{R}$ definieren wir einen einseitiger Grenzwert $y_0 \in Y$ heißt linksseitig bzw. rechtsseitig von f im HP x_0 von $D \cap (-\infty, x_0)$ bzw. $D \cap (x_0, \infty)$, falls gilt: $x_n \in D \cap (-\infty, x_0)$ bzw. $x_n \in D \cap (x_0, \infty)$ mit $x_n \to x_0 \;\Rightarrow\; f(x_n) \to y_0$

Notation: $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x) = y_0 =: f(x_0^-) \quad f(x) \overset{x \uparrow x_0}{\longrightarrow} y_0$

$\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) = y_0 =: f(x_0^+) \quad f(x) \overset{x \downarrow x_0}{\longrightarrow} y_0$

▶ **Bemerkung 14.5**

Satz 2.4 gilt sinngemäß auch für einseitige Grenzwerte.

Für $f: D \subset X \to Y$ mit $X = \mathbb{R}$ bzw. $Y = \mathbb{R}$ heißt der Grenzwert uneigentlich :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0, \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

indem wir einen Grenzwert definiert als $x_0 = \pm\infty$ bzw. $y_0 = \pm\infty$ wählen und bestimmte divergenzte Folgen $x_n \to \pm\infty$ mit $x_n \in D)$ bzw. $f(x_n) \to \pm\infty$ betrachten.

Landau-Symbole

(Vgl. von „Konvergenzgeschwindigkeiten“)

Definition
Sei $f : D \subset X \to Y, X$ metrischer Raum, Y normierter Raum, $g : D \subset X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D}$.

- $f(x)$ ist „klein o “ von $g(x)$ für $x \to x_0$, falls
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\|f(x)\|}{g(x)} = 0$$
Notation: $f(x) = o(g(x))$(meist $x \neq x_0$ im „lim“ weggelassen)
- $f(x)$ ist „groß O “ von $g(x)$ für $x \to x_0$, falls
$$\exists \delta > 0, c \geq 0 : \frac{\|f(x)\|}{|g(x)|} \leq c \quad \forall x \in (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$$
Notation: $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$für $x \to x_0$

Relativtopologie

Definition
Sei (X, d) metrischer Raum, für $D \subset X$ ist (D, d) ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik.

- $M \subset D$ heißt offen bzw. abgeschlossen relativ zu D, falls M offen bzw. abgeschlossen im metrischen Raum (D, d).
- $M \subset D$ heißt Umgebung von $x \in D$ relativ zu D, falls M Umgebung von x im metrischen Raum (D, d).

Definition
Sei $f : D \subset X \to Y$ metrischer Raum, $D = \mathcal{D}(f)$, Fkt. f heißt folgenstetig im Punkt $x_0 \in D$, falls
$$f(x_n) \to f(x_0) \forall \text{ Folgen } x_n \to x_0 \text{ in } D$$

Definition
Funktion f heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls $\forall$ Umgebungen V von $f(x_0)\, \exists$ Umgebung U von x_0 in $D :\ f(U) \subset V$.

Interpretation: Input / Output Steuerung besteht Forderung, dass beliebig kleine Output-Toleranzen ε stets durch hinreichend kleine Input-Toleranzen δ erreicht werden können.

Satz 14.11
Sei $f : D \subset X \to Y$, X, Y metrischer Raum, $x_0 \in D$. Dann:

$$f \text{ stetig in } x_0 \Leftrightarrow f\ \varepsilon\delta\text{-Stetig in } x_0 \Leftrightarrow f \text{ folgenstetig in } x_0$$

Definition
Funktion f heißt stetig (folgen- / $\varepsilon\delta$-stetig) auf $M \subset D$, falls f stetig (folgen-/$\varepsilon\delta$-stetig) in jedem Punkt $x_0 \in M$.

Satz 14.13
Sei $f : D \subset X \to Y, X, Y$ metrische Räume, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) f stetig auf D
2) $f^{-1}(V)$ offen in D $\forall V \subset Y$ offen
3) $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in D $\forall A \subset Y$ abgeschlossen

Satz 14.14 (Rechenregeln)

1) Sei Y normierter Raum über K, $f, g : D \subset X \to Y, \lambda : D \to U, f, g, , y$ stetig in $x_0 \in D$
$\Rightarrow f + g, \lambda \cdot f$ stetig in x_0, $\frac{1}{\lambda}$ stetig in x_0 falls $\lambda(x_0) \neq 0$
2) Sei $f : D \subset X \to Y, y : \tilde{D} \subset Y \to Z, X, Y, Z$ metrischer Raum, f stetig in x_0, g stetig in $f(x_0) \in \tilde{D}$
$\Rightarrow g \circ f$ stetig in x_0

■ **Beispiel 14.18 (Dirichlet-Funktion)**
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

in keinem $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

Satz 14.19
Sei $f_n, f : D \subset X \to X, f_n$ stetig in $x_0 \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \to f$ gleichmäßig
$\Rightarrow f$ stetig in x_0

Folgerung 14.20
Falls alle f_n stetig auf $M \subset D$ und $f_n \to f$ gleichmäßig auf M
$\Rightarrow f$ stetig auf M.

Satz 14.21
Sei $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \, \forall z \in B_r(z_0), R \in (0, \infty]$ Konvergrenzkreis, $a_k \in \mathbb{Z} \, \forall k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ stetig auf $B_R(z_0)$

Definition
Bijektive Abbildung $f : D \subset X \to R \subset Y, X, Y$ metrische Räume, $D = \mathcal{D}(f), R = \mathcal{R}(f)$ heißt Homöomorphismus , falls f und f^{-1} stetig.

Mengen D und R heißen homöomorph zueinander, falls es einen Homöomorphismus $f : D \to R$ mit $D = \mathcal{D}(f), R = \mathcal{R}(f)$ gibt.

beachte: Homöomorphismus bildet offene (abgeschlossene) Mengen auf offene (abgeschlossene) Mengen ab.

Beispiel 14.25
stereographische Projektion

$X = \mathbb{R}^{n+1}, X_0 := \{(x_0, \ldots, x_n n+1) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_{n+1} = 0\}, N = (0, \ldots, 0, 1)$ (Nordpol), $S_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, |x| = 1\}$ n-dimensionale Einheitsspäre.

Betrachte $\sigma : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\sigma(x) = N\frac{2}{(x-N)^2}\langle x - N\rangle$ stetig. σ ist Homöomorphismus mit $\sigma^{-1}(y) = N - \frac{2}{(y-N)^2}\langle Y - N\rangle$

Satz 14.26
Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig, D Intervall
$\Rightarrow f^{-1}$ existiert und ist stetig auf $\mathcal{R}(f)$.

Satz 14.28
Sei $f : X \to Y$ linear, X, Y normierte Räume, $X = \mathcal{D}(f)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) f stetig in x_0
2) f ist stetig auf X
3) f ist beschränkt

Definition
Funktion $f : D \subset X \to Y, X, Y$ metrische Räume, heißt gleichmäßig stetig auf $M \subset D$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : d(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon \quad \forall x, \tilde{x} \in M \text{ mit } d(x, \tilde{x}) < \delta,$$

d.h. f ist $\varepsilon\delta$-stetig in jedem $\tilde{x} \in M$ und $\delta > 0$ kann unabhängig von $x \in M$ gewählt werden.

Satz 14.29
Sei $f : D \subset X \to Y, X, Y$ metrischer Raum, f stetig auf kompakten $M \subset D$
$\Rightarrow$ f gleichmäßig stetig auf M

Definition
Funktion $f : D \subset X \to Y, X, Y$ metrischer Raum, heißt LIPSCHITZ-stetig auf $M \subset D$, falls LIPSCHITZ-Konstante $L > 0$ existiert mit

$$d(f(x), f(\tilde{x})) \le L d(x, \tilde{x}) \tag{L}$$

Spezialfall: X, Y normierte Räume, dann hat L die Form

$$\|f(x) - f(\tilde{x})\| \le L\|x - \tilde{x}\| \quad \forall x, \tilde{x} \in M \tag{L'}$$

Interpretation: für $X = Y = \mathbb{R}$ fixiere $\tilde{x}$

- Graph von f liegt im schraffierten Kegel
- muss $\forall \tilde{x} \in M$ gelten mit gleichem L

Satz 14.30
Sei $f : D \subset X \to Y$ LIPSCHITZ-stetig auf M, X, Y metrische Räume
$\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig auf M (und damit auch stetig)

Definition (Fortsetzung, Einschränkung)
Funktion $\tilde{f} : D(\tilde{f}) \to Y$ heißt Fortsetzung (bzw. Einschränkung) von $f\mathcal{D}(f) \to Y$ auf $\mathcal{D}(f)$ falls $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(\tilde{f})$ (bzw. $\mathcal{D}(\tilde{f}) \subset \mathcal{D}(f)$) und $\tilde{f}(x) = f(x) \forall x \in \mathcal{D}$ (bzw. $\forall x \in \mathcal{D}(\tilde{f})$. Für eine eingeschränkte Funktion f auf $\mathcal{D}(\tilde{f})$, schreibe $\tilde{f} = f_{|\mathcal{D}(\tilde{f})}$.

Satz 14.33
Sei $f : D \subset X \to Y$ gleichmäßig stetig auf D, wobei X, Y sind metrische Räume , Y ist vollständig
$\Rightarrow$ es existiert eindeutige stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf $\bar{D}$ und $\tilde{f}$ ist auf gleichmäßige stetige auf $\bar{D}$.

▶ **Bemerkung**
Falls x_0 kein Häufungspukt von D ist, so kann man stets stetig auf $D \cup \{x_0\}$ fortsetzen (aber nicht eindeutig).

Folgerung 14.40
Sei $f : D \subset X \to Y$ linear, stetig, Y vollständig $\Rightarrow$ es existiert eindeutig stetige Fortsetzung von f auf $\bar{D}$.

15. Anwendung

Sei stets $f : D \subset X \to Y, X, Y$ metrische Räume, $D = \mathcal{D}(f)$.

Satz 15.1
Sei $f : D \subset Y \to Y$ stetig, $M \subset D$ kompakt $\Rightarrow f(M)$ ist kompakt.

Satz 15.2
Sei $f; D \subset X \to Y$ stetig, injektiv, D kompakt $\Rightarrow f^{-1} : f(D) \to D$ ist stetig.

Theorem 15.3 (Weierstraß)
Sei $f : D \subset X \to Y$ stetig, X metrischer Raum, $M \subset D$ kompakt, $M \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \exists x_{min}, x_{max} : \begin{cases} f(x_{min}) = \min\{f(x) \mid x \in M\} = \min_{x \in M} f(x), \\ f(x_{max}) = \max\{f(x) \mid x \in M\} = \max_{x \in M} f(x) \end{cases} \tag{1}$$

▶ **Bemerkung 15.4**
Theorem 3.3 ist wichtiger Satz für Existenz von Optimallösungen (stetige Funktion beseitzt auf kompakter Menge eine Minimum und Maximum). Folglich sind stetige Funktionen auf kompakten Mengen.

Satz 15.5
Sei $f : \mathbb{R}^n \to Y$ linear, Y normierter Raum $\Rightarrow f$ ist stetig auf $\mathbb{R}^n$.
Hinweis: Etwas allgemeiner hat man sogar $f : X \to Y$ linear, X, Y normierte Räume, $\dim X < \infty \Rightarrow f$ ist stetig. (Ist i.a nicht richtig für $\dim X = \infty$.)

Definition (Kurve)
Eine stetige Abbildung $f : I \subset X \to Y$, wobei I Intervall und Y metrischer Raum ist heißt Kurve in Y (gelegentlich wird auch Mange $f(I)$ als Kurve und f also zugehörige Parametrisierung bezeichnet).

Definition (bogenzusammenhängende Menge)
Menge $M \subset X$, wobei X ist metrische Raum, heißt bogenzusammenhängend (bogenweise zusammenhängend) falls $\forall a, b \in M \, \exists$ Kurve $f : [a, b] \to M$ mit $f(\alpha) = a, f(\beta) = b$.
Bemerkung: Eigentlich ist das die Definition für Wegzusammenhängend, leider ist das in der Literatur nicht eindeutig und manchmal wird zwischen Wegzusammenhängend und zusammenhängend noch das „echt“ bogenzusammenhängend unterschieden.

Definition (zusammenhängende Menge)
Menge $M \subset X$ heißt zusammenhängend, falls

$$A, B \subset M \text{ sind offen in } M, \text{ disjunkt}, \emptyset \Rightarrow M \neq A \cup B. \tag{2}$$

■ **Beispiel 15.6**

1) $x \in [0, 2\pi] \to (x, \sin x) \in \mathbb{R}^2$ ist Kurve in $\mathbb{R}^2$
2) $x \in [0,1] \to e^{i\pi x} \in \mathbb{C}$ oder $x \in [0,\pi] \to e^{i\pi} \in \mathbb{C}$ sind Kurven in $\mathbb{C}$
3) Sei Y normierter Raum, $a, b \in Y, f : [0,1] \to Y$ mit $f(t) = (1-t) \cdot a + t \cdot b$ ist Kurve (Strecke von a nach b)

■ **Beispiel 15.7**

Sei $X = \mathbb{R}^2, M = \{(x, \sin x) \mid x \in (0,1]\} \cup \{(0,0)\}$. Dann ist M zusammenhängend aber nicht bogenzusammenhängend.

Satz 15.9

Sei X metrischer Raum, $M \subset X$. Dann

1) $X = \mathbb{R} : M$ ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ M ist Intervall (offen, abgeschlossen, halboffen, beschränkt, unbeschränkt).
2) M ist bogenzusammenhängend $\Rightarrow$ M ist zusammenhängend.
3) Sei X normierter Raum, dann: M ist offen, zusammenhängend $\Rightarrow$ M ist bogenzusammenhängend.

Definition (Gebiet)

Sei X metrischer Raum, $M \subset X$ heißt Gebiet falls M offen und zusammenhängend ist.
Beachte: Gebiet in einem normiertem Raum ist sogar bogenzusammenhängend.
Offenbar: $M \subset X$ ist konvex $\Rightarrow$ M ist bogenzusammenhängend.

Satz 15.10

Sei $f : D \subset X \to Y$ stetig, wobei X, Y metrische Räume sind, dann gilt: $M \subset D$ ist zusammenhängend $\Rightarrow$ $f(M)$ ist zusammenhängend.

Theorem 15.11 (Zwischenwertproposition)

Sei $f : D \subset X \to \mathbb{R}, M \subset D$ zusammenhängend, $a, b \in M \Rightarrow f$ nimmt auf M jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

■ **Beispiel 15.13**

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig mit $f([a,b]) \subset [a,b] \Rightarrow$ besitzt Fixpunkt , d.h. $\exists x \in [a,b] \colon f(x) = x$.

Theorem 15.14 (Fundamentalproposition der Algebra)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynom vom Grad $n \geq 1$ (d.h $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0, a_j \in \mathbb{C}, a_n \neq 0, n \geq 1$) $\Rightarrow f$ besitzt (mindestens eine) Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ (d.h. $f(z_0) = 0$).

Folgerung 15.15

Jedes Polynom $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von Grad $n, f \neq 0$ besitzt genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ gezählt mit Vielfachen, d.h. $\exists z_1, \ldots, z_l \in \mathbb{C}$, paarweise verschieden (=verschieden) $k_1, \ldots, k_l \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, $a_n \in$

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $k_1 + \cdots + k_l = n$ und $f(z) = a_n \cdot (z - z_1)^{k_1} \cdot \cdots \cdot (z - z_l)^l \, \forall z \in \mathbb{C}$. Hier heißt k_j Vielfachheit der Nullstelle z_j.
Hinweis: In dem Satz 1.5 wurde gezeigt, das f höchstens n Nullstellen besitzt.

Definition (analytische Funktion)
Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt analytisch auf $B_R(z_0) \subset \mathbb{C}$ falls f auf $B_R(z_0)$ durch Potenzreihe in z_0 darstellbar ist, d.h.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \forall z \in B_R(z_0).$$

Satz 15.16
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch auf $B_R(z_0)$ und sei $B_r(z_1) \subset B_R(z_0)$ für $z_1 \in B_R(z_0), r > 0 \Rightarrow f$ ist analytisch auf $B_r(z_1)$.

Satz 15.17 (Identitätsproposition)
Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch auf $B_R(z_0)$, sei $z_n \to \tilde{z}, z_n \in B_R(z_0) \setminus \{\tilde{z}\}$ und $f(z_n) = g(z_n) \, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(f) = g(z) \, \forall z \in B_R(z_0)$.

► **Bemerkung 15.18**
Analytische Funktionen sind durch Werte auf „sehr kleinen“ Mengen bereits festgelegt (z.B exp, sin, cos sind auf $\mathbb{C}$ eindeutig durch Werte auf $\mathbb{R}$ festgelegt).

Überblick
Sei X metrischer Raum, Y normierter Raum.

- $B(X,Y) := \{f : X \to Y \mid \|f\|_\infty < \infty\}$ ist normierter Raum der beschränkten Funktionen mit $\|f\|_\infty = \sup\{\|f\|_Y \mid x \in X\}$.
- $C_b(X,Y) := \{f : X \to Y \mid \|f\|_\infty < \infty, f \text{ ist stetig}\}$ ist Menge der beschränkten stetigen Funktionen und offenbar eine linearer Unterraum von $B(X,Y)$ und damit auch Kern von R mit $\|\cdot\|_\infty$.
- $C(X,Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ ist steig}\}$, Menge der stetigen Funktionen ist offenbar ein Vektorraum (enthält unbeschränkte Funktionen, z.B. $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $x \in X = (0,1)$).

► **Bemerkung 15.20**
Falls X kompakt ist, dann kann man den Ausdruck $\|f\|_\infty < \infty$ in der Definition von $C_b(X,Y)$ weglassen (vgl. Theorem 3.3), d.h. $C_b(X,Y) = C(X,Y), f$ stetig $\Rightarrow X \to \|f(x)\|$ ist stetig $\overset{\text{Theorem 15.3}}{\Rightarrow} f$ ist beschränkt auf X. In diesem Fall ist auch $C(X,Y)$ mit $\|\cdot\|_\infty$ normierter Raum und $\|f\|_\infty = \max_{x \in M} \|f(x)\|_Y$.

Satz 15.21
Sei X metrischer Raum, Y Banachraum $\Rightarrow B(X,Y)$ und $C_b(X,Y)$ und Banachräume (mit $\|\cdot\|_\infty$).

Definition (Kontraktion)
Funktion $f : D \subset X \to X$, wobei X metrischer Raum ist, heißt Kontraktion (bzw. kontraktiv) auf $M \subset D$ falls

$$\exists L, 0 \leq L < 1 \colon d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in M.$$

D.h. f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$, folglich ist f auch stetig.

Theorem 15.22 (Banacherscher Fixpunktproposition)
Sei $f : D \subset X \to Y$ Kontraktion auf $M \subset D, X$ vollständiger metrischer Raum (z.B. Banachraum), M abgeschlossen und $f(M) \subset M$. Dann

(1) f besitzt genau einen Fixpunkt $\tilde{x}$ auf M (d.h. $\exists$ genau ein $\tilde{x} \in M \colon f(\tilde{x}) = \tilde{x}$).

(2) Für $\{x_n\}$ in M mit $x_{n+1} = f(x_n), x_0 \in M$ (beliebig) gilt:

$$x_n \to x \text{ und } d(x_n, \tilde{x}) \leq \frac{L^n}{1-L} \cdot d(x_0, x_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Theorem 3.22 ist eine wichtige Grundlage für Iterationsverfahren in der Numerik.

Partialbruchzerlegung

Definition (Pol der Ordnung k)
Sei $R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ rationale Funktion, d.h. $R(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ für Polynome f, g existieren mit

$$R(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{(z - z_0)^k \cdot \tilde{g}} \qquad \text{und} \qquad \tilde{f}(z_0) \neq 0, \tilde{g}(z_0) \neq 0.$$

Motivation: Gelgentlich ist gewisse additive Zerlegung von rationalen Funktionen wichtig (Integration) z.B.

$$\frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}.$$

Lemma 15.23
Sei $R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ rationale Funktion, $z_0 \in \mathbb{C}$ Pol der Ordnung $k \geq 1 \Rightarrow \exists! a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}, a_k \neq 0$ und $\exists!$ Polynom $\tilde{p}$ mit

$$R(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{(z - z_0)^i} + \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{g}(z)} = H(z) + \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{g}(z)} \tag{3}$$

$H(z)$ heißt Hauptteil von R in z_0. Beachte das $\frac{\tilde{p}}{\tilde{g}}$ keine Pole in z_0 hat.

Satz 15.24 (Partialbruchzerlegung)
Sei $R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ rationale Funktion, $R(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ für Polynome f, g. Sei $g(z) = \prod_{i=1}^{l} (z - z_i)^{k_i}$ gemäß Fundamentalproposition der Algebra(Theorem 3.14). Seien $z_1, \dots, z_l$ keine Nullstellen von f und seien $H_1, \dots, H_l$ Hauptteile von R in $z_1, \dots, z_l \Rightarrow$

$$\exists \text{ Polynom } p : R(z) = H_1(z) + \cdots + H_l(z) + p(z) \quad \forall z \neq z_j \, \forall j = 1, \dots, l$$

wobei $f(z) = p(z) \cdot g(z) + r(z) \, \forall z$ für Polynom r. $p = 0$ falls $\text{grad}(f) < \text{grad}(g)$ (vgl Satz 1.5 Polynomdivision)

Teil B

2. Semester

Kapitel V

Differentiation

16. Wiederholung und Motivation

Sei K^n n-dim. Vektorraum (VR) über Körper mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.

- Elemente sind alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ mit $x_1, \dots, x_n \in K$.
- Standardbasis ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ mit $e_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)$
- alle Normen auf K^n sind äquivalent (Satz 5.5)
  $\Rightarrow$ Kovergenz unabhängig von der Norm

  Verwende in der Regel euklidische Norm $\|x\|_2 = |x| = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$
- Skalarprodukt
  - $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j$ in $\mathbb{R}^n$
  - $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j \cdot y_j$ in $\mathbb{C}^n$
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung ($|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in K^n$)

16.1. Lineare Abbildungen

Eine lineare Abbildung ist homogen und additiv (siehe Abschnitt 1).

- Lineare Abbildung $A : K^n \to K^m$ ist darstellbar durch $m\times n$-Matrizen bezüglich der Standardbasis (beachte: A sowohl Abbildung als auch Matrix)
  - lineare Abbildung ist stetig auf endlich-dimensionalen Räumen (unabhängig von der Norm, siehe Satz 3.5)
  - transponierte Matrix: $A^T \in K^{n\times m}$
    Hinweis: $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ idR platzsparender als Zeilenvektor geschrieben, aber bei Matrix-Multiplikation x Spalten-Vektor, x^T Zeilenvektor, d.h.

$$\begin{aligned} x^T \cdot y &= \langle x, y\rangle, && \text{falls } m = n \\ x \cdot y^T &= x \otimes y \in K^{m\times n}, && \text{sog. Tensorprodukt} \end{aligned}$$

- $L(K^n, K^m) = \{A : K^n \to K^m,\ A \text{ linear}\}$ (Menge der linearen Abbildung, ist normierter Raum)
  - $\|A\| = \sup\{|Ax| \mid |x| \leq 1\}$ (Operatornorm , $\|A\|$ hängt i.A. von Normen auf K^n, K^m ab)

- $L(K^n, K^m)$ ist isomorph zu $K^{m\times n}$ als VR
  $\Rightarrow L(K^n, K^m)$ ist $m \cdot n$-dim. VR ($\Rightarrow$ alle Normen äquivalent, $\Rightarrow$ Konvergenz von $\{A_n\}$ von linearer Abbildungen in $L(K^n, K^m)$ ist normunabhängig)

  Nehmen in der Regel statt $\|A\|$ euklidische Norm $|A| = \sqrt{\sum_{k,l} |a_{kl}|^2}$.

  Es gilt:
  $$|Ax| \leq \|A\| \cdot |x| \text{ und } |Ax| \leq |A| \cdot |x|$$

- Abbildung $\tilde{f} : K^n \to K^m$ heißt affin linear, falls $\tilde{f}(x) = Ax + a$ für lineare Abbildung $A : K^n \to K^m, a \in K^m$

16.2. Landau-Symbole

Anmerkung
Eine Approximation besitzt zwangsläufig immer einen Fehler. Eine gute Approximation zeichnet sich dadurch aus, dass der Fehler bzw. Rest möglichst klein wird. Dieser Fehler wird mit LANDAU-Symbolen beschrieben. Dabei bedeutet anschaulich:

- $f = o(g)$: f wächst langsamer als g
- $f = \mathcal{O}(g)$: f wächst nicht wesentlich schneller als g

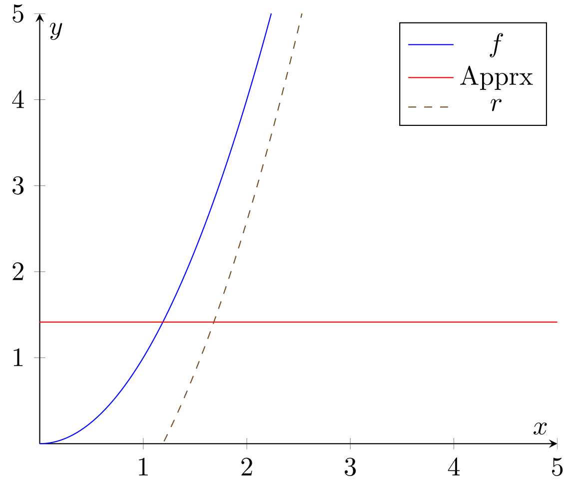
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, $g : D \subset K^n \to K$, $x_0 \in \overline{D}$. Dann:

- $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_o$ gdw. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0$
- $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to x_0$ gdw. $\exists \delta > 0, c \geq 0 : \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq c \; \forall x \in (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$

  wichtiger Spezialfall: $g(x) = |x - x_0|^k, k \in \mathbb{N}$

■ **Beispiel 16.1 (gute Approximation durch konstante Funktion nahe $x = x_0$)**
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, $x_0 \in D$ HP von D. Dann:

$$\begin{aligned} f \text{ stetig in } x_0 &\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}} f(x) = f(x_0) \\ &\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{f(x) = f(x_0) + o(1)} \text{ für } x \to x_0 \end{aligned} \tag{1}$$



Interpretation von (1): Setze $r(x) := f(x) - f(x_0)$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} r(x) = o(1)$ für $x \to x_0$

$$\Rightarrow r(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0, \tag{2}$$

d.h. $o(1)$ ersetzt eine „Rest-Funktion“ $r(x)$ mit Eigenschaft (2).

Anmerkung
Man kann als Approximation auch $x = 3$ wählen, allerdings stimmt dann die Aussage $r \to 0$ für $x \to x_0$ nicht mehr.

Wegen $o(1) = o(|x - x_0|^0)$ (d.h. $k = 0$) sagt man auch, Gleichung (1) ist die Approximation 0. Ordnung der Funktion f in der Nähe von x_0.

■ **Beispiel 16.2 (gute Approximation durch (affin) lineare Funktion nahe $x = x_0$)**
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, D offen. Was bedeutet

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + A(x - x_0)}_{\tilde{f} \text{ affin lineare Funktion}} + o(|x - x_0|),\ x \to x_0? \tag{3}$$

Zentrale Frage: Wie sollte ein guter Rest sein?

graph $\tilde{f}$ ist die n-dimensionale Ebene in K^{n+m} (affin-lin. UR)
graph f sollte sich an diese Ebene anschmiegen (graph $\tilde{f}$ =Tangentialebene)
$\Rightarrow$ Rest sollte sich an den Grafen der Nullfunktion anschmiegen

Sei

$$g(t) = \sup_{|x - x_0| \le t} |r(x)| \Rightarrow |r(x)| \le g(|x - x_0|) \quad \forall x \tag{4}$$

anschmiegen: $g(t) = o(1), t \to 0$ nicht ausreichend angenommen $g(t) = o(t), t \to 0$: dann ist für ein festes $v \in K^n$ mit $\|v\| = 1$

$$|r(x_0 + tv)| \leq g(t) \Rightarrow \frac{|r(x_0+tv) - r(x_0)|}{t} \leq \frac{g(t)}{t} \to 0$$
$$\Rightarrow \text{anschmiegen}$$

Wegen Gleichung (4) folgt: $\frac{|r(x)|}{|x-x_0|} \leq \frac{g(|x-x_0|)}{|x-x_=|} \to 0$
$\Rightarrow r(x) = o(|x - x_0|)$ für $x \to x_0 = o(1)|x - x_0|$
$\Rightarrow$ betrachte $\tilde{f}$ als gute lineare Approximation von f nahe $x = x_0$ falls Fehler $= f(x) - (f(x_0) - A(x - x_0)) = o(|x - x_0|)$ für $x \to x_0$
man sagt: Fehler wird schneller kleiner als $|x - x_0|$! $\tilde{f}$ heißt Approximation 1. Ordnung von f in x_0

Definition (Anschmiegen)
$f(x) + \underbrace{f(x_0) + A(x - x_0)}_{\tilde{A}(x)} = o(|x - x_0|)$,
d.h. die Abweichung wird schneller klein als $|x - x_0|$!

☺ Vielleicht hatten Sie eine andere Vorstellung von “anschmiegen“, aber wir machen hier Mathematik ☺

Satz 16.3 (Rechenregeln für Landau-Symbole)
Für $r_k, \tilde{r}_l, R_l : D \subset K^n \to K^m, x_0 \in D, k, l \in \mathbb{N}$ mit
$r_k(x) = o(|x - x_0|^k), \tilde{r}_l = o(|x - x_0|^l), R_l(x) = \mathcal{O}(|x - x_0|^l), x \to x_0$

1. $r_k(x) = o(|x - x_0|^j) = \mathcal{O}(|x - x_0|^j) \quad j \leq k$
   $R_l(x) = o(|x - x_0|^j) = \mathcal{O}(|x - x_0|^j) \quad j < l$
2. $\frac{r_k(x)}{|x-x_0|^j} = o(|x - x_0|^{k-j}) \quad j \leq k$
   $\frac{R_l(x)}{|x-x_0|^j} = \mathcal{O}(|x - x_0|^{l-j}) = o(|x - x_0|^{l-j-1}) \quad j \leq l$
3. $r_k(x) \pm \tilde{r}_l(x) = o(|x - x_0|^k) \quad k \leq l$
4. $r_k(x) \cdot \tilde{r}_l(x) = o(|x - x_0|^{k+l}), r_k(x) \cdot R_l(x) = o(|x - x_0|^{k+l})$

Beweis. Sei $\frac{|R_l(x)|}{|x-x_0|^l} \leq c$ nahe x_0, d.h. auf $(B_\delta(x_0) \backslash \{x_0\}) \cap D$ für ein $\delta > 0$

1. $\frac{r_k(x)}{|x-x_0|^j} = \frac{r_k(x)}{|x-x_0|^k}|x - x_0|^{k-j} \to 0$, folgl. $\frac{r_k(x)}{|x-x_0|^\delta}$ auch beschränkt nahe x_0
   $\frac{R_l(x)}{|x-x_0|^j} = \frac{R_l(x)}{|x-x_0|^l}|x - x_0|^{l-j} \to 0$, Rest wie oben
2. $\frac{r_k(x)}{|x-x_0|^j|x-x_0|^{k-j}} = \frac{r_k(x)}{|x-x_0|^k} \to 0$
   $\frac{R_l(x)}{|x-x_0|^j|x-x_0|^{l-j}} = \frac{R_l(x)}{|x-x_0|^l} \leq c$ nahe x_0, Rest wie oben
3. $\frac{r_k(x)}{|x-x_0|^k} \pm \frac{\tilde{r}_l(x)}{|x-x_0|^k} \stackrel{(2)}{=} o(1) \pm \underbrace{o(|x - x_0|^{l-k})}_{o(1)} \to 0$
4. $\frac{r_k(x) \cdot \tilde{r}_l(x)}{|x-x_0|^{k+l}} = \frac{r_k(x)}{|x-x_0|^k} \cdot \frac{\tilde{r}_l(x)}{|x-x_0|^l} \to 0$
   $\frac{|r_k(x) \cdot R_l(x)|}{|x-x_0|^{k+l}} = \frac{|r_k(x)|}{|x-x_0|^k} \cdot \frac{|R_l(x)|}{|x-x_0|^l} \to 0$ □

■ Beispiel 16.4

- offenbar in K^n: $|x - x_0|^k = \mathcal{O}(|x - x_0|^k) = o(|x - x_0|^{k-1})$, $x \to x_0$
- sei $f : D \subseteq K^n \to K^m$ stetig in $x_0 \in D$, dann gilt für $x \to x_0$

- $f(x) \cdot o(|x-x_0|^k) = (f(x_0)+o(1)) \cdot o(|x-x_0|^k) = o(|x-x_0|^k)$
- $\frac{1}{f(x)+o(1)} = \frac{1}{f(x)} + o(1) = \frac{1}{f(x_0)} + o(1)$, da alle Terme gegen $\frac{1}{f(x_0)}$ konvergieren.
  beachte: $o(1)$ steht jeweils für verschiedene Funktionen mit dieser Eigenschaft

- in $\mathbb{R}$ gilt für $x \to 0$:
  - $x^5 = o(|x|^4)$, $x^5 = o(|x|)$, $x^5 = \mathcal{O}(|x|^5)$, $x^5 = \mathcal{O}(|x|^3)$
  - $e^x = \mathcal{O}(1) = 3 + \mathcal{O}(1)$, $e^x = 1 + o(1) \neq 2 + o(1)$
  - $\sin(x) = \mathcal{O}(|x|)$, $\sin(x) = o(1)$, $x^3 \cdot \sin(x) = o(|x|^3)$, $e^x \cdot \sin(x) = o(1)$
  - $(1-\cos(x))x^2 = \mathcal{O}(|x|^2)x^2 = o(|x|^3)$
  - $\frac{1}{o(1)+\cos(x)} = e^x + o(1) = 1 + o(1)$

17. Ableitung

Definition (differenzierbar, Ableitung)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to K^m$, D offen, heißt differenzierbar in $x \in D$, falls es lineare Abbildung $A \in L(K^n, K^m)$ gibt mit

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(|x - x_0|), x \to x_0} \tag{1}$$

Abbildung A heißt dann Ableitung von f in x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bzw. $\mathrm{D}f(x_0)$ bezeichnet (statt dem Terminus Ableitung auch (totales) Differential, Frechet-Abbildung, Jacobi-Matrix, Funktionalmatrix).

Andere Schreibweisen: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$, $\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}$, $\mathrm{d}f(x_0), \ldots$

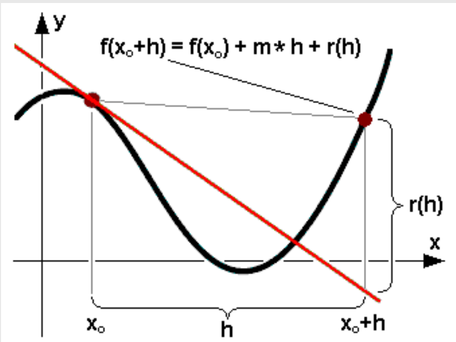
Somit ist Gleichung (1) gleichwertig mit

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), \text{ für } x \to x_0} \tag{2}$$

Anmerkung
Eine andere Erklärung der oben stehenden Definition wäre folgende:
Eine Funktion f ist genau dann differenzierbar an der Stelle x_0, wenn eine reelle Zahl m (die von x_0 abhängen darf) und eine (ebenfalls von x_0 abhängige) Funktion r (Fehler der Approximation) mit folgenden Eigenschaften existieren:

- $f(x_0 + h) = f(x_0) + m \cdot h + r(h)$
- Für $h \to 0$ geht $r(h)$ schneller als linear gegen 0, d.h. $\frac{r(h)}{h} \to 0$ für $h \to 0$

Die Funktion f lässt sich also in der Nähe von x_0 durch eine lineare Funktion g mit $g(x_0 + h) = f(x_0) + m \cdot h$ bis auf den Fehler $r(h)$ approximieren. Den Wert m bezeichnet man als Ableitung von f an der Stelle x_0.



Anmerkung
Neben der oben genannten Definition gibt es noch eine weitere Definition, die sich des Differentialquotienten bedient:

$$f \text{ differentierbar in } x_0 \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ exisitiiert}$$

Diese Definition lässt sich im Kontext komplexer oder mehrdimensionaler Funktionen nicht anwenden, zudem sind Beweise wegen des Quotienten leichter zu führen.

▶ **Bemerkung**
Affin lineare Abbildung $\tilde{A}(x) := f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ approximiert die Funktion f in der Nähe von x_0 und heißt Linearisierung von f in x_0 (man nennt Gleichung (1) auch Approximation 1. Ordnung von f in der Nähe von x_0).

Satz 17.1
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen. Dann:
f ist differenzierbar in $x_0 \in D$ mit Ableitung $f'(x_0) \in L(K^n, K^m)$ gdw. eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + r(x) \quad \forall x \in D$ (3)
für ein $r : D \to K^m$ mit $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{r(x)}{|x-x_0|} = 0$

b) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + R(x)(x-x_0) \quad \forall x \in D$ (4)
für ein $R : D \to L(K^n, K^m)$ $(\cong K^{m\times n})$ mit $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = 0$ (d.h. Matrizen $R(x) \xrightarrow{x\to x_0}$ Nullmatrix in $K^{m\times n}$)

c) $f(x) = f(x_0) + Q(x)(x-x_0) \quad \forall x \in D$ (5)
für ein $Q : D \to L(K^n, K^m)$ $(\cong K^{m\times n})$ mit $\lim\limits_{x\to x_0} Q(x) = f'(x_0)$ (d.h. Matrizen $Q(x) \xrightarrow{x\to x_0}$ Matrix $f'(x_0)$ in $K^{m\times n}$)

▶ **Bemerkung**
Es gilt:

$$\text{Gleichung (3)} \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|} = 0$$

Beweis. Aussage a) ist leicht zu zeigen, anschließend erfolgt per Ringschluss die Äquivalenz der anderen Definitionen.

zu a) Offensichtlich ist $r(x) = o(|x-x_0|)$, $x \to x_0$
$\Rightarrow$ a) $\Leftrightarrow$ f ist differenzierbar in x_0 mit Ableitung $f'(x_0)$

Ringschluss:

a) $\Rightarrow$ b): Sei $R : D \to K^{m\times n}$ gegeben durch

$$R(x) = \begin{cases} 0, & x = x_0 \\ \frac{r(x)}{|x-x_0|} \otimes (x-x_0)^T, & x \neq x_0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow\ R(x)(x-x_0) = \left(\frac{r(x)}{|x-x_0|^2} \otimes (x-x_0)^T\right) \cdot (x-x_0)$$
$$= \frac{r(x)}{|x-x_0|^2} \cdot \langle x-x_0, x-x_0\rangle = r(x) \quad \forall x \neq x_0$$

Wegen $0 = r(x_0) = R(x_0) \cdot (x-x_0)$ folgt

$$\lim_{x\to x_0} |R(x)| = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{|r(x)\otimes(x-x_0)^T|}{|x-x_0|^2} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{|r(x)|}{|x-x_0|} = 0$$

b) $\Rightarrow$ c): Setzte $Q(x) := f'(x_0) + R(x)\ \forall x \in D \Rightarrow$ Gleichung (5). Wegen $\lim\limits_{x\to x_0} Q(x) = f'(x_0)$ folgt c).

c) $\Rightarrow$ a): Setzte $r(x) := (Q(x) - f'(x)) \cdot (x-x_0)\ \forall x \in D \Rightarrow$ Gleichung (3). Wegen $|r(x)| \leq |Q(x) - f'(x_0)| \cdot |x-x_0|$ folgt

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{|r(x)|}{|x-x_0|} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} |Q(x) - f'(x_0)| = 0$$

□

Satz 17.2
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann:

1) f ist stetig in x_0
2) Die Ableitung $f'(x_0)$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis. 1. Sei $A, \tilde{A} \in L(K^n, K^m)$ Ableitungen von f in x_0, betrachte $x = x_0 + ty$, wobei $y \in K^n$ mit $|y| = 1$ fest, $t \in \mathbb{R}_{>0}$ (offenbar $|x-x_0| = t$)
$\Rightarrow (A-\tilde{A})(ty) = o(|ty|) \Rightarrow (A-\tilde{A})(y) = \frac{o(t)}{t} \to 0$
$\Rightarrow (A-\tilde{A})(y) = 0 \Rightarrow A - \tilde{A} = 0 \Rightarrow A = \tilde{A} \Rightarrow$ Behauptung

2. $\lim f(x) = 1 = \lim \big(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|)\big) = f(x_0) \Rightarrow$ Behauptung □

17.1. Spezialfälle für $K = \mathbb{R}$

1) $\underline{m = 1\text{: } f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$

$f'(x_0) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ ist Zeilenvektor, $f'(x_0)$ betrachtet als Vektor im $\mathbb{R}^n$ auch Gradient genannt.

Offenbar gilt $f'(x_0) \cdot y = \langle f'(x_0), y\rangle\ \forall y \in \mathbb{R}^n$ (Matrizenmultiplikation = Skalarprodukt)
$\Rightarrow$ Gleichung (4) hat die Form

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \langle f'(x_0), x-x_0\rangle}_{\text{affin lineare Funktion: } \tilde{A}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ (in } x)} + o\big(|x-x_0|\big) \tag{6}$$

Graph von f ist Fläche im $\mathbb{R}^{n\times 1}$, genannt Tangentialebene vom Graphen von f in $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

2) $\underline{n = 1\text{: } f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n}$

f (bzw. Bild $f[D]$) ist Kurve im $\mathbb{R}^n$ ($\cong \mathbb{R}^{m\times 1}$). Gleichung (4) kann man schreiben als

$$f(x_0+t) = \underbrace{f(x_0) + t\cdot f'(x_0)}_{\text{Affin lineare Abb. } \tilde{A}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m \text{ (in } t)} + o(t), t\to 0, t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}}_{\text{Differenzenquotient von } f \text{ in } x_0} = f'(x_0) + o(1), t\to 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}}_{\text{Differentialquotient}} = f(x_0) \tag{7}$$

beachte:

- f differenzierbar (diffbar) in $x_0 \Leftrightarrow$ Differentialquotient existiert in x_0
- Gleichung (7) nicht erklärt im Fall von $n > 1$

Interpretation für $m > 1$:

$f'(x_0)$ heißt Tangentenvektor an die Kurve in $f(x_0)$. Falls f nicht diffbar in x_0 bzw. x_0 Randpunkt in D und ist $f(x_0)$ definiert, so betrachtet man in Gleichung (7) auch einseitige Grenzwerte (vgl. Definition 78).

$\lim\limits_{t\downarrow 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = f'_r(x_0)$ heißt rechtsseitige Ableitung von f in x_0 (falls existent), analog ist $\lim\limits_{t\uparrow 0}$ die linksseitige Ableitung $f'_l(x_0)$.

3) $n = m = 1$: $f\colon D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (vgl. Schule)

$f'(x_0)\in\mathbb{R}$ ist Zahl und Gleichung (7) gilt (da Spezialfall von Punkt 2)).

Beobachtung: Punkt 2) gilt allgemein für $n = 1$, nicht für $n > 1$!

Folgerung 17.3
Sei $f : D\subset K\to K^n$, D offen. Dann:

$$\begin{aligned} & f \text{ ist differenzierbar in } x_0\in D \text{ mit Ableitung } f'(x_0)\in L(K,K^m) \\ \Leftrightarrow\quad & \exists f'(x_0)\in L(K,K^m) : \lim_{y\to 0}\frac{f(x_0+y)-f(x_0)}{y} = f'(x_0) \\ & \text{alternativ: } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \end{aligned} \tag{8}$$

17.2. Einfache Beispiele für Ableitungen

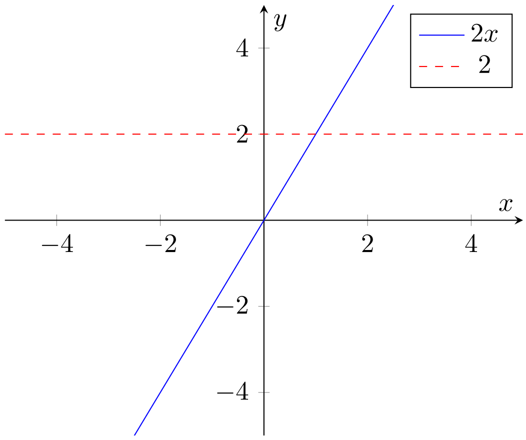
Beispiel 17.4 (affin lineare Funktionen)
Sei $f : K^n\to K^m$ affin linear, d.h.

$$f(x) = A\cdot x + a \quad \forall x\in K^n, \text{ mit } A\in L(K^n,K^m),\ a\in K^m \text{ fest}$$

Dann gilt für beliebiges $x_0 \in K^n$:

$$\begin{aligned} f(x) &= A \cdot x_0 + a + A(x - x_0) \\ &= f(x_0) + A(x - x_0) \\ \overset{(1)}{\Longrightarrow} &\ f \text{ ist diffbar in } x_0 \text{ mit } f'(x_0) = A \end{aligned}$$

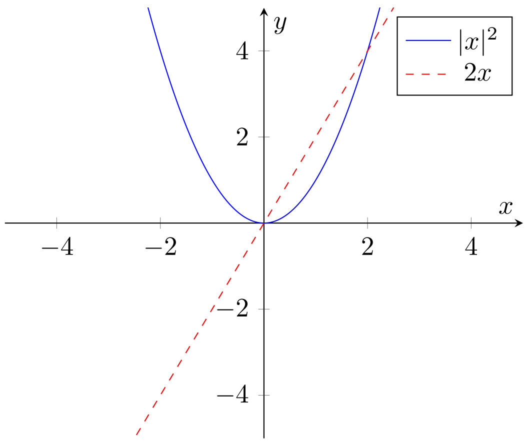
Insbesondere gilt für konstante Funktionen $f'(x_0) = 0$



■ **Beispiel 17.5 (quadratische Funktion)**
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|^2$
für beliebiges x_0 gilt:

$$\begin{aligned} |x - x_0|^2 &= \langle x - x_0, x - x_0 \rangle \\ &= |x|^2 - |x_0|^2 - 2\langle x_0, x - x_0 \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + 2\langle \underbrace{2x_0}_{\text{Ableitung}}, x - x_0 \rangle + \underbrace{|x - x_0|^2}_{o(|x - x_0|)}$
$\Rightarrow f$ ist differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = 2x_0$, offenbar ist f' stetig, also $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$



■ **Beispiel 17.6 (Funktionen mit höherem Exponent)**
Sei $f : K \to K$, $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$.

$k = 0$: $f(x) = 1\ \forall x \Rightarrow f'(x_0) = 0\ \forall x_0 \in \mathbb{C}$ (vgl. Beispiel 2.4)

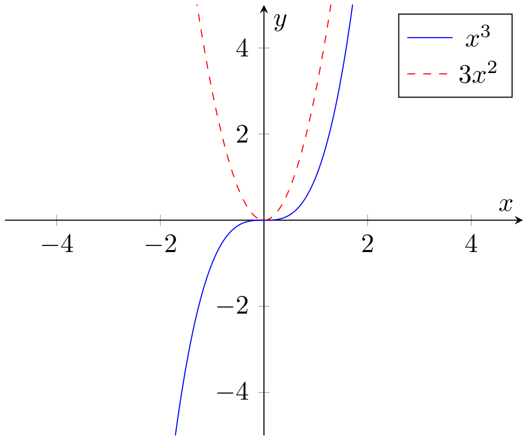
$k \geq 1$: Es gilt

$$(x_0 + y)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x_0^{k-j} \cdot y^j = x_0^k + k \cdot x_0^{k-1} \cdot y + o(y),\ y \to 0$$

$$\Rightarrow\ f(x_0 + y) = f(x_0) + k \cdot x_0^{k-1} \cdot y + o(y), y \to 0$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow}\qquad f'(x_0) = k \cdot x_0^{k-1}$$

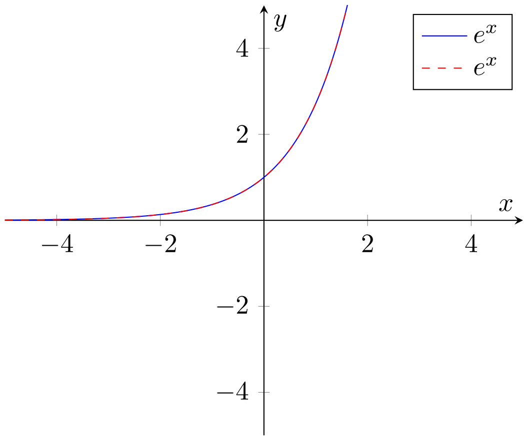
beachte: gilt in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$.



■ **Beispiel 17.7 (Exponentialfunktion)**

$f : K \to K$ mit $f(x) = e^x$

mit Differentialquotient $\Rightarrow f$ ist differenzierbar mit $f'(x_0) = e^{x_0} \Rightarrow f \in C^1(K)$



■ **Beispiel 17.8 (Betragsfunktion)**

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$

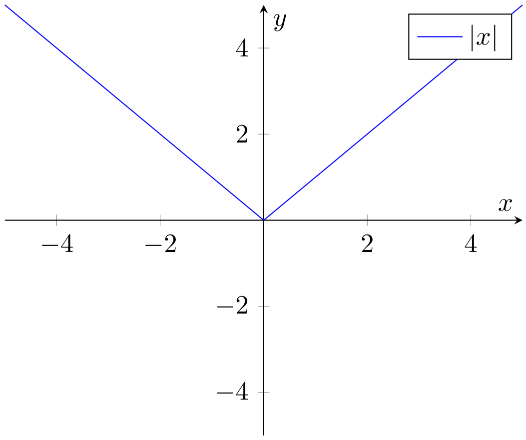
f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, denn angenommen, $f'(x_0) \in \mathbb{R}^n$ existiert und fixiere $y \in \mathbb{R}^n$, $|y| = 1$

$\Rightarrow |ty| = 0 + \langle f'(0), ty\rangle + o(|t|),\ t \to 0$

$\Rightarrow t \neq 0 \Rightarrow \frac{|t|}{t} = \langle f'(0), y\rangle + \frac{o(t)}{t} \Rightarrow \pm 1 =$ feste Zahl in $\mathbb{R}_+ \to 0 \Rightarrow$ ` $\Rightarrow$ Behauptung

Folglich: f stetig in $x_0 \not\Rightarrow f$ differenzierbar in x_0, das heißt Umkehrung von Satz 2.2 gilt nicht!

Hinweis: Es gibt stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in keinem Punkt x diffbar ist (siehe Hildebrand, Analysis 1 S. 192 oder Königsberger Analysis 1, Kap. 9.11)



Satz 17.9 (Rechenregeln)
Sei $D \in K^n$ offen, $f, g : D \to K^m$, $\lambda : D \to K$ diffbar in $x_0 \in D$
$\Rightarrow (f \pm g) : D \to K^m, (\lambda \cdot f) : D \to K^m, (f \cdot g) : D \to K$ sind diffbar in $x_0 \in D$ und $\frac{1}{\lambda} : D \to K$ ist diffbar in x_0, falls $\lambda(x_0) \neq 0$ mit

a) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0) \in K^{m \times 1}$

b) $(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot \lambda'(x_0) \in K^{m \times n}$

c) $(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0)^\mathsf{T} \cdot g'(x_0) + g(x_0)^\mathsf{T} \cdot f'(x_0) \in K^{m \times n}$

d) $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)'(x_0) = \frac{\mu'(x_0) \cdot \lambda(x_0) - \mu(x_0) \cdot \lambda'(x_0)}{(\lambda(x_0))^2}$

Beweis.

- $f(x_0) \pm g(x_0) + (f'(x_0))(x - x_0) \pm (g'(x_0))(x - x_0) + o(|x - x_0|) = f(x_0) \pm g(x_0) + \big(f'(x_0) \pm g'(x_0)\big)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \Rightarrow$ Behauptung
- $\lambda(x) f(x) = \big(\lambda(x_0) + \lambda'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)\big) \cdot \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_=|)\big) = \lambda(x_0) f(x_0) - \big(\lambda'(x_0) f(x_0) + \lambda(x_0) f'(x_0)\big)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \Rightarrow$ Behauptung
- analog
- zeige $\left(\frac{1}{\lambda}\right)'(x_0) = -\frac{\lambda'(x_0)}{\lambda(x_0)^2}$, Rest folgt mit $f = \mu$
  $\frac{1}{\lambda(x)} - \frac{1}{\lambda(x_0)} = \frac{\lambda(x_0) - \lambda(x)}{\lambda(x)\lambda(x_0)} = \ldots = \left(\frac{-\lambda'(x_0)}{\lambda(x_0)^2}\right)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \Rightarrow$ Behauptung □

■ Beispiel 17.10
Sei $f : D \in K^n \to K^m$, $c \in K$, f diffbar in $x_0 \in D$
$\xRightarrow{2.9\ b)} (c \cdot f) = c \cdot f'(x_0)$ (da c konst. Funktion $D \to K$)

■ Beispiel 17.11 (Polynom)
Sei $f : K \to K$, Polynom $f(x) = \sum\limits_{l=0}^{k} a_l x^l$

$\Rightarrow f$ diffbar $\forall x_0 \in K$ mit $f'(x_0) = \sum\limits_{l=1}^{k} l a_l x_0^{l-1}$

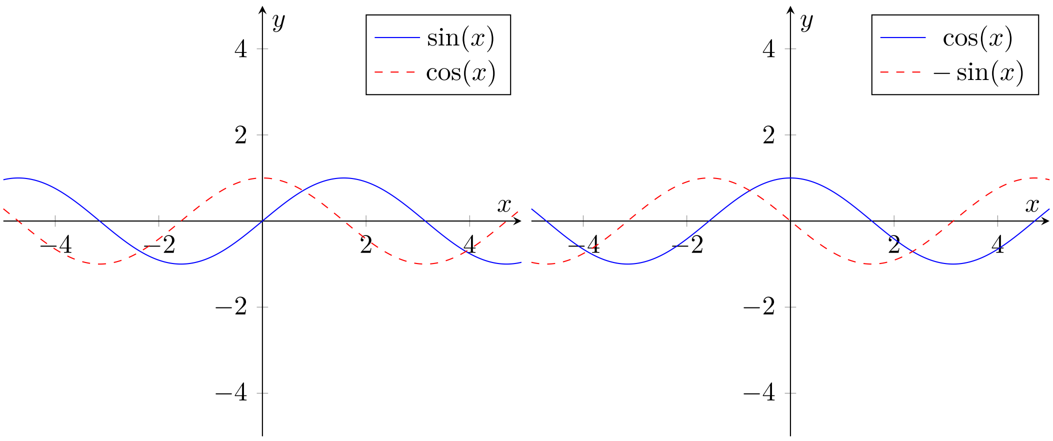
■ Beispiel 17.12
Sei $f = \frac{f_1}{f_2}$ rationale Funktion auf $\mathbb{R}$ (d.h. $f_1, f_2 : K \to K$ Polynom)
$\Rightarrow f$ ist diffbar auf $K \setminus \{$Nullstellen von $f_2\}$

■ **Beispiel 17.13 (Sinus und Cosinus)**
$\sin, \cos : K \to K$ ($\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) $\forall x_0 \in K$.

Denn:
$$\frac{\sin y}{y} = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2iy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^{iy} - 1}{iy} + \frac{e^{-iy} - 1}{-iy} \right) \xrightarrow[\text{vgl. (??)}]{y \to 0} 1,$$

folglich
$$\begin{aligned}
\lim_{y \to 0} \frac{\sin(x_0 + y) - \sin(x_0)}{y} &\overset{\star}{=} \lim_{y \to 0} \frac{2}{y} \cos\left(x_0 + \frac{y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y}{2}\right) \\
&= \lim_{y \to 0} \frac{2}{y} \cdot \sin\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \cos\left(x_0 + \frac{y}{2}\right) \\
&= \cos x_0 \quad \forall x_0 \in K
\end{aligned}$$

Analog für den Kosinus.



17.3. Rechenregeln

Definition
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen.

Falls f diffbar in allen $x_0 \in D$, dann heißt f differenzierbar auf D und Funktion $f' : D \to L(K^n, K^m)$ heißt Ableitung von f.

Ist zusätzlich Funktion $f' : D \to L(K^n, K^m)$ stetig, dann heißt Funktion f stetig differenzierbar (auf D) bzw. C^1-Funktion (auf D).

$C^1(D, K^m) := \{f : D \to K^m \mid f \text{ stetig diffbar auf } D\}$

■ **Beispiel 17.14**

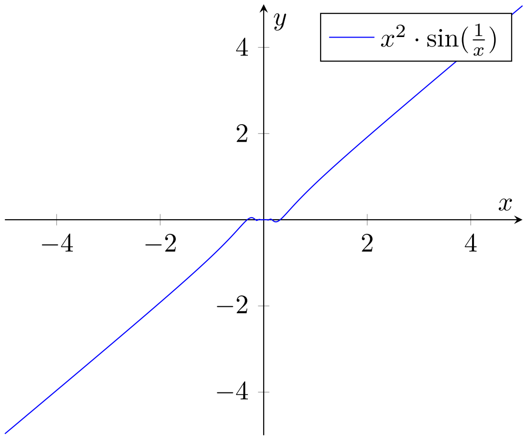
a) $f(x) = x^k\ \forall x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$
$\Rightarrow f'(x) = k \cdot x^{k-1}\ \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ offenbar stetige Funktion
$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

b) $f(x) = e^x\ \forall x \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow f'(x) = e^x\ \forall x \in \mathbb{C}$ stetig

$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$

c) $f(x) = |x|^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
$\Rightarrow f(x) = 2x \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, offenbar stetig
$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

■ **Beispiel 17.15**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0,\ f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \ \forall x \neq 0$.



Wegen

$$\frac{|x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}|}{|x|} \leq |x| \xrightarrow{x \neq 0} 0$$

folgt

$$\begin{aligned} & f(x) = o(|x|), x \to 0 \\ \Rightarrow\ & f(x) = f(0) + 0 \cdot (x - 0) + o(|x - 0|), x \to 0 \\ \Rightarrow\ & f \text{ diffbar in } x = 0 \text{ mit } f'(0) = 0 \end{aligned}$$

Rechenregeln liefern $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

Für $x_k := \frac{1}{k\pi}$ gilt:

$$\begin{aligned} & \lim_{k \to \infty} 2x_k \cdot \sin \frac{1}{x_k} = 0,\ \lim_{k \to \infty} \cos \frac{1}{x_k} = \pm 1 \\ \Rightarrow\ & \lim_{x \to 0} f'(x) \text{ existiert nicht} \\ \Rightarrow\ & f \notin C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

d.h. Ableitung einer stetigen Funktion muss nicht stetig sein.

Man beobachtet:

- Gleichung (1) bzw. ??? sind häufig ungeeignet zum Bestimmen von $f'(x_0)$
- Gleichung (8) ist durchaus nützlich für konkrete Fälle im Fall $n = 1$

  $\rightarrow$ Strategie: Zurückführung auf einfachere Fälle durch Rechenregeln und Reduktion

Folgerung 17.16
Seien λ, $\mu : D \rightarrow K$ diffbar in x_0, D offen und $\lambda(x_0) \neq 0$
$\Rightarrow \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) : D \rightarrow K$ diffbar in x_0 mit

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)'(x_0) = \frac{\lambda(x_0) \cdot \mu'(x_0) - \mu(x_0) \cdot \lambda'(x_0)}{\lambda(x_0)^2} \in K^{1\times n}$$

Beweis (Folgerung 2.16). Setzte in Satz 2.9 $f = \mu$ (d.h. $m = 1$) und betr. Produkt $\frac{1}{\lambda} \cdot \mu$. □

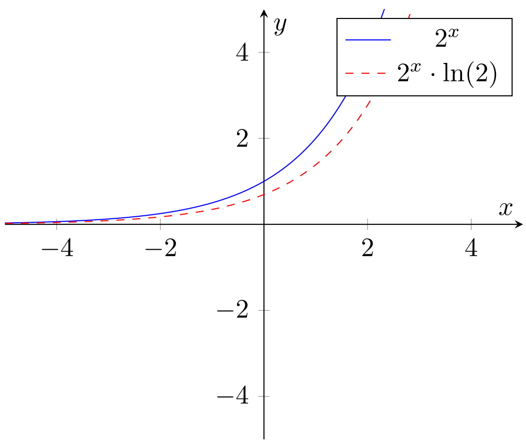
Satz 17.17 (Kettenregel)
Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, $g : \tilde{D} \subset K^m \rightarrow K^l$, D,$\tilde{D}$ offen, f diffbar in $x_0 \in D$, g diffbar in $f(x_0) \in \tilde{D}$
$\Rightarrow g \circ f : D \rightarrow K^l$ diffbar in x_0 mit $(g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ $(\in K^{l\times n})$

Beweis.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = g(f(x)) &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + o(|f(x) - f(x_0)|) \\ &= (g \circ f)(x_0) + g'(f(x_0)) \cdot f(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \qquad (9)\end{aligned}$$

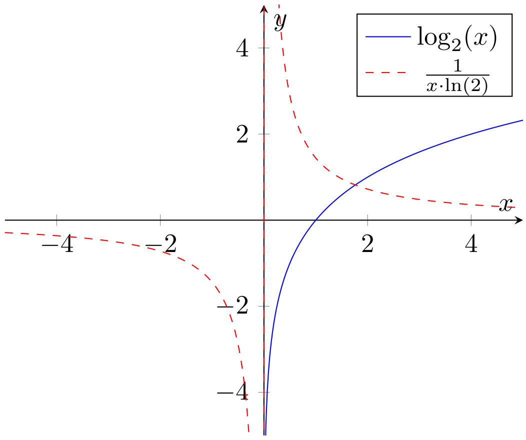
$\Rightarrow$ Behauptung □

■ **Beispiel 17.18 (x im Exponenten)**
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ $(a \in \mathbb{R}_{\geq 0}, a \neq 1)$. Offenbar $a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x\cdot\ln a}$
$\Rightarrow f(x) = g(h(x))$ mit $g(y) = e^y$, $h(x) = x \cdot \ln a \Rightarrow g'(y) = e^y$, $h'(x) = \ln a \Rightarrow f'(x) = e^{x\cdot\ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$



■ **Beispiel 17.19 (Logarithmus)**
$f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a \neq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$
mit $y = \log_a x$, $y_0 = \log_a x_0$ ist $x - x_0 = a^y - a^{y_0}$
Differentialquotient $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\cdot\ln a}$, also $f \in C^1(\mathbb{R}_{>0})$

Spezialfall: $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ $\forall x > 0$



■ **Beispiel 17.20**

Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^r\ (r \in \mathbb{R})$

Wegen $x^r = e^{r \cdot \ln x}$ liefert Kettenregeln (analog zu Beispiel 2.18)

$$f'(x_0) = \frac{r \cdot e^{r \cdot \ln x_0}}{x_0} = \frac{r \cdot x_0^r}{x_0} = r \cdot x_0^{r-1} \quad \forall x_0 > 0$$

Spezialfall: $f(x) = \frac{1}{x^k} \Rightarrow f'(x) = -\frac{k}{x^{k+1}}$

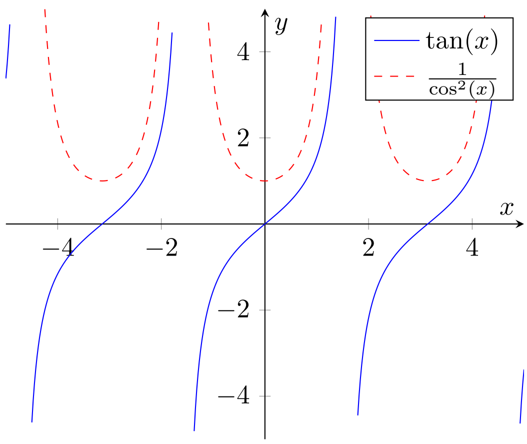
Zu Beispiel 2.15:

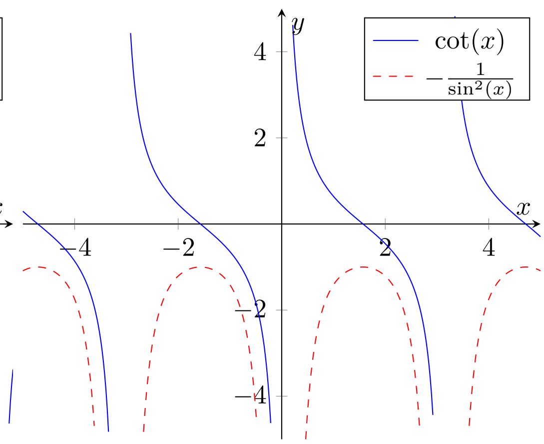
$$f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

■ **Beispiel 17.21 (Tangens und Cotangens)**

$\tan : K \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to K,\ \cot : K \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to K$

$$\begin{aligned} \xRightarrow{\text{Quotientenregel}} \tan'(x_0) &= \frac{\sin'(x_0)\cos(x_0) - \cos(x_0) \cdot \sin(x_0)}{(\cos(x_0))^2} \\ &= \frac{\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \frac{1}{\cos^2(x_0)} \qquad \forall x_0 \in \text{ Definitionsbereich} \\ \cot'(x_0) &= -\frac{1}{\sin^2(x_0)} \qquad \forall x_0 \in \text{ Definitionsbereich} \end{aligned}$$





Satz 17.22 (Reduktion auf skalare Funktionen)
Sei $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \subset K^n \to K^m$, D offen, $x_0 \in D$. Dann gilt:

$$f \text{ diffbar in } x_0 \Leftrightarrow \text{alle } f_j \text{ diffbar in } x_0 \ \forall j = 1, \ldots, m$$

Im Fall der Differenzierbarkeit hat man:

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix} \in K^{m\times n} \tag{10}$$

☺ Wenn Sie das nächste mal aus der Disko kommen, zuviel getrunken haben und den Namen ihrer Freundin nicht mehr kennen, sollten sie sich daran aber noch erinnern: ☺

▶ **Bemerkung 17.23**
Mit Satz 2.22 kann man die Berechnungen der Ableitungen stets auf skalare Funktionen $f : D \subset K^n \to K$ zurückführen. Die Matrix in Gleichung (10) besteht aus m Zeilen $f_j'(x_0) \in K^{1\times m}$.

■ **Beispiel 17.24**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \cos(2\pi t) \\ t \cdot \sin(2\pi t) \end{pmatrix}, \qquad f'(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) - t \cdot \sin(2\pi t) \cdot 2\pi \\ \sin(2\pi t) + t \cdot \cos(2\pi t) \cdot 2\pi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1},$$

und $f'(0) = \binom{1}{0}$, $f'(1) = \binom{1}{2\pi}$.

Lemma 17.25
Sei $f = (f_1, f_2) : D \subset K^n \to K^k \times K^l$, D offen, $x_0 \in D$.

Funktion f ist diffbar in x_0 genau dann, wenn $f_1 : D \to K^k$ und $f_2 : D \to K^l$ diffbar in x_0.

Im Falle der Differenzierbarkeit gilt

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ f_2'(x_0) \end{pmatrix} \in K^{(k+l)\times n} \tag{11}$$

Hinweis: Da $K^k \times K^l$ mit K^{k+l} identifiziert werden kann, kann man f auch als Abbildung von D nach K^{k+l} ansehen. Dementsprechend kann die Matrix in Gleichung (11) der Form

$$\begin{pmatrix} (k \times n) \text{ Matrix} \\ (l \times n) \text{ Matrix} \end{pmatrix}$$

auch als $((k + l) \times n)$-Matrix aufgefasst werden.

Beweis.
„⇒“ Man hat

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + R(x) \cdot (x - x_0),\ \ R(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0 \tag{12}$$

da $f'(x_0),\ R(x) \in L(K^n, K^k \times K^l)$

$$\Rightarrow\ f'(x_0) = (A_1, A_2),\ \ R(x) = \big(R_1(x), R_2(x)\big)$$

mit $A_1, R_1(x) \in L(K^n, K^k),\ A_2, R(x) \in L(K^n, K^l)$

$$\overset{(12)}{\Longrightarrow}\ \ f_j(x) = f_j(x_0) + A_j \cdot (x - x_0) + R_j(x)(x - x_0),\ \ R_j(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0 \tag{13}$$

$$\Rightarrow \quad f_j \text{ ist diffbar in } x_0 \text{ mit } f_j'(x_0) = A_j,\ j = 1, 2$$

$\Rightarrow$ Behauptung

„⇐“ (es gilt auch (13) mit $A_j = f_j'(x_0)$)
Setzte

$$A = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix},\ \ R(x) = \begin{pmatrix} R_1(x) \\ R_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\overset{(13)}{\Longrightarrow} A, R(x) \in L(K^n, K^k \times K^l)$$

$$\xrightarrow{\text{mit } A_j = f_j'(x_0)} f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + R(x)(x - x_0), R(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

$\Rightarrow f$ diffbar in x_0 und (11) gilt. □

Beweis (Satz 2.22). Mehrfache Anwendung von Lemma 2.25 (z.B. mit $k = 1, l = m - j$ für $j = 1, \ldots, m - 1$)□

18. Richtungsableitung und partielle Ableitung

Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, $x \in D$.

Ziel: Zurückführung der Berechnung der Ableitung $f(x)$ auf die Berechnung der Ableitung für Funktionen $\tilde{f} : \tilde{D} \subset K \to K$

- Reduktionssatz $\Rightarrow$ man kann sich bereits auf $m = 1$ einschränken
- für Berechnung der Ableitung von f ist neben den Rechen- und Kettenregeln auch der Differentialquotient verfügbar

Idee: Betrachte f auf Geraden $t \to x+t \cdot z$ durch $x \Rightarrow$ skalares Argument t, $t \in K \Rightarrow$ Differentialquotient.

Spezialfall: $z = e_j \Rightarrow$ Partielle Ableitung

Definition (Richtungsableitung)
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, $x \in D$, $z \in K^n$.

Falls $a \in L(K, K^m)$ $(\cong K^m)$ existiert mit

$$f(x + t \cdot z) = f(x) + t \cdot a + o(t),\ t \to 0,\ t \in K, \tag{1}$$

dann heißt f diffbar in x in Richtung z und $\mathrm{D}_z f(x) := a$ heißt Richtungsableitung von f in x in Richtung z (andere Bezeichnungen: $f(x; z)$, $\partial_z f(x)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x)$, $\partial f(x, z)$, $\dots$)

▶ **Bemerkung**

- Wegen $B_\varepsilon(x) \subset D$ für ein $\varepsilon > 0$ existiert $\tilde{\varepsilon}$ mit $x + t \cdot z \in D$ $\forall t \in B_{\tilde{\varepsilon}}(0) \subset K$
- $f'(x; 0)$ existiert offenbar stehts für $z = 0$ mit $f'(x; 0) = 0$

Satz 18.1
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, $x \in D$, $z \in K^n$. Dann:

$$\begin{aligned} & f \text{ diffbar in } x \text{ in Richtung } z \text{ mit } \mathrm{D}_z f(x) \in L(K, K^m) \\ \Leftrightarrow\ & \text{für } \varphi(t) = f(x + t \cdot z) \text{ existiert } \varphi'(0) \text{ und } \mathrm{D}_z f(x) = \varphi'(0) \qquad (2) \\ \Leftrightarrow\ & \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot z) - f(x)}{t} = a\ (\in L(K, K^m)) \text{ existiert und } \mathrm{D}_z f(x) = a \qquad (3) \end{aligned}$$

■ **Beispiel 18.2**
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x_1^2 + |x_2|$. Existiert eine Richtungsableitung in $x = (x_1, 0)$ in Richtung $z = (z_1, z_2)$?

Sei $\varphi(t) := f(x + t \cdot z) = (x_1 + t \cdot z_1)^2 + |t \cdot z_2| = \underbrace{x_1^2 + 2t \cdot x_1 z_1 + t^2 z_1^2}_{=\varphi_1(t)} + \underbrace{|t| \cdot |z_2|}_{=\varphi_2(t)}$

$\Rightarrow \varphi_1'(0) = 2 \cdot x_1 z_1$ existiert $\forall x_1, z_1 \in \mathbb{R}$
$\varphi_2'(0) = 0$ existiert nur für $z_2 = 0$ (vgl. Beispiel 2.8)
$\Rightarrow \varphi_1'(0) = 2x_1 z_1$ existiert nur für $x_1,\ z_1 \in \mathbb{R}$, $z_2 = 0$
$\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ Richtungsableitung von f existiert für alle $x = (x_1, 0)$ nur in Richtung $z = (z_1, 0)$ mit $\mathrm{D}_z f(x) =$

$2x_1z_1$

Frage: Existiert $\mathrm{D}_z f(x)\ \forall z$, falls f diffbar in x?

Satz 18.3
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, f diffbar in $x \in D$.
$\Rightarrow$ Richtungsableitung $\mathrm{D}_z f(x)$ existiert $\forall z \in K^n$ und

$$\mathrm{D}_z f(x) = f'(x) \cdot z\ (\in K^{m\times 1}) \tag{4}$$

Hinweis: Richtungsableitung ist linear in z!

Beweis. f diffbar in x

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + o(|y-x|),\ y \to x \\
&\xRightarrow{y=x+t\cdot z}\ f(x+tz) = f(x) + t\cdot f'(x)\cdot z + o(t),\ t\to 0 \\
&\xRightarrow{(1)}\ \text{Behauptung}
\end{aligned}$$

□

■ **Beispiel 18.4**
Betrachte $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|^2\ \forall x$

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(t) = |x+tz|^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i + tz_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2tx_iz_i + t^2z_i^2 \\
\Rightarrow\quad \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n 2x_iz_i + 2tz_i^2 \\
\xRightarrow{(2)}\quad \varphi'(0) &= 2\sum_{i=1}^n x_iz_i = 2\langle x, z\rangle = \mathrm{D}_z f(x) \quad \forall x, z \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

b) Beispiel 2.5 liefert $f'(x) = 2x\ \forall x \in \mathbb{R}^n$
$\xRightarrow{(4)}$ $\mathrm{D}_z f(x) = 2x\cdot z = 2\langle x, z\rangle\ \forall x, z \in \mathbb{R}^n$

folglich gilt: $|z| = 1$ und $x \in \mathbb{R}^n$ fest

- $\mathrm{D}_z f(x) = 0 \Leftrightarrow x \perp z$
- $\mathrm{D}_z f(x) =$ maximal (x fest) $\Leftrightarrow z = \frac{x}{|x|}$

18.1. Anwendung: Eigenschaften des Gradienten

Definition (Niveaumenge)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, f diffbar in $x \in D$.

$N_C := \{y \in D \mid f(x) = f(y)\}$ heißt Niveaumenge von f für $x \in \mathbb{R}$.

Definition (Tangentialvektor)
Sei $\gamma : (-\delta, \delta) \to N_C$ $(\delta > 0)$ Kurve mit $\gamma(0) = 0$, γ diffbar in 0.

Ein $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $z = \gamma'(0)$ für eine derartige Kurve γ heißt Tangentialvektor an N_C in x.

Offenbar gilt

$$\begin{aligned} & \varphi(t) = f(\gamma(t)) = c \\ \Rightarrow \quad & \varphi'(0) = f'(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \mathrm{D}_{\gamma'(0)} f(x) \overset{\star}{=} \langle f'(x), \gamma'(0) \rangle = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Satz 18.5 (Eigenschaften des Gradienten)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, f diffbar in $x \in D$. Dann:

1) Gradient $f'(x)$ steht senkrecht auf der Niveaumenge $N_{f(x)}$, d.h. $\langle f'(x), z \rangle = 0$ $\forall$ Tangentialvektoren z an $N_{f(x)}$ in x

2) Richtungsableitung $\mathrm{D}_z f(x) = 0$ $\forall$ Tangentialvektoren z an $N_{f(x)}$ in x

3) Gradient $f(x)$ zeigt in Richtung des steilsten Anstieges von f in x und $|f'(x)|$ ist der steilste Anstieg, d.h. falls $f'(x) \neq 0$ gilt für Richtung $\tilde{z} := \frac{f'(x)}{|f'(x)|}$

$$D_{\tilde{z}} f(x) = \max \{ \mathrm{D}_z f(x) \in \mathbb{R} \mid z \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |z| = 1 \} = |f(x)|$$

(beachte: EUKLIDische Norm wichtig!)

Beweis.

1) folgt direkt aus (5),(4)

2) analog oben

3) für $|z| = 1$ gilt

$$\begin{aligned} & \mathrm{D}_z f(x) = \langle f'(x), z \rangle = |f'(x)| \langle \tilde{z}, z \rangle \\ \overset{\star}{\leq} \; & |f'(x)||\tilde{z}||z| = |f'(x)| = \frac{\langle f'(x), f'(x) \rangle}{|f'(x)|} = \langle f'(x), \tilde{z} \rangle \overset{(4)}{=} \mathrm{D}_{\tilde{z}} f(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung ☐

Feststellung: für $f : D \subset K^n \to K^m$: die lineare Abbildung $f'(x) : K^n \to K^m$ ist durch Kenntnis für n linear unabhängige Vektoren bestimmt
$\overset{(4)}{\Longrightarrow}$ $f'(x)$ eindeutig bestimmt durch Kenntnis von

$$\mathrm{D}_{e_j} f(x) = f'(x) \cdot e_j \ (\in K^{m \times 1}) \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

Definition (partielle Ableitung)
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, $x \in D$ (nicht notwendigerweise diffbar in x).

Falls Richtungsableitung $D_{e_j} f(x)$ existiert, heißt f partiell diffbar bezüglich x_j im Punkt x und $D_{e_j} f(x)$ heißt partielle Ableitung von f bezüglich x_j in x.

Schreibweisen: $\frac{\partial}{\partial z} f(x)$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \mathrm{D}_j f(x), f_{x_j}(x), \ldots$

Wegen $f(x + te_j) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ liefert Satz 3.1:

Folgerung 18.6
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to K^m$, D offen. Dann:

$$\begin{aligned} & f \text{ ist partiell diffbar bezüglich } x_j \text{ in } x \text{ mit Ableitung } \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \\ \Leftrightarrow\ & \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1,\dots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_n) - f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_n)}{t} = a \text{ existiert} \\ & \text{und } \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = a \end{aligned} \tag{6}$$

▶ **Bemerkung 18.7**
Zur Berechnung von $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$ differenziert man skalare Funktionen
$x_j \to f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_n)$ (d.h. alle x_k mit $k \neq j$ werden als Parameter angesehen).

■ **Beispiel 18.8**
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 \sin x_2 + e^{x_3 - x_1}$, damit

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) = 2x_1 \sin x_2 - e^{x_3-x_1} \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = f(x) = x_1^2 \cos x_2 \qquad \frac{\partial}{\partial x_3} f(x) = e^{x_3-x_1}$$

Folgerung 18.9
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, f diffbar in $x \in D$

$$\Rightarrow \quad D_z f(x) = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \quad \forall z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{R} \tag{7}$$

Beweis. (4) liefert

$$D_z f(x) = f'(x) \cdot z = f'(x) \cdot \sum_{j=1}^n z_j \cdot e_j = \sum_{j=1}^n z_j \left(f'(x) \cdot e_j\right) = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$$

□

■ **Beispiel 18.10**
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$. f ist diffbar nach Beispiel 3.4
$\to \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = 2x_j$ und $j = 1,\dots,n$
$\overset{(7)}{\Longrightarrow} \mathrm{D}_z f(x) = \sum_{j=1}^n 2x_j \cdot z_j = 2\langle x, z\rangle$ (vgl. Beispiel 3.4)

Theorem 18.11 (Vollständige Reduktion)
Sei $f = (f_1,\dots,f_m) : D \subset K^n \to K^m$, D offen, f diffbar in $x \in D$. Dann:

$$f'(x) \overset{(a)}{=} \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix} \overset{(b)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \ \dots\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \right) \overset{(c)}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(x) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(x) \end{pmatrix}}_{\text{JACOBI-Matrix}} \in K^{m\times n} \tag{8}$$

▶ **Bemerkung 18.12**
Falls f diffbar in x, dann reduziert Theorem 3.11 die Berechnung von $f'(x)$ auf Ableitung skalarer Funktionen $\tilde{f} : \tilde{D} \subset K \to K$.

Beweis (Theorem 3.11).

zu a) Satz 2.22

zu b) Benutze $f'(x) \cdot z = \mathrm{D}_z f(x)$ und Folgerung 3.9

zu c) Entweder $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_1(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_j} f_n(x)\right)^{\mathsf{T}}$ oder $f_j'(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f_j(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f_j(x)\right)$, sonst analog zu b) □

][Frage] Gilt die Umkehrung von Theorem 3.11 (Satz 3.3), d.h. falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$ bzw. alle Richtungsableitungen $\mathrm{D}_z f(x)$ existieren, ist dann f diffbar in x? Nein!

■ **Beispiel 18.13**

Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_2^2}{x_1}, & x_1 \neq 0 \\ 0, & x_1 = 0 \end{cases}$$

Berechne Richtungsableitungen in $x = 0$ mittels (3).

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_z f(0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(0 + tz) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(tz)}{t} \\ \Rightarrow \mathrm{D}_z f(0) &= \lim_{t \to 0} \frac{t^2 z_2^2}{t^2 z_1^2} = \frac{z_2^2}{z_1^2} \quad \forall z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2,\ z = 0 \end{aligned}$$

Betrachte möglicherweise problematische Richtung $z = (0, z_2)$

$$\begin{aligned} D_{(0,z_2)} f(0) &= \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0 \\ \Rightarrow \mathrm{D}_z f(0) &\text{ existiert } \forall z \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

aber ist f überhaupt diffbar? $\lim\limits_{n \to 0} f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to 0} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0 = f(0)$

$\Rightarrow f$ nicht stetig in $x = 0 \xRightarrow{\text{Satz 2.2}} f$ nicht diffbar.

Ausblick: Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_j} f_j(x)$ stetige Funktionen in $x \in D$
$\Rightarrow f$ diffbar in x und Gleichung (8) gilt.

18.2. ℝ-differenzierbar und ℂ-differenzierbar

Sei $f : D \subset K^n \to K^m$ ist diffbar in $z_0 \in D$, D offen

$\Leftrightarrow$ eine k-lineare Abbildung $A : K^n \to K^m$ existiert, die die Funktion f in z_0 „lokal approximiert".

$\to$ man müsste eigentlich genauer sagen: f ist k-diffbar in z_0 wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Jeder VR über $\mathbb{C}$ kann auch als VR über $\mathbb{R}$ betrachtet werden (nicht umgekehrt!) und jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung zwischen $\mathbb{C}$-VR kann auch als $\mathbb{R}$-linear betrachtet werden

$\Rightarrow$ jede $\mathbb{C}$-diffbare Funktion $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ ist auch $\mathbb{R}$-diffbar.

Die Umkehrung gilt i.A. nicht!

■ **Beispiel 18.14**

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \overline{z}$.

a) f ist additiv und $f(tz) = t \cdot f(z)\ \forall t \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow f$ ist $\mathbb{R}$-linear.

Wegen $f(z) = \overline{z} = \overline{z_0} + \overline{z - z_0} = f(z_0) + f(z - z_0) + 0$ folgt: $\mathbb{R}$-diffbar in $z_0\ \forall Z - 0 \in \mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}$-Ableitung $f'(z_0) = 1$

b) Angenommen, f ist $\mathbb{C}$-diffbar in $z_0 \in \mathbb{C}$.
$\Rightarrow f'(z_0) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\overline{z_0 + z} - \overline{z}}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z} = \pm 1 \Rightarrow \lightning$ (Grenzwert existiert nicht)
$\Rightarrow f$ nicht $\mathbb{C}$-diffbar

Definition ($\mathbb{R}$-differenzierbar)

$f : D \subset X \to Y$, D offen, $(X, Y) = (\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ bzw. $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}^m)$ oder $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ heißt $\mathbb{R}$-diffbar in $z_0 \in D$, falls (1) im Abschnitt 2 gilt mit entsprechender $\mathbb{R}$-linearer Abbildung $A : X \to Y$ gibt.

beachte: falls X oder Y nur VR über $\mathbb{R}$, dann $\mathbb{C}$-diffbar nicht erklärt.

Spezialfall: Sei $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, D offen, $z_0 \in D$. Vergleiche $\mathbb{R}$-diffbar und $\mathbb{C}$-diffbar:

Sei f $\mathbb{R}$-diffbar in z_0, d.h. es existiert eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + A \cdot z + o(|z|z),\ z \to z_0 \tag{9}$$

$$\text{für } z = x,\ x \in \mathbb{R} : A(1) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + x) - f(z_0)}{x} =: f_x(z_0)$$

$$\text{für } z = iy,\ y \in \mathbb{R} : A(i) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + iy) - f(z_0)}{y} =: f_y(z_0) \tag{10}$$

Nenne $f_x(z_0)$, $f_y(z_0)$ partielle Ableitung von f in z_0. Sei f $\mathbb{C}$-diffbar in x_z, d.h.

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + \underbrace{f'(z_0)}_{\in\mathbb{C}} \cdot z + o(|z|)$$

$$\overset{(10)}{\Longrightarrow} f'(z_0) = f_x(z_0) = -i f_y(x_0) \tag{11}$$

Satz 18.15

Sei $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, D offen, $z_0 \in D$. Dann:

$$f\ \mathbb{C}\text{-diffbar in } z_0 \quad \Leftrightarrow \quad f\ \mathbb{R}\text{-diffbar in } z_0 \text{ mit } f_x(z) = -i f_y(z_0) \tag{12}$$

Beweis.

„$\Rightarrow$“ vgl. oben (11)

„$\Leftarrow$“ mit $z = x + iy$ liefert (9)

$$\begin{aligned} f(z_0 + z) &= f(z_0) + A(x + iy) + o(|z|) \qquad = f(z_0) + x \cdot A(1) + yA(i) + o(|z|) \\ &= f(z_0) - f_x(z_0)x + f_y(z_0)y + o(|z|) \overset{(12)}{=} f(z_0) + f_x(z_0)(x + iy) + o(|z|) \\ &= f(z_0) + \underbrace{f_x(z_0)}_{=:f'(z_0)\in\mathbb{C} \text{ als } \mathbb{C}\text{-Ableitung}} \cdot z + o(|z|) \end{aligned}$$

□

18.3. Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

Identifiziere $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f} : \tilde{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gemäß $z = x + iy \mathrel{\hat{=}} \binom{x}{y}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \mathrel{\hat{=}} \binom{u(x,y)}{v(x,y)} = \tilde{f}(x, y)$

Lineare Algebra: $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ linear $\Leftrightarrow \exists w \in \mathbb{C} : Az = wz \ \forall z \in \mathbb{C}$

$$\tilde{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ \mathbb{R}\text{-linear} \Leftrightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ bezüglich Standardbasis.}$$

Lemma 18.16
Sei $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linear. Dann:

$$\begin{aligned} &A \text{ ist auch } \mathbb{C}\text{-linear, d.h. } \exists w = \alpha + i\beta : Az = wz \ \forall z \in \mathbb{C} \\ \Leftrightarrow \ &\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : A(x + iy) \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Beweis. Selbststudium □

Somit: $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entspricht spezieller $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Definition (Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen)
Falls $\mathbb{R}$-diffbar in z_0 liefert (11)

$$f_x(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0), \qquad f_y(z_0) = u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)$$

folglich

$$\text{Gleichung (12)} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0) \end{aligned}}_{\text{Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen}} \tag{13}$$

Somit: $\mathbb{C}$-lineare Abbilung $z \to f'(z_0)$ entspricht $\mathbb{R}$-linearer Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -v_y & v_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hinweis: $\mathbb{C}$-diffbare Funktionen $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ werden in der Funktionentheorie untersucht.

Es gilt z.B. f $\mathbb{C}$-diffbar auf $D \Rightarrow$ Ableitung $f' : D \to \mathbb{C}$ auch $\mathbb{C}$-diffbar auf $D \Rightarrow f$ beliebig oft diffbar auf D!

19. Mittelwertsatz und Anwendung

Definition (Maximum, Minimum)
Wir sagen, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ besitzt Minimum bzw. Maximum auf D, falls eine Minimalstelle bzw. Maximalstelle $x_0 \in D$ existiert mit

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad f(x) \geq f(x) \qquad \forall x \in D \tag{1}$$

f hat ein lokales Minimum bzw. lokales Maximum in $x_0 \in D$ falls

$$\exists \varepsilon > 0 : f(x_0) \leq f(x) \qquad f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in B_\varepsilon(x_0 \cap D) \tag{2}$$

Hat man in (1) bzw. (2) für x und x_0 „<“ bzw. „>“, so sagt man strenges (lokales) Minimum bzw. Maximum.

Hinweis: Es gilt:

f hat Minimum auf D $\overset{\text{vgl. Abschnitt 3}}{\Longleftrightarrow}$ $\min\{f(x) \mid x \in D\}$ existiert (das heißt, $\inf\{\dots\}$ wird angenommen)

Analog für Maximum.

Theorem 19.1 (notwendige Optimalitätsbedingung)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, f sei diffbar in $x \in D$ und habe lokales Minimum bzw. Maximum in x_0. Dann:

$$f'(x_0) = 0 \quad (\in \mathbb{R}^{1\times n}) \tag{3}$$

▶ **Bemerkung 19.2**

- Theorem 4.1 ist neben dem Satz von Weierstraß (Theorem 3.3) der wichtigste Satz für Optimierungsprobleme, denn (3) dient der Bestimmung von „Kandidaten“ für Minimal- und Maximalstellen.
- (3) besagt, dass die Tangentialebene an den Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$ horizontal ist.

Beweis. Für Minimum (Maximum analog) fixiere beliebiges $z \in \mathbb{R}^n$.

D offen

$\Rightarrow \quad \exists \delta > 0 : x_0 + t \cdot z \in D \ \forall t \in (-\delta, \delta)$

f diffbar in x_0, Minimum in x_0

$\Rightarrow \quad 0 \leq f(x_0 + t \cdot z) - f(x_0) = t \cdot f'(z_0) \cdot z + o(t),\ t \to 0$

$\overset{t>0}{\Longrightarrow} \quad 0 \leq f'(x_0) \cdot z + o(1)$

$\overset{t\to 0}{\Longrightarrow} \quad 0 \leq f'(x_0) \cdot z \ \forall z \in \mathbb{R}^n$

$\overset{\pm z}{\Longrightarrow} \quad f'(x_0) \cdot z = 0 \ \forall z \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$ □

Einfache, aber wichtige Anwendung:

Satz 19.3 (Satz von Rolle)
Sei $f : [a, b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $-\infty < a < b < \infty$, f diffbar auf (a, b) und $f(a) = f(b)$.
$\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$

Beweis. f stetig, $[a, b]$ kompakt
$\xRightarrow{\text{Theorem 3.3}} \exists x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \ \forall x$

- Angenommen, $f(x_1) = f(x_2) = f(a) \Rightarrow f$ konstante Funktion $\Rightarrow f'(\xi) = 0 \ \forall \xi \in (a, b)$
- Andernfalls sei $f(x_1) < f(a) \Rightarrow \xi := x_1 \in (a, b) \xRightarrow{\text{Theorem 4.1}} f'(\xi) = 0$
- analog $f(x_2) > f(a)$ □

Definition (abgeschlossenes, offenes Segment)
Setze für $x, y \in K^n$

- $[x, y] := \{x + t(y - x) \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0, 1]\}$ abgeschlossenes Segment (abgeschlossene Verbindungsstrecke)
- $(x, y) := \{x + t(y - x) \in \mathbb{R}^n \mid t \in (0, 1)\}$ offenes Segment (offene Verbindungsstrecke)

Theorem 19.4 (Mittelwertsatz)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, f diffbar auf D und seien $x, y \in D$ mit $[x, y] \subset D$. Dann

$$\exists \xi \in (x, y) : f(y) - f(x) = f'(\xi) \stackrel{\star}{\cdot} (y - x) \tag{4}$$

▶ **Bemerkung 19.5**

- Für $n = 1$ schreibt man (4) auch als
$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad \text{falls } x \neq y.$$
- Der Mittelwertsatz (MWS) gilt nicht für $\mathbb{C}$ oder $m \neq 1$.
- Theorem 4.4 gilt bereits für $D \subset \mathbb{R}^n$ beliebig, f stetig auf $[x, y] \subset D$, f diffbar auf $(x, y) \subset \operatorname{int} D$.

Beweis. Setzte $\varphi(t) = f(x + t(y - x)) - \big(f(y) - f(x)\big)t \ \forall t \in [0, 1]$

$\xRightarrow{f \text{ diffbar}} \quad \varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi(0) = \varphi(1) = f(x)$

φ diffbar auf $(0, 1)$ (verwende Kettenregel) mit

$$\varphi'(t) = f'(x + t(y - x)) \cdot (y - x) - \big(f(y) - f(x)\big) \tag{5}$$

$\xRightarrow{(5)} \quad f(y) - f(x) = f'(\underbrace{x + \tau(y - x)}_{=:\xi \in (x,y)}) \cdot (y - x)$

$\Rightarrow$ Behauptung □

Satz 19.6 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz in $\mathbb{R}$)
Seien $f, g : [x, y] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (x, y) $(x, y \in \mathbb{R},\ x < y)$. Dann

$$\exists \xi \in (x, y) : \big(f(y) - f(x)\big) \cdot g'(\xi) = \big(g(y) - g(x)\big) f'(\xi)$$

Beweis. Sei $h(t) := \big(f(y) - f(x)\big)g(t) - \big(g(y) - g(x)\big)f(t)\ \forall t \in [x, y]$

$\Rightarrow$ $h : [x, y] \to \mathbb{R}$ stetig, diffbar auf (x, y), $h(x) = h(y)$

$\overset{\text{Satz 4.3}}{\Longrightarrow}$ $\exists \xi \in (x, y) : 0 = h'(\xi) = \big(f(y) - f(x)\big)g'(\xi) - \big(g(y) - g(x)\big)f'(\xi)$

$\Rightarrow$ Behauptung □

Frage: Der MWS gilt für $m = 1$. Was ist bei $m > 1$?

Folgerung 19.7
Sei $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D offen, diffbar auf D, $[x, y] \subset D$. Dann

$$\exists \xi_1, \ldots, \xi_m \in (x, y) : f(y) - f(x) = \begin{pmatrix} f_1'(\xi_1) \\ \vdots \\ f_m'(\xi_m) \end{pmatrix} \cdot (y - x) \tag{6}$$

Beweis. Gleichung (6) ist äquivlanet zu m skalaren Gleichungen

$$f_j(y) - f_j(x) = f_j'(\xi_j) \cdot (y - x), \quad j = 1, \ldots, m$$

und diese Folgen direkt aus Theorem 4.4 für $f_j : D \to \mathbb{R}$. □

Frage: Ist in (6) auch $\xi_1 = \ldots = \xi_m$ möglich? Im Allgemeinen nein.

■ **Beispiel 19.8**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = \binom{\cos x}{\sin x}\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Angenommen, $\exists \xi \in (0, 2\pi) : f(2\pi) - f(0) = f'(\xi) \cdot (2\pi - 0) = 0$

$\Rightarrow$ $0 = f'(\xi) = \binom{-\sin \xi}{\cos \xi}$, d.h. $\sin \xi = \cos \xi = 0$

$\Rightarrow$ $\lightning$

$\Rightarrow$ $\xi_1 = \xi_2$ in (6) ist nicht möglich.

Ausweg: Für $m > 1$ gilt statt (4) Abschätzung (7), die meist ausreicht und ebenso richtig ist wie der MWS.

Theorem 19.9 (Schrankensatz)
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, f diffbar auf D. Seien $x, y \in D$, $[x, y] \subset D$. Dann

$$\exists \xi \in (x, y) : |f(y) - f(x)| \leq |f'(\xi)(y - x)| \leq \|f'(\xi)\| \cdot |y - x| \tag{7}$$

beachte: Theorem 4.9 gilt auch für $K = \mathbb{C}$.

Beweis. Sei $f(x) \neq f(y)$ (sonst klar). Setzte $v := \frac{f(y)-f(x)}{|f(y)-f(x)|} \in K^m$, offenbar $|v| = 1$.

Betrachte $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) := \mathfrak{Re}\langle f(x+t(y-x)), v\rangle$ Da f diffbar, gilt

$$\langle f(x+s(y-x)), v\rangle = \langle f(x+t(y-x)), v\rangle + \langle f'(x+t(y-x)) \cdot (s-t)(y-x), v\rangle + \underbrace{o(|s-t| \cdot |y-x|)}_{=o(|s-t|)},\ s \to t$$

und damit ist auch φ diffbar auf $(0,1)$ mit

$$\varphi'(t) = \mathfrak{Re}\langle f'(x+t(y-x)) \cdot (y-x), v\rangle \quad \forall t \in (0,1)$$

Theorem 4.4 liefert: $\exists \tau \in (0,1) : \underbrace{\varphi(1) - \varphi(0)}_{=\mathfrak{Re}\langle f(y)-f(x), v\rangle} = \varphi(\tau) \cdot (1-0)$

$$\begin{aligned}
\xRightarrow{\xi = x+\tau(y-x)} |f(y)-f(x)| &= \mathfrak{Re}\langle f(y)-f(x), v\rangle = \varphi(1)-\varphi(0) = \mathfrak{Re}\langle f'(\xi)\cdot(y-x), v\rangle \\
&\leq |\langle f'(\xi)\cdot(y-x), v\rangle| \overset{\star}{\leq} |f'(\xi)\cdot(y-x)| \cdot \underbrace{|v|}_{=1} \\
&\leq \|f'(\xi)\| \cdot |y-x|
\end{aligned}$$

□

Wiederholung: $M \subset K^n$ heißt konvex, falls $[x,y] \subset M\ \forall x,y \in M$

Satz 19.10 (Lipschitz-Stetigkeit)
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, f stetig diffbar auf D. Sei $M \subset D$ kompakt und konvex. Dann

$$|f(y) - f(x)| \leq L \cdot |y-x| \quad \forall x,y \in M \tag{8}$$

mit $L = \max_{\xi \in M} \|f'(\xi)\| \leq +\infty$, d.h. f ist Lipschitz-stetig auf M mit Lipschitz-Konstante L.

▶ **Bemerkung 19.11**
Wegen $\|f'(\xi)\| \leq |f'(\xi)|$ (vgl. ???) kann man in (7) und (8) auch $|f'(y)|$ benutzen.

Beweis. Seien $x,y \in M \xRightarrow{M \text{ konvex}} [x,y] \subset M$

$f' : M \to L(K^n, K^m)$ stetig, M kompakt
$\xRightarrow{\text{Theorem 3.3}} \|f'(\xi)\|$ besitzt Maxium auf M und die Behauptung folgt aus Theorem 4.9. □

bekanntlich: $f(x) = \text{const}\ \forall x \Rightarrow f'(x) = 0$

Satz 19.12
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, und zusammenhängend.

$$f \text{ diffbar auf } D \text{ mit } f'(x) = 0\ \forall x \in D \quad \Rightarrow \quad f(x) = \text{const}\ \forall x \in D.$$

Beweis.

1.
   - D offen, zusammenhängend, K^n normierter Raum $\xRightarrow{\text{Theorem 3.11}} D$ bogenzusammenhängend
   - Wähle nun $x,y \in D \Rightarrow \exists \varphi : [0,1] \to D$ stetig, $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$

- D offen $\Rightarrow \forall t \in [0,1]$ existiert $r(t) > 0 : B_{r(t)}(\varphi(t)) \subset D$
- Nach Satz 3.1 ist $\varphi([0,1])$ kompakt und $\{B_{r(t)}(\varphi(t)) \mid t \in [0,1]\}$ ist offene Überdeckung von $\varphi([0,1])$ $\Rightarrow$ existiert endliche Überdeckung, d.h. $\exists t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ mit $\varphi([0,1]) \subset \bigcup\limits_{i=1,\dots,n} B_{r(t_i)}(\varphi(t_i))$.

2. Falls wir noch zeigen, dass f konstant ist auf jeder Kugel $B_r(z) \subset D$ ist, dann wäre $f(x) = f(y)$ $\xRightarrow{x,y \text{ bel.}}$ Behauptung.
3. Sei $B_r(z) \subset D$, $x, y \in B_r(z)$

$$\begin{aligned} &\xRightarrow{\text{Theorem 4.9}} && |f(y) - f(x)| \le \underbrace{\|f'(\xi)\|}_{=0} \cdot |y - x| = 0 \\ &\Rightarrow && f(x) = f(y) \\ &\xRightarrow{x,y \text{ bel.}} && f \text{ konst. auf } B_r(z) \end{aligned}$$

□

■ Beispiel 19.13

Sei $f : D = (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R}$ diffbar, sei $f'(x) = 0$ auf D

$\xRightarrow{\text{Satz 4.12}}$ $f(x) = \text{const}$ auf $(0,1)$ und $(2,3)$, aber auf jedem Intervall kann die Konstante anders sein.

Zurück zur Frage nach 18.11:

$$\text{partielle Ableitung existiert} \quad \Rightarrow \quad \text{Ableitung existiert?}$$

Nein! Aber:

> **Theorem 19.14**
> Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, $x \in D$.
>
> Falls partielle Ableitung $f_{x_j}(y)$, $j = 1, \dots, n$ für alle $y \in B_r(x) \subset D$ für ein $r > 0$ existierten und falls $y \to f_{x_j}(y)$ stetig in x für $j = 1, \dots, n$
> $\Rightarrow f$ ist differentierbar in x mit $f'(x) = \big(f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x)\big) \in K^{m \times n}$

Beweis. Fixiere $y = (y_1, \dots, y_n) \in B_r(0)$.

Betrachte die Eckpunkt eines Quaders in D: $a_0 = x, a_k := a_{k-1} + y_k e_k$ für $k = 1, \dots, n$
$\Rightarrow a_n = x + y$.

Offenbar $\varphi_k(t) = f(a_{k-1} + te_k y_k) - f(a_{k-1}) - tf_{x_k}(a_{k-1})y_k$ stetig auf $[0,1]$, diffbar auf $(0,1)$ mit

$$\varphi_k'(t) = f_{x_k}(a_{k-1} + te_k y_k)y_k - f_{x_k}(a_{k-1})y_k$$

$\xRightarrow{\text{Theorem 4.9}}$ $|\varphi_k(1) - \varphi_k(0)| = |f(a_k) - f(a_{k-1}) - f_{x_k}(a_{k+1})y_k| \le \sup\limits_{t \in (0,1)} |\varphi_k'(\xi)|$, $k = 1, \dots, n$

Es gilt mit $A := \big(f_1(x), \dots, x_{x_n}(x)\big)$:

$$\begin{aligned}
|f(x+y)-f(x)-Ay| &= \left|\sum_{k=1}^{n} f(a_k)-f(a_{k-1})-f_{x_k}(x)y_k\right| \\
&\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \left|f(a_k)-f(a_{k-1})-f_{x_k}(x)y_k\right| \\
&\underset{\text{Def. } \varphi_k}{\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq}} \sum |\varphi_k(1)-\varphi_k(0)| + |f_{x_k}(a_{k-1})y_k - f_{x_k}(x)y_k| \\
&\leq |y| \sum \sup_{t\in(0,1)} |f_{x_k}(a_{k-1}+t\cdot e_k y_k) - f_{x_k}(a_{k-1})| + |f_{x_k}(a_{k-1})-f_{x_k}(x)| \\
&\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} \underbrace{|y| \sum_{k=1}^{n} \sup |f_{x_k}(a_{k-1}+te_k y_k) - f_{x_k}(x)| + 2|f_{x_k}(a_{k-1})-f_{x_k}(x)|}_{=:\rho(y)\xrightarrow{y\to 0}0, \text{ da part. Ableitung } f_{x_k} \text{ stetig in } x}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $f(x+y)=f(y)+Ay+R(y)$ mit $\frac{|R(y)|}{y} \leq \rho(y) \xrightarrow{y\to 0} 0$ (d.h. $R(y)=o(|y|)$)

$\overset{2.1}{\Longleftrightarrow}$ f ist diffbar in x mit $f'(x)=A$ □

19.1. Anwendung des Mittelwertsatzes in $\mathbb{R}$

Satz 19.15 (Monotonie)
Sei $f:(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diffbar, dann gilt:

i) $f'(x)\geq 0$ (≤ 0) $\forall x\in(a,b) \Leftrightarrow f$ monoton wachsend (monoton fallend)

ii) $f'(x)>0$ (<0) $\forall x\in(a,b) \Rightarrow f$ streng monoton wachsend (fallend)

iii) $f'(x)=0$ $\forall x\in(a,b)\Leftrightarrow f$ konst.

▶ **Bemerkung 19.16**
In ii) gilt die Rückrichtung nicht! (Betr. $f(x)=x^3$ und $f'(0)=0$)

Beweis (jeweils für wachsend, fallend analog). Sei $x,y\in(a,b)$ mit $x<y$.

„$\Rightarrow$“ in i), ii), iii)

Nach Theorem 4.4 $\exists\xi\in(a,b): f(y)-(x)=f'(\xi)(y-x)\overset{\geq}{=}0 \xRightarrow{x,y \text{ bel.}}$ Behauptung

„$\Leftarrow$“ in i), iii)

$0 \overset{\leq}{=} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \xrightarrow{y\to x} f'(x) \Rightarrow$ Behauptung □

Satz 19.17 (Zwischenwertsatz für Ableitungen)
Sei $f:(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diffbar, $a<x_1<x_2<b$. Dann

$$f'(x_1)<\gamma<f'(x_2) \;\Rightarrow\; \exists\tilde{x}\in(x_1,x_2): f'(\tilde{x})=\gamma$$

(analog $f(x_2)<\gamma<f(x_1)$)

Beweis. Sei $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ mit $g(x)=f(x)-\gamma x$ ist diffbar auf (a,b)

$\xRightarrow{\text{Weierstraß}}$ $\exists \tilde{x} \in [x_1, x_2]$ mit $g(\tilde{x}) \leq g(x)$ $\forall x \in [x_1, x_2]$

Angenommen, $\tilde{x} = x_1$

$\Rightarrow$ $0 \leq \frac{g(x)-g(x_1)}{x-x_1} \xrightarrow{x \to x_1} g'(x_1) = f'(x_1) - \gamma < 0$

$\Rightarrow$ $\lightning$(für Minimum: $f'(x) \geq 0$)

$\Rightarrow$ $x_1 < \tilde{x}$, analog $\tilde{x} < x_2$

$\xRightarrow{\text{Theorem 4.1}}$ $0 = g'(\tilde{x}) = f'(\tilde{x}) - \gamma \Rightarrow$ Behauptung $\square$

Betrachte nun „unbestimme Grenzwerte“ $\lim\limits_{y \to x} \frac{f(x)}{g(x)}$ der Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, wie z.B. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Satz 19.18 (Regeln von de l'Hospital)
Seien $f, g : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffbar, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$ und entwender

i) $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \downarrow 0} g(x) = 0$, oder

ii) $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \downarrow a} g(x) = \infty$

Dann gilt:

$$\text{Falls } \lim_{y \downarrow a} \frac{f'(y)}{g'(y)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ ex.} \quad \Rightarrow \quad \lim_{y \downarrow a} \frac{f(y)}{g(y)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ ex. und } \lim_{y \downarrow a} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y \to a} \frac{f'(y)}{g'(y)} \tag{9}$$

(Analoge Aussagen für $x \uparrow b$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$)

▶ **Bemerkung 19.19**

1) Vgl. Analgie zum Satz von Stolz und Folgen (9.34)

2) Satz kann auch auf Grenzwerte der Form $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0, $\infty - \infty$ angewendet werden, falls man folgende Identitäten verwendet:

$$\alpha \cdot \beta = \frac{\alpha}{\frac{1}{\beta}} \qquad \alpha^\beta = e^{\beta \cdot \ln \alpha} \qquad \alpha - \beta = \alpha \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Beweis.

zu i) Mit $f(a) := 0$, $g(a) := 0$ sind f, g stetig auf $[a, b)]$
$\xRightarrow{\text{Satz 4.6}}$ $\forall x \in (a, b)$ $\exists \xi = \xi(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Wegen $\xi(x) \to a$ für $x \to a$ folgt die Behauptung

zu ii) Sei $\lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \gamma \in \mathbb{R}$ ($\gamma = \pm\infty$ ähnlich)
Sei oBdA $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ auf (a, b). Sei $\varepsilon > 0$ fest
$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \gamma\right| < \varepsilon$ $\forall \xi \in (a, a + \delta)$ und

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} - \gamma\right| \underset{\exists \xi \in (a, a+\delta)}{\overset{4.6}{\leq}} \underbrace{\left|\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|}_{=0} + \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \gamma\right| < \varepsilon \quad \forall x, y \in (a, a + \delta),\ g(x) \neq g(y)$$

Fixiere $y \in (a, a+\delta)$, dann $f(x) \neq f(y)$, $g(x) \neq g(y)$ $\forall x \in (a, a+\delta_1)$ für ein $0 < \delta_1 < \delta$ und

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}}}_{\xrightarrow{x\downarrow a} 1}$$

$$\Rightarrow \ \exists \delta_2 > 0 : \delta_2 < \delta_1 \text{ und } \left|\tfrac{f(x)}{g(x)} - \tfrac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}\right| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, a+\delta_2)$$

$$\Rightarrow \ \left|\tfrac{f(x)}{g(x)} - \gamma\right| \leq \left|\tfrac{f(x)}{g(x)} - \tfrac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}\right| + \left|\tfrac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} - \gamma\right| < 2\varepsilon \quad \forall x \in (a, a+\delta_2)$$

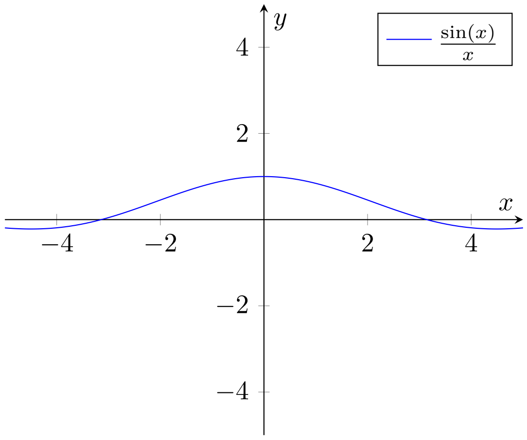
$\xRightarrow{\varepsilon > 0 \text{ beliebig}}$ Behauptung

andere Fälle:

- $x \uparrow b$ analog
- $x \to +\infty$ mittels Transformation $x = \frac{1}{y}$ auf $y \downarrow 0$ zurückführen
- $x \to -\infty$ analog □

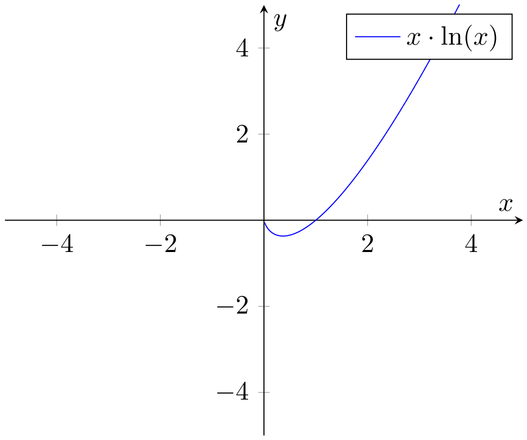
■ **Beispiel 19.20**

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, denn $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$



■ **Beispiel 19.21**

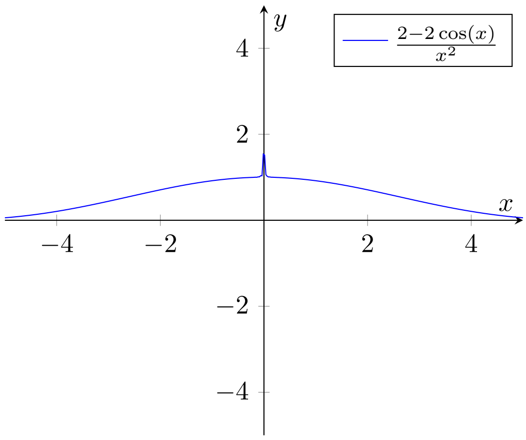
$$\lim_{x\to 0} x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0, \text{ denn } \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$



■ **Beispiel 19.22**

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2-2\cos x}{x^2} = 1$, denn es ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2-2\cos x)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin x}{2x} \overset{4.20}{=} 1$.

beachte: Satz 4.18 wird in Wahrheit zweimal angewendet.



■ **Beispiel 19.23**

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{y}{x}\right)^x = e^y\ \forall y \in \mathbb{R}$ mit

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)^x = e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)} = e^{\frac{\ln(1+y/x)}{1/x}}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{yx^2}{\left(1+\frac{y}{x}\right)x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{1+\frac{y}{x}} = y$$

(vgl. Satz 13.9)

20. Stammfunktionen

Sei $f : D \subset K^n \to K^{m\times n}$ $(\cong L(K^n, K^m))$

Frage: Existiert eine Funktion F mit $F' = f$ auf D?

Definition (Stammfunktion, unbestimmtes Integral)
$F : D \subset K^n \to K^m$ heißt Stammfunktion oder unbestimmtes Integral von f auf D, falls F diffbar und $F'(x) = f(x)\ \forall x \in D$

Satz 20.1
Sei $F : D \subset K^n \to K^m$ Stammfunktion von $f : D \to K^{m\times n}$ und sei $D \subset K^n$ Gebiet. Dann:

$$\tilde{F} \text{ ist Stammfunktion von } f \text{ auf } D \ \Leftrightarrow\ \tilde{F} = F + c \text{ für } c \in K^m$$

Falls f eine Stammfunktion besitzt, dann gibt es eine Menge von Stammfunktionen, die auf einem Gebiet bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt sind. Für eine Stammfunktion schreibt man auch

$$\int f \,\mathrm{d}\, x \text{ bzw. } \int f(x) \,\mathrm{d}\, x$$

Das Symbol steht für die Menge aller Stammfunktionen. Man schreibt aber auch

$$F = \int f \,\mathrm{d}\, x,$$

falls es eine Stammfuznktion gleich F gibt.

Weiterhin verwendet man $\int f \,\mathrm{d}\, x$ auch als Bezeichnung für den Funktionswert $F(x)$ einer Stammfunktion F von f. Somit Vorsicht bei der Bezeichnung (vgl. Kontext).

Beweis.
„$\Leftarrow$“ Offenbar F diffbar mit $\tilde{F}' = F' = f$
„$\Rightarrow$“ Offenbar $\tilde{F}'(x) - F'(x) = 0\ \forall x \in D \xRightarrow{\text{Satz 4.12}} \tilde{F}(x) - F(x) = c$ für ein $c \in K^m$ □

Sei $f, g : D \subset K^n \to K^{m\times n}$, D Gebiet, $c \in K$. Dann liefert Satz 5.1 und Differentiationsregeln

$$\begin{aligned} \int (f \pm g) \,\mathrm{d}\, x &= \int f \,\mathrm{d}\, x \pm \int g \,\mathrm{d}\, x \\ \int cf \,\mathrm{d}\, x &= c \int f \,\mathrm{d}\, x \end{aligned} \tag{1}$$

Falls jeweils die rechte Seite existiert, d.h. $f \to \int f \,\mathrm{d}\, x$ ist in gewisser Weise linear.
Aussage bleibt richtig, wenn D nur offen, wir beschränken uns meist aber auf Gebiete.

Betrachte zunächst den Spezialfall $n = m = 1$. Sei $f : D \subset K \to K$, D offen. Die Beispiele zur Differentiation liefern folgende Stammfunktionen für $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$:

$f(x)$	Stammfunktion $F(x)$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
e^x	e^x	
x^k	$\frac{1}{k+1}x^{k+1}$	$(k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$

für $K = \mathbb{R}$:

$f(x)$	Stammfunktion $F(x)$	
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	

Strategie: Rechenregeln für weitere Stammfunktionen

Satz 20.2 (partielle Integration)
Seien $f, g : D \subset K \to K$, D Gebiet mit zugehörigen Stammfunktion $F, G : D \to K$.

Falls $f \cdot G : D \to K$ Stammfunktion, dann auch $(F \cdot g) : D \to K$ mit

$$\int F \cdot g \,\mathrm{d}\, x = F(x)G(x) - \int f \cdot G \,\mathrm{d}\, x \tag{2}$$

Interpretation von (2): Es gibt eine Stammfunktion $\widehat{F \cdot g}$ von $F \cdot g$ und eine Stammfunktion $\widehat{f \cdot G}$ von $f \cdot G$ mit

$$\widehat{F \cdot g}(x) = F(x)G(x) - \widehat{f \cdot G}(x) \tag{2'}$$

▶ **Bemerkung 20.3**
(2) kann als Umkehrung der Produktregel betrachtet werden.

Beweis. Sei $H : D \to K$ Stammfunktion von $f \cdot G$
$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}(F(x)G(x) - H(x)) = F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x) - H'(x) = f(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot g(x) - f(X) \cdot G(x) = F(x) \cdot g(x)$
$\Rightarrow$ Behauptung □

■ **Beispiel 20.4**
Zeige $\int \ln x \,\mathrm{d}\, x = x \ln x - x$ auf $\mathbb{R}_{>0}$, denn

$$\int \ln x \,\mathrm{d}\, x = \int \underbrace{1 \cdot \ln x}_{g \cdot F} \overset{(2)}{=} x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x = x \cdot \ln x - x$$

■ **Beispiel 20.5**
Bestimme $\int x^2 e^x \,\mathrm{d}\, x$.

Es ist

$$\int \underbrace{x^2 e^x}_{F \cdot g} \,\mathrm{d}\, x \overset{(2)}{=} x^2 e^x - \int \underbrace{2x \cdot e^x}_{f \cdot G}$$
$$\int \underbrace{2x \cdot e^x}_{\tilde{F} \cdot \tilde{g}} \,\mathrm{d}\, x \overset{(2)}{=} \underbrace{2x \cdot e^x}_{\tilde{F} \cdot \tilde{G}} - \int \underbrace{2e^x}_{\tilde{f} \cdot \tilde{G}} \,\mathrm{d}\, x = 2xe^x - 2e^x$$

$\Rightarrow \int x^2 e^x \,\mathrm{d}\, x = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x = e^x(x^2 - 2x + 2)$

Satz 20.6 (Integration durch Substitution)
Sei $f : D \subset K \to K$, D Gebiet, mit Stammfunktion $F : D \to K$ und sei $\varphi : D \to D$ diffbar. Dann hat $f(\varphi(.)) \cdot \varphi'(.) : D \to K$ eine Stammfunktion mit

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, \mathrm{d}\, x = F(\varphi(x)) \tag{3}$$

Interpretation: analog zu (2)

▶ **Bemerkung 20.7**
(3) kann als Umkehrung der Kettenregel angesehen werden.

Beweis. $F(\varphi(.))$ ist nach der Kettenregel auf D diffbar mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x} F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$ □

■ **Beispiel 20.8**
Bestimme $\int \frac{\ln x}{x^2} \, \mathrm{d}\, x$ auf $\mathbb{R}_{>0}$:

- Offenbar ist $\frac{\ln x}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln \frac{1}{x}$.
- Wähle $\varphi(x) := \frac{1}{x}$, $f(y) := \ln y$
  $\Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $F(y) = y \cdot \ln y - y$ Stammfunktion von f (siehe Beispiel 5.4),
- $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} - \ln \frac{1}{x}$
  $\overset{(3)}{\Longrightarrow} F(\varphi(x)) = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{1 + \ln x}{x} = \int \frac{\ln x}{x^2} \, \mathrm{d}\, x$

Weitere Regeln prüft man leicht durch Differentiation:

Satz 20.9
Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I offenes Intervall, $f(x) \neq 0$ auf I, dann gilt

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}\, x = \ln |f(x)| \tag{4}$$

■ **Beispiel 20.10**
Betrachte $f(x) = \tan x$ $\forall x \in I_k := \left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Dann

$$\int \tan x \, \mathrm{d}\, x = \int \frac{\sin x}{\cos x} = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} = -\ln |\cos x|$$

Wieder der allgemeine Fall: mit $f : D \subset K^n \to K^{m \times n}$

Reduktion: Nach Theorem 3.11 kann man sich auf $m = 1$ beschränken, d.h. falls

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix}$$

reicht eine Untersuchung der Zeilen.

Ziel: Reduktion auf $n = 1$. Betrachte somit $f : D \subset K^n \to K^n$, D Gebiet ($m = 1$, n beliebig).

Sei $F : D \subset K^n \to K$ Stammfunktion von $f = (f_1, \dots, f_n)$

$\overset{3.11}{\Longrightarrow}$ $F_{x_j}(x) = f_j(x)\ \forall x \in D,\ j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ $x_j \to F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ ist Stammfunktion von $x_j \to f_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$. Hierbei sind x_i mit $i \neq j$ als Parameter anzusehen.

$\Rightarrow$ Ist $x_j \to F_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ eine Stammfunktion von $x_j \to f_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$, dann erhält man alle Stammfunktionen durch Addition einer Konstanten, die jedoch von den Parametern abhängen kann, d.h. durch

$$x_j \to F_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) + \varphi_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \tag{6}$$

mit beliebiger Funktion φ_j. Schließlich muss gelten

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(F_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)\right) = f_i(x) \quad \forall i \neq j, j = 1 \dots, n \tag{7}$$

■ **Beispiel 20.11**
Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha xy \\ x\check{s} + y^2 \end{pmatrix}$ (α ist Parameter)

1) Suche eine Stammfunktion von $x \to f_1(x, y)$:

$$F(x, y) = \underbrace{\frac{\alpha}{2}x^2y}_{=F_1(x,y)} + \varphi_1(y) \quad \varphi_1 \text{ unbekannte Funktion}$$

2) Suche eine Stammfunktion von $y \to f_2(x, y)$:

$$F(x, y) = \underbrace{x^2y + \frac{1}{3}y^3}_{F_2(x,y)} + \varphi_2(x) \quad (\varphi_2 \text{ unbekannte Funktion})$$

3) $\overset{(7)}{\Longrightarrow} F_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\big(F_1(x,y) + \varphi_1(y)\big) \overset{(7)}{=} f_2(x,y)$, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2}x^2 + \varphi_1'(y) &= x^2 + y^2 \\ \varphi_1'(y) &= \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) x^2 + y^2 \quad \forall x, y \end{aligned} \tag{8}$$

Offenbar kann (8) nur gelten, falls rechte Seite unabhängig von x, d.h. für $\alpha = 2$ (für $\alpha \neq 2$ existiert <u>keine</u> Stammfunktion von f).
$\overset{(8)}{\Longrightarrow} \varphi_1(y) = \frac{1}{3}y^3 + c_1$ (c_1 Konstante)

4) analog: $F_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\big(F_2(x,y) + \varphi_2'(x)\big) = f_1(x,y)$
$\Rightarrow \varphi_2'(x) = (\alpha - 2)xy \overset{\alpha=2}{=} 0$
$\Rightarrow \varphi_2(x) = c_2$ (c_2 Konstante)

$\Rightarrow F(x,y) = F_1(x,y) + \varphi_1(y) = F_2(x,y) + \varphi_2(x,y) = x^2y + \frac{1}{3}y^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$ beliebig, sind alle Stammfunktionen von f (Probe!).

▶ **Bemerkung 20.12**

- Mit obiger Strategie wird die Bestimmung einer Stammfunktion auf $n = 1$ zurückgeführt.
- Nicht alle Funktionen besitzen eine Stammfunktion

Ausblick: In Abschnitt 1 formulieren wir eine notwendige Bedingung in Satz 1.19 („Integrabilitätsbedingung") für die Existenz einer Stammfunktion (die in gewissen Mengen D auch hinreichend ist):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x) \quad \forall i, j, x \in D$$

Kapitel VI

Integration

Integration kann betrachtet werden als

- verallgemeinerte Summation, d.h. $\int_\mu f \,\mathrm{d}\, x$ ist Grenzwert von Summen
- lineare Abbildung $\int : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ über $\int_a^b (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\, x = \alpha \int_a^b f \,\mathrm{d}\, x + \beta \int_a^b g \,\mathrm{d}\, x$ Funktionen, d.h. als Grundlage benötigt man ein „Volumen“ (Maß) für allgemeine Mengen $M \subset \mathbb{R}$.

  Wir betrachten Funktionen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, welche komponentenweise auf $f : D \subset \mathbb{R} \to K^k$ erweitert werden kann. Benutze $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$ für $K = \mathbb{C}$.

  Vgl. Buch: Evans, Lawrence C.; Gariepy, Ronald F.: Measure theory and fine properties of functions

21. Messbarkeit

Wir führen zunächst das Lebesgue-Maß ein und behandeln dann messbare Mengen und messbare Funktionen.

21.1. Lebesgue-Maß

Definition (Quader, Volumen)
Wir definieren die Menge

$$\mathcal{Q} := \{I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n \mid I_j \subset \mathbb{R} \text{ beschränktes Intervall}\}$$

$\emptyset$ ist auch als beschränktes Intervall zugelassen. $Q \in \mathcal{Q}$ heißt Quader .

Sei $|I_j| :=$ Länge des Intervalls $I_j \subset \mathbb{R}$ (wobei $|\emptyset| = 0$), dann heißt

$$v(Q) := |I_1| \cdot \cdots \cdot |I_n| \quad \text{für } Q = I_1 \times \ldots \times I_n \in \mathbb{Q} \tag{1}$$

Volumen von Q

beachte: $v(q) = 0$ für „dünne“ Quader (d.h. falls ein $|I_j| = 0$). Insbesondere $v(\emptyset) = 0$.

Wir möchten für beliebige Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ ein „Volumenmaß“ definieren, das mit dem Volumen für Quader kompatibel ist.

Definition (Lebesgue-Maß)
Dafür betrachte eine (Mengen-) Funktion $|.| : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mit

$$|\mu| = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) \,\middle|\, M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,\ Q_j \in \mathcal{Q} \text{ Quader} \right\} \quad \forall M \subset \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

die man Lebegue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ nennt.

$|\mu|$ heißt (Lebesgue-Maß) von M, oft schreibt man auch $\mathcal{L}^\mu(M)$.

Anmerkung
Man versucht das zu untersuchende Intervall mit Quadern zu überdecken und sucht dabei die Überdeckung, bei der die Summe der Volumen am kleinsten wird. Also z.B. $|[2,3]| \in \mathbb{N} = |\{2,3\}| = 0$, da man für jede der beiden Zahlen genau einen Punkt als Quader braucht. Der Punkt hat per Definition keine Dimension, also auch ein Volumen von 0. Damit gilt: $|[2,3]| = 0 + 0 = 0$. Mit der gleichen Begründung gilt auch $|\mathbb{N}| = 0$.

Hinweis: Das Lebesgue-Maß wird in der Literatur vielfach nur für messbare Mengen definiert ($M \subset \mathbb{R}^n$) und die Erweiterung auf alle $M \subset \mathbb{R}^n$ wie in (2) wird dann als äußeres Lebesgue-Maß bezeichnet.

Lemma 21.1
Mann kann sich in (2) auf offene Mengen beschränken.

Beweis. Fixiere $\varepsilon > 0$. Sei $M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, $Q_j \in \mathcal{Q}$ und $\alpha := \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) < |M| + \varepsilon$.

Wähle offene Quader $\tilde{Q}_j \in \mathcal{Q}$ mit $Q_j \subset \tilde{Q}_j$, $v(\tilde{Q}_j) < v(Q_j) + \frac{\varepsilon}{\alpha}$
$\Rightarrow M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{Q}_j$ und $|M| \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(\tilde{Q}_j) < \alpha + \varepsilon < |M| + 2\varepsilon$.

Wegen $\varepsilon > 0$ beliebig folgt die Behauptung. □

Satz 21.2
Es gilt:

$$M_1 \subset M_2 \Rightarrow |M_1| \leq |M_2| \tag{3}$$

und die Abbildung $\mu \mapsto |\mu|$ ist <u>σ-subadditiv</u> , d.h.

$$\left| \bigcup_{j=1}^{\infty} M_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |M_k|, \quad \text{für } M_j \subset \mathbb{R}^n,\ j \in \mathbb{N}_{\geq 1} \tag{4}$$

Beweis. (3) folgt direkt aus (2) (Definition, das Infimum über eine größere Menge ist größer).

Für (4) fixiere $\varepsilon > 0$. Dann

$$\exists Q_{k_j} \in \mathcal{Q} : M_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_{k_j}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_{k_j}) \leq |M_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Wegen $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} v(Q_{k_j}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |M_k| + \varepsilon$ folgt

$$\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \right| \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} v(Q_{k_j}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |M_k| + \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt die Behauptung. □

Definition (Nullmenge)
$N \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>Nullmenge</u> , falls $|N| = 0$. Offenbar gilt:

$$\tilde{N} \subset N,\ |N| = 0 \Rightarrow\ |\tilde{N}| = 0 \tag{5}$$

$$|N_k| = 0\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \right| = 0 \tag{6}$$

Nach (3) und (4) gilt:

$$M \subset \mathbb{R}^n,\ |N| = 0\ \Rightarrow\ |M| = |M \setminus N| \tag{7}$$

Beweis. Dann $|M \setminus N| \overset{(3)}{\leq} |M| \overset{(4)}{\leq} \underbrace{|M \cap N|}_{=0} + |M \setminus N| = |M \setminus N| \Rightarrow$ Behauptung. □

■ **Beispiel 21.3**
Es sind Nullmengen

(a) $|\emptyset| = 0$

(b) $|\{x\}| = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$

|abzählbar viele Punkte| $= 0$, folglich $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) = 0$, $\mathcal{L}^1(\mathbb{N}) = 0$ (d.h. wir betrachten $\mathbb{Q}, \mathbb{N}$ als Teilmengen von $\mathbb{R}$, d.h. $n = 1$)

(c) $|M| = 0$ falls $M \subsetneqq \mathbb{R}^n$ (echter affiner Unterraum)

(d) $|\partial Q| = 0$ für $Q \in \mathcal{Q}$

(e) „schöne“ Kurven im $\mathbb{R}^2$

„schöne“ Kurven und Flächen im $\mathbb{R}^3$

Folgerung 21.4
Es ist $v(q) = |Q|\ \forall Q \in \mathcal{Q}$

Damit im folgenden Stets $|Q|$ statt $v(Q)$

Beweis. Sei $Q \in \mathcal{Q}$. Da offenbar $v(Q) = v(\operatorname{cl} Q)$ und $|Q| = |\operatorname{cl} Q|$ können wir Q als abgeschlossen annehmen.

Für ein fixiertes $\varepsilon > 0$ existieren nach Lemma 1.1 offene $Q_j \in \mathcal{Q}$ mit

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) \leq |Q| + \varepsilon$$

Da Q kompakt ist, wird es durch endlich viele Q_j überdeckt d.h. oBdA $Q \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$. Mittels einer geeigneten Zerlegung der Q_j folgt aus (1), dass $v(Q) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j)$. Somit gilt:

$$|Q| \overset{(2)}{\leq} v(Q) \leq |Q| + \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt die Behauptung. $\square$

Definition
Eine Eigenschaft gilt fast überall (f.ü.) auf $M \subset \mathbb{R}^n$, falls eine Nullmenge existiert, sodass die Eigenschaft $\forall x \in M \setminus N$ gilt. Man sagt auch, dass die Eigenschaft für fa. $x \in M$ gilt.

■ **Beispiel 21.5**
Für die Dirichlet-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist $f = 0$ f.ü. auf $\mathbb{R}$.

21.2. Messbare Mengen

Frage: gilt für paarweise disjunkte Mengen M_k in (4) Gleichheit?

Obwohl es wünschenswert wäre, gibt es „sehr exotische“ Mengen, für die dies nicht gilt (vgl. Bemerkung zum Auswahlaxiom in Kap. 2).

Deshalb betrachten wir „gutartige“ Mengen.

Definition (messbar)
Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt messbar , falls

$$|\tilde{M}| = |\tilde{M} \cap M| + |\tilde{M} \setminus M| \quad \forall \tilde{M} \in \mathbb{R} \tag{8}$$

Man beachte, dass nach (4) stets

$$|\tilde{M}| \leq |\tilde{M} \cap M| + |\tilde{M} \setminus M| \quad \forall M, \tilde{M} \subset \mathbb{R}^n \tag{9}$$

Beim Nachweis der Messbarkeit muss man nur „$\geq$“ prüfen.

Satz 21.6
(a) $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ sind messbar

(b) $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar $\Rightarrow M^C = \mathbb{R}^n \setminus M$ messbar

(c) $M_1, M_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ messbar $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$, $\bigcap_{j=1}^{\infty} M_j$ messbar

Definition (σ-algebra)
Eine Menge von Teilmengen $\mu \subset X$ (hier $X = \mathbb{R}^n$) mit den Eigenschaften Punkte (a) bis (c) heißt σ-algebra

Beweis.
(a) wegen $|\emptyset| = 0$ und (7): $|\tilde{M}| \leq |\tilde{M} \setminus \emptyset| = |\tilde{M}|$

(b) wegen $\tilde{M} \cap M = \tilde{M} \setminus M^C$, $\tilde{M} \setminus M = \tilde{M} \cap M^C \Rightarrow$ Behauptung

(c) (4) liefert

$$|\tilde{M}| \leq |\tilde{M} \cap M| + |\tilde{M} \setminus M| \quad \forall \tilde{M},\ M \subset \mathbb{R}^n,$$

sodass man nur noch „$\geq$“ zeigen muss.

– Seien M_1, M_2 messbar, dann gilt für beliebige $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\tilde{M} \cap (M_1 \cup M_2) &= (\tilde{M} \cap M_1) \cup \big((\tilde{M} \setminus M_1) \cap M_2\big),\\ \tilde{M} \setminus (M_1 \cup M_2) &= (\tilde{M} \setminus M_1) \setminus M_2\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}|\tilde{M}| &= |\tilde{M} \cap M_1| + |\tilde{M} \setminus M_1| = |\tilde{M} \cap M_1| + |(\tilde{M} \setminus M_1) \cap M_2| + |(\tilde{M} \setminus M_1) \setminus M_2|\\ &\geq |\tilde{M} \cap (M_1 \cup M_2)| + |\tilde{M} \setminus (M_1 \cup M_2)|,\end{aligned}$$

daher $M_1 \cup M_2$ messbar.

– Da $(M_1 \cap M_2)^C = M_1^C \cup M_2^C$ ist auch $M_1 \cap M_2$ messbar.

$\Rightarrow$ $M_1, \ldots, M_k$ messbar

$\Rightarrow$ $M_1 \cup \ldots \cup M_k$ sowie $M_1 \cap \ldots \cap M_2$ messbar (Induktion).

– Seien jetzt $M_1, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ messbar und paarweise disjunkt

$\Rightarrow$ alle $A_k := \bigcup_{j=1}^k M_j$ messbar. Für beliebige $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ folgt schrittweise

$$|\tilde{M} \cap A_k| + \sum_{j=2}^{k} |\tilde{M} \cap M_j| = \sum_{j=1}^{k} |\tilde{M} \cap M_j|$$

Mit $A = \bigcup_{j=1}^\infty M_j$ folgt

$$|\tilde{M}| = |\tilde{M} \cap A_k| + |\tilde{M} \setminus A_k| \geq \sum_{j=1}^{k} |\tilde{M} \cap M_j| + |\tilde{M} \setminus A| \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

$\xrightarrow{k\to\infty}$ $|\tilde{M}| \geq \sum_{j=1}^\infty |\tilde{M} \cap M_j| + |\tilde{M} \setminus A| \overset{(4)}{\geq} |\tilde{M} \cap A| + |\tilde{M} \setminus A|$

$\Rightarrow$ A messbar

– Folglich sind die M_j nicht paarweise disjunkt, ersetze M_j durch $\underbrace{A_j \setminus A_{j-1}}_{=M_j'}$ und argumentiere wie oben (da $\bigcup_{k=1}^\infty M_k = \bigcup_{k=1}^\infty M_k^C \Rightarrow \bigcup_{k=1}^\infty M_k$ messbar, $\bigcap$ analog). □

Satz 21.7
Seien $M_1, M_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann

(a) M_j paarweise disjunkt $\Rightarrow |\bigcup_{k=1}^\infty M_k| = \sum_{k=1}^\infty |M_k|$ (σ-additiv)

(b) $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} |M_k| = |\bigcup_{k=1}^\infty M_k|$

(c) $M_1 \supset M_2 \supset \ldots$ und $|M_1| < \infty \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} |M_k| = |\bigcap_{k=1}^\infty M_k|$

Beweis.

a) Aus (10) mit $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$ erhält man

$$\sum_{k=1}^{m} |M_k| = \left|\bigcup_{k=1}^{m} M_k\right| \overset{(4)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} |M_k|$$

Der Grenzübergang $m \to \infty$ liefert die Behauptung.

b) Nach (a) gilt: $|M_k| = |M_1| + \sum_{k=1}^k |M_j \setminus M_{j-1}$, und folglich

$$|M_k| = |M_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |M_k \setminus M_{k-1}| \overset{(a)}{=} \left|\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k\right|$$

c) $A := \bigcap_{k=1}^\infty M_k$. Wegen $|M_1 \setminus M_k| = |M_1| - |M_k|$ nach (4) hat man

$$\begin{aligned} |M_1| &\overset{(4)}{\leq} |A| + |M_1 \setminus A| && = |A| + \left|\bigcup_{k=1}^{\infty} M_1 \setminus M_k\right| \\ &\overset{(b)}{=} |A| + \lim_{k\to\infty} |M_1 \setminus M_k| && = |A| + |M_1| - \lim_{k\to\infty} |M_k| \\ &\leq \lim_{k\to\infty} |M_k| + |M_1| - \lim_{k\to\infty} |M_k| = |M_1| \end{aligned}$$

Subtraktion von $|M_1|$ liefert die Behauptung. □

Satz 21.8
Es gilt:

(a) alle Quader sind Messbar ($Q \in \mathcal{Q}$)

(b) Offene und abgeschlossene $M \subset \mathbb{R}^n$ sind messbar

(c) alle Nullmengen sind messbar

(d) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $M_0 \subset \mathbb{R}^n$, beide Mengen unterscheiden sich voneinander nur um eine Nullmenge, d.h. $|(M \setminus M_0) \cup (M_0 \setminus M)| = 0$
$\Rightarrow M_0$ messbar.

Beweis.

a) Sei $Q \in \mathbb{Q}$ Quader. Für $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ wähle Q_j mit

$$\tilde{M} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq |\tilde{M}| + \varepsilon$$

Aus (1) folgert man $|Q_j| = |Q_j \cap Q| + |Q_j \setminus Q|$, da man $Q_j \setminus Q$ in endlich viele disjunkte Quader zerlegen kann.

$$\Rightarrow \ |\tilde{M} \cap Q| + |\tilde{M} \setminus Q| \overset{(4)}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j \cap Q| + \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j \setminus Q| = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq |\tilde{M}| + \varepsilon$$

Da ε beliebig, $|\tilde{M}| \geq |\tilde{M} \cap Q| + |\tilde{M} \setminus Q|$ und (9), ergibt sich die Behauptung.

b) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachte die Folge $\{x_n\}_{k=1}^{\infty}$ aller rationale Punkte in M und $w_k \subset M$ sei jeweils der größte offene Würfel mit dem Mittelpunkt x_k und Kantenlänge ≤ 1.

Dann $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} w_k$, denn für jedes $x \in M$ ist $B_\varepsilon(x) \subset M$ für ein $\varepsilon > 0$ und somit ist $x \in w_k$ für ein x_k nahe genug bei x. Folglich ist M messbar nach Satz 1.6.

Für $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen und somit messbar. Damit ist $M = \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus M)$ messbar.

c) Für eine Nullmenge N, $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ ist $|\tilde{M}| \overset{(4)}{\leq} |\tilde{M} \cap N| + |\tilde{M} \setminus N| \overset{(3)}{\leq} |N| + |\tilde{M} \setminus N| \overset{(7)}{=} |\tilde{M}|$

d) Mit den Nullmengen $N_1 := M \setminus M_0$, $N_2 = M_0 \setminus M$ gilt $M_0 = (M \setminus N_1) \cup N_2$. Da $M \setminus N_1$ messbar ist, erhält man für beliebiges $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |\tilde{M} \cap M_0| + |\tilde{M} \setminus M_0| &= |\tilde{M} \cap ((M \setminus N_1) \cup N_2)| + |\tilde{M} \setminus ((M \setminus N_1) \cup N_2)| \\ &\overset{(3),(4)}{\leq} |M \cap (M \setminus N_1)| + |\tilde{M} \cap N_2| + |\tilde{M} \setminus (M \setminus N_1)| \\ &= |\tilde{M}| \end{aligned}$$

Mit (9) folgt dann, dass M_0 messbar ist. □

21.3. Messbare Funktionen

Wir führen nun eine für die Integrationstheorie grundlegende Klasse von Funktionen ein. Dabei erlauben wir $\pm\infty$ als Funktionswerte und benutzen die Bezeichnung

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, \infty]$$

sowie für $a \in \mathbb{R}$

$$(a, \infty] = (0, \infty) \cup \{\infty\},$$

und analog $[a, \infty]$, $(-\infty, a)$, $[-\infty, a]$.

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir offene ε-Kugeln um $\pm\infty$ durch

$$B_\varepsilon(\infty) := \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right] \qquad \text{bzw.} \qquad B_\varepsilon(\infty) := \left[-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$U \subset \overline{\mathbb{R}}$ offen, falls für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $B_\varepsilon \subset U$. Damit sind inbsesondere die offenen Mengen aus $\mathbb{R}$ auch offen in $\overline{\mathbb{R}}$ und die offenen Mengen in $\overline{\mathbb{R}}$ bilden eine Topologie.

Definition (messbar)
Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt messbar , falls D messbar ist und $f^{-1}(U)$ für jede offene Menge $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ messbar ist.

Folgerung 21.9
Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit D messbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) f ist messbar

(b) $f^{-1}([-\infty, a))$ messbar $\forall a \in \mathbb{Q}$

(c) $f^{-1}([-\infty, a])$ ist messbar $\forall a \in \mathbb{Q}$

Beweis. Aus den Eigenschaften messbarer Mengen folgt mit

$$f^{-1}([-\infty, a]) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[-\infty, a + \frac{1}{k}\right]\right)$$
$$f^{-1}([-\infty, a)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[-\infty, a - \frac{1}{k}\right]\right)$$

die Äquivalenz von (b) und (c).

Offenbar ist (a) $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c).

Für $a, b \in \mathbb{Q}$ ist dann

$$f^{-1}\big((a, b)\big) = f^{-1}([-\infty, b]) \cap f^{-1}([a, \infty]) = f^{-1}([-\infty, a)) \cap \big(f^{-1}\big([-\infty, a]\big)\big)^C$$

messbar und offensichtlich $f^{-1}\big((a, \infty]\big)$ ebenfalls.

Da jede offene Menge $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ die abzählbare Vereinigung von Mengen der Form (a, b), $[-\infty, a)$, $(a,]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ ist, folgt die Messbarkeit von $f^{-1}(U)$ und somit (a). □

Hinweis: Wir werden sehen, dass die Menge aller messbaren Funktionen die Menge der stetigen Funktionen enthält, aber auch noch viele Weitere.

Definition (charakteristische Funktion)
Für $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt $\chi_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\chi_\mu = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases}$$

charakteristische Funktion von M.

Offenbar gilt

Folgerung 21.10
$\chi_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist messbar gdw. $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar ist.

Definition (Treppenfunktion)
Eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion , falls es $M_1, \ldots, M_k \subset \mathbb{R}^n$ und $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$h(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{\mu_j}(x) \tag{11}$$

Die Menge der Treppenfunktionen $T(\mathbb{R})$ist mit der üblichen Addition und skalarer Multiplikation für Funktionen ein Vektorraum.

Man beachte, dass die Darstellung in (11), d.h. die Wahl der μ_j und $c_j = a_j$ nicht eindeutig ist. Insbesondere kann man μ_j stets paarweise disjunkt wählen.

Man sieht leicht

Folgerung 21.11

Die Treppenfunktion $h \in T(\mathbb{R}^n)$ ist messbar $\Leftrightarrow$ es gibt mindestens eine Darstellung (11), bei der alle μ_j messbar sind.

Definition (Nullfortsetzung)
Für $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir die Nullfortsetzung $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus D \end{cases} \tag{12}$$

Satz 21.12
Es gilt:

a) Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist auch die Nullfortsetzung $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar

b) Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $D' \subset D$ messbar. Dann ist f auf D' messbar, d.h. insbesondere $f|_{D'}$ ist messbar.

c) Seien $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Sei f messbar und $f = g$ f.ü. auf D. Dann ist g messbar.

■ **Beispiel 21.13**
Die Dirichlet-Funktion ist auf $\mathbb{R}$ messbar.

$h = 0$ ist messbare Treppenfunktion auf $\mathbb{R}$ und stimmt mit der Dirichlet-Funktion f.ü. überein.

Beweis.

(a) Für ein offenes $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ ist $\overline{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ falls $0 \notin U$ und andernfalls $\overline{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cup (\mathbb{R}^n \setminus D)$.

(b) Für offenes $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ ist $\left(f|_{D'}\right)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap D$.

(c) Für $U \subset \overline{R}$ offen: $f^{-1}(U)$ ist messbar und $g^{-1}(U)$ unterscheidet sich von $f^{-1}(U)$ nur um eine Nullmenge. Somit ist $g^{-1}(U)$ nach Satz 1.8 messbar. □

Definition (positiver, negativer Teil)
Für $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ schreibt man verkürzt

$$\{f > \alpha\} := \{x \in D \mid f(x) > \alpha\}$$

Man definiert mit

$$f^+ := f \cdot \chi_{\{f>0\}}, \qquad f^- := -f \cdot \chi_{\{f\leq 0\}}$$

den positive Teil bzw. negative Teil von f, und man hat $f = f^+ - f^-$.

Weiterhin ist

$$f := \max(f_1, f_2) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

und analog: $\min(f_1, f_2)$, $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$, $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$, $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k$, $\liminf\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$
Bei punktweiser Konvergenz $f_k(x) \to f(x)$ für fa. $x \in D$ schreibt man auch $f_k \to f$ f.ü. auf D.

Satz 21.14 (zusammengesetzte messbare Funktionen)
Für $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar gilt

a) $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar $\Rightarrow f \pm g$, $f \cdot g$ messbar,

falls $g \neq 0$ auf $D \Rightarrow \frac{f}{g}$ messbar

b) $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow f^\pm$, $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ messbar

c) $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sup\limits_k f_k$, $\inf\limits_k f_k$, $\liminf\limits_k f_k$, $\limsup\limits_k f_k$ messbar

Hinweis: In a) nur Funktionen mit Wertein in $\mathbb{R}$, nicht $\overline{\mathbb{R}}$, sonst ist die zusammengesetzte Funktion eventuell nicht erklärt.

Beweis.

- $\forall a \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$(f+g)^{-1}\big([-\infty,a)\big) = \bigcup_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}\\ \alpha+\beta\le a}} f^{-1}([-\infty,\alpha]) \cap g^{-1}([-\infty,\beta))$$

ist messbar, folglich $f+g$ messbar

- Für $c>0$ ist

$$\begin{aligned}(cf)^{-1}([-\infty,a]) &= f^{-1}\left(\left[-\infty,\frac{a}{c}\right)\right) && \text{messbar als Menge,}\\ (-cf)^{-1})([-\infty,a)) &= f^{-1}\left(\left(-\frac{a}{c},+\infty\right]\right) && \text{messbar}\end{aligned}$$

$\Rightarrow cf$ messbar ($c=0$ trivial)
$\Rightarrow -f,\ f+(-g)$ messbar

- Wegen

$$\left(f^2\right)^{-1}([-\infty,a)) = f^{-1}([-\infty,\sqrt{a})) \setminus f^{-1}([-\infty,-\sqrt{a}]) \quad \forall a\ge 0$$

ist f^2 messbar
$\Rightarrow f\cdot g = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$ messbar

- Falls $g\neq 0$ auf D ist für $a\ge 0$

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{-1}([-\infty,-a)) = g^{-1}\left(\left(-\frac{1}{a},0\right)\right) \qquad \left(\frac{1}{g}\right)^{-1}([a,\infty]) = g^{-1}\left(\left(0,\frac{1}{a}\right)\right)$$

und mit $\left(\frac{1}{g}\right)^{-1}([-\infty,0)) = g^{-1}([-\infty,0))$ folgt $\frac{1}{g}$ messbar
$\Rightarrow$ Produkt $f\cdot\frac{1}{g} = \frac{f}{g}$ messbar

- Aus der Messbarkeit der Niveaumengen $\{f>0\}$, $\{f<0\}$ folgt die Messbarkeit von $f^{\pm} = f\chi_{\{f \gtrless 0\}}$, $|f| = f^+ + f^-$, $\max(f,g) = (f-g)^+ + g$, $\min(f,g) = -(f-g)^- + g$
$\Rightarrow$ a), b)

- Zu c): Verwende

$$\begin{aligned}\left(\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k\right)^{-1}([-\infty,a)) &= \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}([-\infty,a])\\ \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k\right)^{-1}([-\infty,a]) &= \bigcap_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}([-\infty,a])\end{aligned}$$

$\Rightarrow \inf f_k$, $\sup f_k$ messbar.

- Folglich

$$\left.\begin{aligned}\liminf_{a\to\infty} f_k &= \sup_{j\ge 1}\underbrace{\inf_{k\ge j} f_k}_{=g_j}\\ \limsup_{k\to\infty} f_k &= \inf_{j\ge 1}\sup_{k\ge j} f_k\end{aligned}\right\}\text{messbar}$$

□

Satz 21.15 (Approximation messbarer Funktionen)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, D messbar. Dann

$$f \text{ messbar} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ Folge } \{h_k\} \text{ von Treppenfunktionen mit } h_k \to f \text{ f.ü. auf } D$$

Beweis.
„$\Rightarrow$“ f messbar, somit auch $f^\pm$. Setzte mit $h_0^\pm := 0$ schrittweise

$$\left.\begin{aligned} M_k^\pm &:= \left\{ x \in D \;\middle|\; f^\pm(x) \geq \frac{1}{k} + h_{k-1}^\pm \right\}, \\ h_k^\pm &:= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \chi_{M_j^\pm} \end{aligned}\right\} \text{ für } k \geq 1$$

da $h_{k-1}^\pm$ messbar ist, ist $M_k^\pm = \left(f^\pm - \frac{1}{k} - h_{k-1}^\pm\right)([0,\infty])$ messbar und $h_k^\pm$ ist Treppenfunktion; $f^\pm \geq h_k^\pm$ auf D.

– Falls $f^\pm(x) = \infty$, dann $x \in M_k^\pm$ $\forall k \in \mathbb{N}$ und $h_k^\pm(x) \to f^\pm(x)$
– Falls $0 \leq f^\pm(x) < \infty$, dann gilt für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$: $x \notin M_k^\pm$, somit $0 \leq f^\pm(x) - h_{k-1}^\pm < \frac{1}{k}$
$\Rightarrow h_k^\pm(x) \to f^\pm(x)$
$\Rightarrow h_k^+(x) - h_k^-(x) \to f^+(x) - f^-(x) = f(x)$

„$\Leftarrow$“ Sei $\tilde{f}(x) := \limsup_{k\to\infty} h_k(x)$ $\forall x \in D \Rightarrow f(x) = \tilde{f}(x)$ f.ü. auf D
Nach Satz 1.14: h_k messbar $\Rightarrow \tilde{f}$ messbar
Da $f = \tilde{f}$ f.ü. folgt f messbar. □

Folgerung 21.16
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f \geq 0$

$\Rightarrow \exists$ Folge $\{h_k\}$ von Treppenfunktionen mit $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \ldots \leq f$ auf D und $h_k \to f$ f.ü. auf D.

Satz 21.17
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und D messbar, $N \subset \mathbb{R}^n$ mit $|N| = 0$ und f stetig auf $D \subset N$

$\Rightarrow f$ messbar auf D

Beweis. Offenbar $\tilde{D} = D \setminus N$ messbar. Da f stetig auf $\tilde{D}$ ist, ist $f^{-1}(U) \setminus N$ offen in $\tilde{D}$ für $U \subset \mathbb{R}$ offen, d.h. $f^{-1}(U) \setminus N = M \cap \tilde{D}$ für ein $M \subset \mathbb{R}^n$ offen.

$$\Rightarrow f^{-1}(U) \setminus N \text{ messbar}$$

$$\xRightarrow{\text{Satz 1.8}} f^{-1}(U) \text{ messbar}$$

$$\Rightarrow f \text{ messbar.}$$ □

■ Beispiel 21.18
Folgende Funktionen sind messbar

- Stetige Funktionen auf offenen und abgeschlossenen Mengen (wähle $N = \emptyset$ im obigen Satz), insbesondere konstante Funktionen sind messbar
- Funktionen auf offenen und abgeschlossenen Mengen, die f.ü. mit einer stetigen Funktion übereinstimmen

- tan, cot auf $\mathbb{R}$ (setzte z.b. $\tan\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\cot(k\pi)=0\ \forall k$)
- $x \to \sin\frac{1}{x}$ auf $[-1,1]$ (setzte beliebigen Wert in $x=0$)
- $\chi_M:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist für $|\partial M|=0$ messbar auf $\mathbb{R}$ (dann ist χ auf $\operatorname{int} M$, $\operatorname{ext} M$ stetig)

Hinweis: Die DIRICHLET-Funktion ist stetig auf $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ und somit nach Satz 1.17 messbar. Man beachte aber, das dies nicht bedeutet, dass die DIRICHLET-Funktion auf $\mathbb{R}$ f.ü. stetig ist! (sie ist nirgends stetig auf $\mathbb{R}$)

Lemma 21.19 (Egorov)
Seien $f_k : D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ messbar $\forall k\in\mathbb{N}$. Sei $A\subset D$ messbar mit $|A|<\infty$ und gelte $f_k(x)\to f(x)$ für fa. $x\in A$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0$ existieren messbare Menge $B\subset A$ mit $|A\setminus B|<\varepsilon$ und $f_k\to f$ gleichmäßig auf B.

Beweis.

- Offenbar f messbar auf A und Mengen

$$M_{m,l} := \bigcup_{j=l}^{\infty}\left\{x\in A \;\middle|\; |f_j(x)-f(x)|>\frac{1}{2^m}\right\},\quad m,l\in\mathbb{N}$$

  sind messbar mit $M_{m,1}\supset M_{m,2}\supset\dots\ \forall m\in\mathbb{N}$.
  Wegen $f_k(x)\to f(x)\ \forall x\in A\setminus N$ für eine Nullmenge N folgt $\bigcap_{l\in\mathbb{N}} M_{m,l}\subset N$ und $|\bigcap_{l\in\mathbb{N}} M_{m,l}|=0\ \forall m\in\mathbb{N}$
  $\Rightarrow \forall m\in\mathbb{N}\ \exists l_m\in\mathbb{N}$ mit $|M_{m,l_m}|<\frac{\varepsilon}{2^m}$ (vgl. Satz 1.7 (c))
  Mit $M:=\bigcup_{m\in\mathbb{N}} M_{m,l_m}$ und $B:=A\setminus M$ folgt

$$|A\setminus B|=|M|\le\sum_{m=1}^{\infty}|M_{m,l_m}|\le\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^m}}_{\frac{1}{2^m}\text{ ist geometrische Reihe}}=\varepsilon$$

- Weiterhin hat man $\forall m\in\mathbb{N}$

$$|f_k(x)-f(x)|\le\frac{1}{2^m}\quad\forall x\in B,\ k\ge l_m$$

  $\Rightarrow$ gleichmäßige Konvergenz auf B □

■ Beispiel 21.20
Betrachte $f_k(x)=x^k$ auf $[0,1]$.

Man hat $f_k(x)\to 0$ f.ü. auf $[0,1]$ und gleichmäßige Konvergenz auf $[0,\alpha]\ \forall\alpha\in(0,1)$.

22. Integral

22.1. Integral für Treppenfunktionen

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbare Treppenfunktion mit

$$h = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{M_j}, \text{d.h. } c_j \in \mathbb{R},\ M_j \subset \mathbb{R} \text{ messbar}$$

Definition (integrierbar, Integral, Integralabbildung)
Sei $M \subset \mathbb{R}$ messbar.

h heißt integrierbar auf M, falls $|M_j \cap M| < \infty\ \forall j : c_j \neq 0$ und

$$\int_M h \,\mathrm{d}\, x := \int_M h(x) \,\mathrm{d}\, x := \sum_{j=1}^{k} c_m |M_j \cap M| \tag{1}$$

heißt (elementares) Integral von h auf M.

Menge der auf M integrierbaren Treppenfunktionen ist $T^1(M)$. $\int_M : T^1(M) \to \mathbb{R}$ mit $h \to \int_M h \,\mathrm{d}\, x$ ist die Integral-Abbildung .

Man verifiziert leicht

Folgerung 22.1
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann gilt:

a) (Linearität) Integralabbildung $\int_M : T^1(M) \to \mathbb{R}$ ist linear

b) (Monotonie) Integral-Abbildung ist monoton auf $T^1(M)$,.d.h

$$h_1 \leq h_2 \text{ auf } M \ \Rightarrow \int_M h_1 \,\mathrm{d}\, x \leq \int_M h_2 \,\mathrm{d}\, x$$

c) (Beschränktheit) Es ist $|\int_M h \,\mathrm{d}\, x| \leq \int_M |h| \,\mathrm{d}\, x\ \forall h \in T^1(M)$

d) Für $h \in T^1(M)$ gilt:

$$\int_M |h| \,\mathrm{d}\, x = 0 \ \Leftrightarrow \ h = 0 \text{ f.ü. auf } M$$

Hinweis: $\int_M |h| \,\mathrm{d}\, x$ ist Halbnorm auf dem Vektorraum $T^1(M)$.

22.2. Erweiterung auf messbare Funktionen

sinnvoll:

- Linearität und Monotonie erhalten
- eine gewisse Stetigkeit der Integral-Abbildung

$$h_k \to f \text{ in geeigneter Weise } \ \Rightarrow \int_M h_k \,\mathrm{d}\, x \to \int_m f \,\mathrm{d}\, x \tag{2}$$

nach Satz 1.15 sollte man in (2) eine Folge von Treppenfunktionen $\{h_k\}$ mit $h_k(x) \to f(x)$ f.ü. auf M

betrachten, aber es gibt zu viele konvergente Folgen für einen konsistenten Integralbegriff.

■ **Beispiel 22.2**

Betrachte $f = 0$ auf $\mathbb{R}$, wähle beliebige Folge $\{\alpha_k\} \subset \mathbb{R}$, dazu eine Treppenfunktion

$$h_k(x) = \begin{cases} k \cdot \alpha_k & \text{auf } (0, \frac{1}{k}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar konvergiert h_k gegen 0 f.ü. auf $\mathbb{R}$ und man hat $h_k \to 0$ f.ü. auf $\mathbb{R}$ und $\int_{\mathbb{R}} h_k \,\mathrm{d}\,x = \alpha_k$

$\Rightarrow$ je nach Wahl der Folge α_n liegt ganz unterschiedliches Konvergenzverhalten der Folge $\int_{\mathbb{R}} h_k \,\mathrm{d}\,x$ vor

$\Rightarrow$ kein eindeutiger Grenzwert in (2) möglich

$\Rightarrow$ stärkerer Konvergenzbegriff in (2) nötig

Motivation:

- Nur monotone Folgen von Treppenfunktionen, oder
- Beschränktheit aus Folgerung 2.1 erhalten

$\Rightarrow$ jeweils gleiches Ergebnis, jedoch ist die 1. Variante technisch etwas aufwendiger

Beschränktheit aus Folgerung 2.1 c) bedeutet insbesondere

$$\left| \int_M h_k \,\mathrm{d}\,x - \int_M f \,\mathrm{d}\,x \right| = \left| \int_M h_k - f \,\mathrm{d}\,x \right| \leq \int_M |h_k - f| \,\mathrm{d}\,x \quad \forall k$$

man definiert: $h_k \to f$ gdw. $\int_M |h_k - f| \,\mathrm{d}\,x \to 0$

$\Rightarrow$ Integralabbildung stetig bezüglich dieser Konvergenz.

Wegen $\int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\,x \leq \int_m |h_k - f| \,\mathrm{d}\,x + \int_M |h_l - f| \,\mathrm{d}\,x$ müsste $\int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\,x$ klein sein $\forall h, l$ groß.

22.3. Lebesgue-Integral

Definition (L^1-Chauchy-Folge, Lebesgue-Integral)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, Folge $\{h_k\}$ in $T^1(M)$ heißt L^1-Cauchy-Folge (kurz $L1$-CF), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N} : \int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\, x < \varepsilon \quad \forall h, l > k_0$$

Messbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt integrierbar auf $M \subset D$, falls Folge von Treppenfunktionen $\{h_k\}$ in $T^1(M)$ existiert mit $\{h_k\}$ ist $L1$-CF auf M und $H_k \to f$ f.ü. auf M.

Für integrierbare Funktion f heißt eine solche Folge $\{h_k\}$ zugehörige L^1-CF auf M.

Wegen

$$\left| \int_M h_k \,\mathrm{d}\, x - \int_M h_l \,\mathrm{d}\, x \right| = \left| \int_M (h_k - h_l) \,\mathrm{d}\, x \right| \overset{2.1}{\leq} \int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\, x \tag{5}$$

ist $\{\int_M h_k \,\mathrm{d}\, x\}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und somit konvergent.

Der Grenzwert

$$\int_m f \,\mathrm{d}\, x := \int_M f(x) \,\mathrm{d}\, x := \lim_{k \to \infty} \int_M h_k \,\mathrm{d}\, x \tag{6}$$

heißt (Lebesgue)-Integral von f auf M.

Hinweis: Integrale unter dem Grenzwert in (6) sind elementare Integrale gemäß (1).

Sprechweise: f integrierbar auf M bedeutet stets $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $M \subset D$ messbar

Definition (Menge der integrierbaren Funktionen)
Menge der auf M integrierbaren Funktionen ist

$$L^1(M) := \left\{ f : M \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ integierbar auf } M \right\}$$

▶ **Bemerkung 22.3**

a) Integral in (6) kann als vorzeichenbehaftetes Volumen des Zylinders im $\mathbb{R}^{n+1}$ unter (über) dem Graphen von f interpretiert werden.

b) Sei $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots$ monotone Folge von integrierbaren Treppenfunktionen mit $h_k \to f$ f.ü. auf M und sei Folge $\{\int_M h_k \,\mathrm{d}\, x\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt
$\Rightarrow$ (6) gilt und monotone Folge $\{\int_m h_k \,\mathrm{d}\, x\}$ konvergiert in $\mathbb{R}$ (d.h. $\{h_k\}$ ist L^1-CF zu f)

c) $\{h_k\}$ aus Beispiel 2.2 ist nur dann L^1-CF, falls $\alpha_k \to 0$.

Frage: Ist die Definition des Integrals in (6) unabhängig von der Wahl einer konkreten L^1-CF $\{h_k\}$ zu f?

Satz 22.4
Definition des Integrals in (6) ist unabhängig von der speziellen Wahl einer L^1-CF $\{h_k\}$ zu f.

Vgl. Integral $\int_M h \,\mathrm{d}\, x$ einer Treppenfunktion gemäß (1) mit dem in (6):

Offenbar ist konstante Folge $\{h_k\}$ mit $h_k = h\ \forall k$ L^1-CF zu h
$\xRightarrow[(6)]{2.4}$ Integral $\int_M h \,\mathrm{d}\, x$ in (6) stimmt mit elementarem Integral in (1) überein.

Folgerung 22.5

Für eine Treppenfunktion stimmt das in (1) definierte elementare Integral mit dem in (6) definierte Integral überein. Insbesondere ist der vor (1) eingeführte Begriff integrierbar mit dem in (4) identisch

$\Rightarrow$ wichtige Identität (1) mit Treppenfunktion χ_M für $|M| < \infty$:

$$|M| = \int_M 1 \,\mathrm{d}\, x = \int_M \mathrm{d}\, x \quad \forall M \in \mathbb{R},\ M \text{ messbar},$$

d.h. das Integral liefert Maß für messbare Mengen.

Beweis (Satz 2.4). beachte: alle Integrale im Beweis sind elementare Integrale gemäß (1).

- Sei $f : M \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und seien $\{h_k\}$, $\{\tilde{h}_k\}$ zugehörigen L^1-CF in $T^1(M)$.

  $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0$ mit

  $$\int_M |(h_k + \tilde{h}_k) - (h_l + \tilde{h}_l)| \,\mathrm{d}\, x \le \int_M |h_k - h_l| + |\tilde{h}_k - \tilde{h}_l| \,\mathrm{d}\, x < \varepsilon \quad \forall k, l \ge k_0$$

  $\Rightarrow$ $\{h_k - \tilde{h}_k\}$ ist L^1-CF mit $(h_k - \tilde{h}_k) \to 0$ f.ü. auf M.

  Da $\{\int_M h_k \,\mathrm{d}\, x\}$, $\{\int_M \tilde{h}_k \,\mathrm{d}\, x\}$ in $\mathbb{R}$ konvergieren, bleibt zu zeigen: $\{h_k\}$ ist L^1-CF in $T^1(M)$ mit $h_k \to 0$ f.ü. auf M

  $$\Rightarrow \int_M h_k \,\mathrm{d}\, x \xrightarrow{k\to\infty} 0 \tag{7}$$

  Da Konvergenz von $\{\int_M h_k \,\mathrm{d}\, x\}$ bereits bekannt ist, reicht es, den Grenzwert für eine TF zu zeigen.

- Wähle TF derart, dass $\int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\, x \le \frac{1}{2^l}\ \forall k \ge l$

  Fixiere $l \in \mathbb{N}$ und definiere $M_l := \{x \in M \mid h_l(x) \ne 0\}$, offenbar ist M messbar mit $|M_l| < \infty$.

  Sei nun $\varepsilon_l := \frac{1}{2^l \cdot |M_l|}$ falls $|M_l| > 0$ und $\varepsilon_l = 1$ falls $|M_l| = 0$.

  Weiterhin sei $M_{l,k} := \{x \in M_l \mid |h_k(x)| > \varepsilon_l\}$, und für $k > l$ folgt

  $$\begin{aligned}
  \left|\int_M h_k \,\mathrm{d}\, x\right| &\le \int_M |h_k| \,\mathrm{d}\, x = \int_{M_l} |h_k| \,\mathrm{d}\, x + \int_{M\setminus M_l} |h_k| \,\mathrm{d}\, x \\
  &\le \int_{M\setminus M_{l,k}} |h_k| \,\mathrm{d}\, x + \int_{M_{l,k}} |h_k| \,\mathrm{d}\, x + \int_{M\setminus M_l} |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\, x + \underbrace{\int_{M\setminus M_l} |h_l| \,\mathrm{d}\, x}_{=0} \\
  &\le \varepsilon_l |M_l| + \int_{M_{l,k}} |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\, x + \int_{M_{l,k}} |h_l| \,\mathrm{d}\, x + \frac{1}{2^l} \\
  &\le \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^l} + c_l \cdot |M_{l,k}| + \frac{1}{2^l}
  \end{aligned}$$

  mit $c_l := \sup\limits_{x\in M} |h_l(x)|$, $\exists k_l > l$ mit Lemma 1.19 folgt $|\{x \in M_l \mid |h_k(x)| > \varepsilon_l\}| \le \frac{1}{2^l \cdot (c_l + 1)}\ \forall k > k_l$

  $$\Rightarrow \left|\int_M h_k \,\mathrm{d}\, x\right| \le \frac{4}{2^l}\ \forall k > k_l$$

  $$\xRightarrow[\text{beliebig}]{l\in\mathbb{N}} \int_M h_k \,\mathrm{d}\, x \to 0$$

□

Satz 22.6 (Rechenregeln)
Seien f, g integrierbar auf $M \subset \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Dann

a) (Linearität) $f \pm g$, cf sind integrierbar auf M mit

$$\int_M f \pm g \,\mathrm{d}\,x = \int_M f \,\mathrm{d}\,x + \int_M g \,\mathrm{d}\,x$$
$$\int_M cf \,\mathrm{d}\,x = c \int_M f \,\mathrm{d}\,x$$

b) Sei $\tilde{M} \subset \mathbb{M}$ messbar

$\Rightarrow$ $f\chi_{\tilde{M}}$ ist integrierbar auf M und f ist integrierbar auf $\tilde{M}$ mit

$$\int_M f \cdot \chi_{\tilde{M}} \,\mathrm{d}\,x = \int_{\tilde{M}} f \,\mathrm{d}\,x$$

c) Sei $M = M_1 \cup M_2$ für M_1, M_2 disjunkt und messbar

$\Rightarrow$ f ist integrierbar auf M_1 und M_2 mit

$$\int_M f \,\mathrm{d}\,x = \int_{M_1} f \,\mathrm{d}\,x + \int_{M_2} f \,\mathrm{d}\,x$$

d) Sei $f = \tilde{f}$ f.ü. auf M

$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ ist integrierbar auf M mit

$$\int_M f \,\mathrm{d}\,x = \int_M \tilde{f} \,\mathrm{d}\,x$$

e) Die Nullfortsetung $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ von f (vgl. Satz 1.12) ist auf jeder messbaren Menge $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar mit

$$\int_{M \cap \tilde{M}} f \,\mathrm{d}\,x = \int_{\tilde{M}} \overline{f} \,\mathrm{d}\,x$$

Aussage d) bedeutet, dass eine Änderung der Funktionswerte von f auf einer Nullmenge das Integral nicht verändert.

Beweis. Seien $\{h_k\}$ und $\{\tilde{h}_k\}$ aus $T^1(\mathbb{R})^n$ L^1-CF zu f und g.

zu a) Es ist $h_k + \tilde{h}_k \to f + g$ f.ü. auf M.

Wegen

$$\int_M |(h_k + \tilde{h}_k) - (h_l + \tilde{h}_l)| \,\mathrm{d}\,x \leq \underbrace{\int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\,x}_{=L^1\text{-CF},\ <\varepsilon} + \underbrace{\int_M |\tilde{h}_k - \tilde{h}_l| \,\mathrm{d}\,x}_{=L^1\text{-CF},\ <\varepsilon}$$

ist $\{h_k + \tilde{h}_k\}$ L^1-CF zu $f+g$.
$\Rightarrow$ $f+g$ ist integrierbar auf M und Grenzübergang in

$$\int_M h_k + \tilde{h}_k \, \mathrm{d}\,x = \int_M h_k \, \mathrm{d}\,x + \int_M \tilde{h}_k \, \mathrm{d}\,x$$

liefert die Behauptung für $f+g$.

Analog zu cf. Wegen $f-g = f+(-g)$ folgt die letzte Behauptung.

zu b) Offenbar ist $\{\chi_{\tilde{m}h_k}\}$ L^1-CF zu $\chi_{\tilde{M}} f$ und $\{h_k\}$ L^1-CF zu f auf $\tilde{M}$.
Mit

$$\int_M h_k \chi_{\tilde{M}} \, \mathrm{d}\,x = \int_{\tilde{M}} h_k \, \mathrm{d}\,x \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

folgt die Behauptung durch Grenzübergang.

zu c) Nach b) ist f auf M_1 und M_2 integrierbar. Wegen $f = \chi_{M_1} f + \chi_{M_2} f$ folgt die Behauptung aus a) und b).

zu d) Da $\{h_k\}$ auch L^1-CF zu $\tilde{f}$ ist, folgt die Integrierbarkeit mit dem gleichen Integral.

zu e) Es ist $\{\chi_{M\cap\tilde{M}} h_k\}$ L^1-CF zu f auf $M \cap \tilde{M}$ und auch zu $\overline{f}$ auf $\tilde{M}$. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Satz 22.7 (Eigenschaften)
Es gilt

a) (Integierbarkeit) Für $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar gilt:

$$f \text{ integrierbar auf } M \quad \Leftrightarrow \quad |f| \text{ integrierbar auf } M$$

b) (Beschränktheit) Sei f integrierbar auf M, dann

$$\left| \int_M f \, \mathrm{d}\,x \right| \leq \int_M |f| \, \mathrm{d}\,x$$

c) (Monotonie) Seien f, g integrierbar auf M. Dann

$$f \leq g \text{ f.ü. auf } M \quad \Rightarrow \quad \int_M f \, \mathrm{d}\,x \leq \int_M g \, \mathrm{d}\,x$$

d) Sei f integrierbar auf M, dann

$$\int_M |f| \, \mathrm{d}\,x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \text{ f.ü.}$$

In Analogie zur Treppenfunktion ist $\|f\|_1 := \int_M |f| \, \mathrm{d}\,x$ auf $L^1(M)$ eine Halbnorm, aber keine Norm ($\|f\| = 0 \not\Rightarrow f = 0$). $\|f\|_1$ heißt <u>L^1-Halbnorm</u> von f.

<u>Hinweis:</u> Eine lineare Abbildung $A : X \to Y$ ist beschränkt, wenn $\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$
$\Rightarrow$ Begriff der Beschränktheit in b).

Beweis.

zu a) Sei f integrierbar auf M und sei $\{h_k\}$ L^1-CF zu f
$\Rightarrow |h_k| \to |f|$ f.ü. auf M.
Wegen $\int_M ||h_k| - |h_l|| \, \mathrm{d}\,x \overset{Folgerung\ 2.1}{\leq} \int_M |h_k - h_l| \, \mathrm{d}\,x$ ist $\{|h_k|\}$ L^1-CF zu $|f|$
$\Rightarrow |f|$ ist integrierbar.

beachte: andere Richtung später

zu b) Für eine L^1-CF $\{h_k\}$ zu f gilt nach Folgerung 2.1 c):

$$\left|\int_M h_k \,\mathrm{d}\,x\right| \leq \int_M |h_k| \,\mathrm{d}\,x$$

Da $\{|h_k|\}$ L^1-CF zu $|f|$ ist, folgt die Behauptung durch Grenzübergang.

zu c) Nach den Rechenregeln ist $g - f$ integrierbar, wegen $|g - f| = g - f$ f.ü. auf M folgt

$$0 \leq \left|\int_M g - f \,\mathrm{d}\,x\right| \overset{b)}{\leq} \int_M |g - f| \,\mathrm{d}\,x \overset{Satz\ 2.6\ a)}{=} \int_M g \,\mathrm{d}\,x - \int_M f \,\mathrm{d}\,x$$

$\Rightarrow$ Behauptung

zu a) für „$\Leftarrow$" wähle $f^\pm$ ($f = f^+ - f^-$) jeweils eine monotone Folge von TF $\{h_k^\pm\}$ gemäß Folgerung 1.16. Folglich liefert $H_k = h_k^+ - h_k^-$ eine Folge von TF mit $h_k \to f$ f.ü. auf M.
Wegen $|h_k| \leq |f|$ f.ü. auf M ist $\int_M |h_k| \,\mathrm{d}\,x \leq \int_M |f| \,\mathrm{d}\,x$.
Folglich ist die monotone Folge $\int_M |h_k| \,\mathrm{d}\,x$ in $\mathbb{R}$ beschränkt
$\Rightarrow$ konvergent.
Da $h_k^\pm$ jeweils das Vorzeichen wie $f^\pm$ haben und die Folge monoton ist, gilt

$$||h_l| - |h_k|| = |h_l| - |h_k| = |h_l - h_k| \quad \forall l > k$$

und somit auch

$$\int_M |h_l - h_k| \,\mathrm{d}\,x = \int_M |h_l| - |h_k| \,\mathrm{d}\,x = \left|\int_M |h_l| \,\mathrm{d}\,x - \int_M |h_k| \,\mathrm{d}\,x\right| \quad \forall l > k$$

Als konvergente Folge ist $\{\int_M |h_k| \,\mathrm{d}\,x\}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und folglich ist $\{h_k\}$ L^1-CF und sogar L^1-CF zu f
$\Rightarrow$ f integrierbar

zu d) Für $f = 0$ f.ü. auf M ist offenbar $\int_M |f| \,\mathrm{d}\,x = 0$.
Sei nun $\int_M |f| \,\mathrm{d}\,x = 0$, mit $M_k := \{x \in M \mid |f| \geq \frac{1}{k}\}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ ist

$$0 = \int_{M \setminus M_k} |f| \,\mathrm{d}\,x + \int_{M_k} |f| \,\mathrm{d}\,x \geq \int_{M \setminus M_k} 0 \,\mathrm{d}\,x + \int_{M_k} \frac{1}{k} \,\mathrm{d}\,x \geq \frac{1}{k}|M_k| \geq 0$$

$\Rightarrow$ $|M_k| = 0$ $\forall k$, wegen $\{f \neq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$
$\Rightarrow$ $|\{f \neq 0\}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |M_k| = 0$
$\Rightarrow$ Behauptung □

Folgerung 22.8
Sei f auf M integrierbar

a) Für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\alpha_1 \leq f \leq \alpha_2 \text{ f.ü. auf } M \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 |M| \leq \int_M f \,\mathrm{d}\,x \leq \alpha_2 |M|$$

b) Es gilt $f \geq 0$ f.ü. auf M $\quad\Rightarrow\quad$ $\int_M f \,\mathrm{d}\,x \geq 0$

c) Es gilt: $\tilde{M} \subset M$ messbar, $f \geq 0$ f.ü. auf M

$$\Rightarrow \int_{\tilde{M}} f \,\mathrm{d}\,x \le \int_M f \,\mathrm{d}\,x$$

(linkes Integral nach Satz 2.6 b))

Beweis.

zu a) Wegen $\int_M \alpha_j \,\mathrm{d}\,x = \alpha_j |M|$ für $|M|$ endlich folgt a) direkt aus der Monotonie des Integrals.

zu b) folgt mit $\alpha_1 = 0$ aus a)

zu c) folgt, da $\chi_{\tilde{M}} \cdot f \le f$ f.ü. auf M und aus der Monotonie □

In der Vorüberlegung zum Integral wurde eine gewisse Stetigkeit der Integralabbildung angestrebt. Das Integral ist bezüglich der L^1-Halbnorm stetig.

Satz 22.9

Seien $f,\, f_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar auf $M \subset \mathbb{R}^n$ und sei

$$\lim_{k\to\infty} \int_M |f_k - f| \,\mathrm{d}\,x = 0 \quad (\|f_k - f\| \to 0)$$
$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}\,x = \int_M f \,\mathrm{d}\,x$$

Weiterhin gibt es eine Teilfolge $\{f_{k'}\}$ mit $f_{k'} \to f$ f.ü. auf M.

Beweis. Aus der Beschränktheit nach Satz 2.7 folgt

$$\left| \int_M f_k \,\mathrm{d}\,x - \int_M f \,\mathrm{d}\,x \right| \le \int_M |f_k - f| \,\mathrm{d}\,x \xrightarrow{k\to 0} 0$$

$\Rightarrow$ 1. Konvergenzaussage

Wähle nun eine TF $\{f_{k_l}\}_l$ mit $\int_M |f_{k_l} - f| \,\mathrm{d}\,x \le \frac{1}{2^{l+1}}$ $\forall l \in \mathbb{N}$.

Für $\varepsilon > 0$ sei $M_\varepsilon := \{x \in M \mid \limsup\limits_{l\to\infty} |f_{k_l} - f| > \varepsilon\}$

$$\Rightarrow M_\varepsilon \subset \bigcup_{l=j}^{\infty} \{|f_{k_l} - f| > \varepsilon\} \ \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow M_\varepsilon \le \sum_{l=j}^{\infty} |\{f_{k_l} - f| > \varepsilon\}| \le \frac{1}{\varepsilon} \sum_{l=j}^{\infty} \int_M |f_{k_l} - f| \,\mathrm{d}\,x \le \frac{1}{\varepsilon} \sum_{l=j}^{\infty} \frac{1}{2^{l+1}} = \frac{1}{2^j \varepsilon} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow M_\varepsilon = 0 \ \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow f_{k_l} \xrightarrow{l\to\infty} f$ f.ü. auf M □

Satz 22.10 (Majorantenkriterium)

Seien $f,\, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, M messbar, $|f| \le g$ f.ü. auf M, g integrierbar auf M

$\Rightarrow f$ integrierbar auf M

Man nennt g auch integrierbare Majorante von f.

Lemma 22.11
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar auf M, sei $f \geq 0$ auf M und sei $\{h_k\}$ Folge von Treppenfunktionen mit

$$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \ldots \leq f \quad \text{und} \quad \int_M h_k \,\mathrm{d}\, x \text{ beschränkt} \tag{8}$$

$\Rightarrow$ $\{h_k\}$ ist L^1-CF zu f und falls $\{h_k\} \to f$ f.ü. auf M ist f integrierbar (vgl Folgerung 1.16)

Beweis. Offenbar sind alle h_k integrierbar und wegen der Monotonie gilt

$$\left| \int_M h_k \,\mathrm{d}\, x - \int_M h_l \,\mathrm{d}\, x \right| = \int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\, x \quad \forall k \geq l$$

Da $\{\int_M h_k \,\mathrm{d}\, x\}$ konvergent ist in $\mathbb{R}$ als monoton beschränkte Folge ist diese CF in $\mathbb{R}$
$\Rightarrow$ $\{h_k\}$ ist L^1-CF

Falls noch $h_k \to f$ f.ü. $\Rightarrow$ $\{h_k\}$ ist L^1-CF zu f $\Rightarrow$ f ist integrierbar □

Beweis (Satz 2.10). (mit f auch $|f|$ mesbbar nach Folgerung 1.16)

Es existiert eine Folge $\{h_k\}$ von Treppenfunktionen mit

$$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \ldots \leq |f| \leq g$$

auf M und $\{h_k\} \to |f|$ f.ü. auf M.

Da $\{\int_M h_k \,\mathrm{d}\, x\}$ beschränkt ist in $\mathbb{R}$ da g integrierbar ist

$\xRightarrow{\text{Lemma 2.11}}$ $\{h_k\}$ ist L^1-Cf zu $|f|$

$\Rightarrow$ $|f|$ integrierbar

$\xRightarrow{\text{Satz 2.7}}$ f integrierbar auf M □

Folgerung 22.12
Seien $f,\, g : M \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, $|M|$ endlich. Dann

a) Falls f beschränkt ist auf M, dann ist f integrierbar auf M

b) Sei f beschränkt und g integrierbar auf M
$\Rightarrow$ $f \cdot g$ ist integrierbar auf M

<u>Hinweis:</u> Folglich sind stetige Funktionen auf kompaktem M integrierbar (vgl. Theorem von Weierstraß)

Beweis. Sei $|f| \leq \alpha$ auf M für $\alpha \in \mathbb{Q}$

zu a) $\Rightarrow$ konstante Funktion $f_1 = \alpha$ ist integrierbare Majorante von $|f|$

zu b) Mit $f_2 = \alpha \cdot |g|$ ist f_2 integrierbare Majorante zu $|f \cdot g|$ $\xRightarrow[\text{kriterium}]{\text{Majoranten-}}$ Behauptung □

22.4. Grenzwertsätze

$\int_M f_k \,\mathrm{d}\, x \overset{?}{\to} \int_M f \,\mathrm{d}\, x$ Vertauschbarkeit von Integration und Grenzübergang ist zentrale Frage $\to$ grundlegende Grenzwertsätze $\int_M |f_k - f| \,\mathrm{d}\, x \to 0$

Theorem 22.13 (Lemma von Fatou)
Seien $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ integrierbar auf $M \subset D$ $\forall k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ $f(x) := \liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ $\forall x \in M$ ist integrierbar auf M und

$$\left(\int_M f \,\mathrm{d}\, x =\right) \int_M \liminf_{k\to\infty} f_k \,\mathrm{d}\, x \le \liminf_{k\to\infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}\, x,$$

falls der Grenzwert rechts existiert.

Keine Gleichheit hat man z.B. für $\{h_k\}$ aus Beispiel 2.2 mit $\alpha_k = 1$ $\forall k$

$$h_k = \begin{cases} h \cdot \alpha_k & x \in \left[0, \frac{1}{k}\right] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann

$$\int_M \liminf_{k\to\infty} h_k \,\mathrm{d}\, x = \int_M 0 \,\mathrm{d}\, x = 0 < \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_k \,\mathrm{d}\, x = 1$$

Beweis. Auf M ist $0 \le g_k := \inf\limits_{l \ge k} f_l \le f_j$ $\forall j \ge k$, $k \in \mathbb{N}$, $g_1 \le g_2 \le \dots$ und $\lim\limits_{k\to\infty} g_k = \liminf\limits_{k\to\infty} f_k = f$

Alle g_k sind messbar nach Satz 1.14, Satz 2.10

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wählen wir gemäß Folgerung 1.16 eine Folge $\{h_{k_l}\}_l$ von Treppenfunktionen mit $0 \le h_{k_1} \le h_{k_2} \le \dots \le g_k$, $h_{k_l} \xrightarrow{l\to\infty} g_k$ f.ü. auf M.

Nach Lemma 2.11 ist $\{h_{k_l}\}_l$ L^1-CF zu g_k.

Anwendung von Lemma 1.19 auf $g_k - f$ auf $B_k(0) \cap M$
$\Rightarrow$ $\exists A'_k \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $|A'_k| \le \frac{1}{2^{k+1}}$ und (ggf. TF) $|g_k - f| < \frac{1}{k}$ auf $(B_k(0) \cap M) \setminus A'_K$.

Analog für Folge $h_{k_l} \xrightarrow{l\to\infty} g_k$: $\exists A''_K \subset \mathbb{R}^k$ mit $|A''_k| < \frac{1}{2^{k+1}}$ und (evtl. TF) $|h_{k_l} - g_k| < \frac{1}{k}$ auf $(B_k(0) \cap M) \setminus A''_k$

Setzte $A_k = A'_k \cup A''_k$, offenbar $|A_k| < \frac{1}{2^k}$, $h_k := h_{k_l}$

Definiere rekursiv $\tilde{h}_1 := h_1$, $\tilde{h}_k := \max(\tilde{h}_{k-1}, h_k)$
$\Rightarrow$ $h_k \le \tilde{h}_k \le g_k \le f_k$ und $\tilde{h}_{k-1} \le \tilde{h}_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ $|\tilde{h}_k - f| \overset{\triangle-\text{Ungl}}{\le} |\tilde{h}_k - g_k| + |g_k - f| \le |h_k - g_k| + |g_k - f| \le \frac{2}{k}$ auf $(B_k(0) \cap M) \setminus A_k$.

Mit $\tilde{A}_l := \bigcup_{k=l}^{\infty} A_k$ folgt $|\tilde{A}_l| \le \frac{1}{2^{l-1}}$ und $|\tilde{h}_k - f| \le \frac{2}{k}$ auf $(B_k(0) \cap M) \setminus \tilde{A}_l$ $\forall k > l$.

Folglich $\tilde{h}_l \to f$ f.ü. auf M und wegen der Monotonie ist $\{\tilde{h}_k\}$ L^1-CF zu f
$\Rightarrow$ $\int_M f \,\mathrm{d}\, x \overset{\text{Def}}{=} \lim\limits_{k\to\infty} \int_M \tilde{h}_k \,\mathrm{d}\, x \overset{\text{Monotonie}}{\le} \liminf\limits_{k\to\infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}\, x$
$\Rightarrow$ Behauptung ☐

Theorem 22.14 (Monotone Konvergenz)
Seien $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar auf $M \subset D$ $\forall k \in \mathbb{N}$ mit $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ f.ü. auf M
$\Rightarrow$ f ist integrierbar auf M und

$$\left(\int_M f \,\mathrm{d}\, x =\right) \int_M \lim_{k\to\infty} f_k(x) \,\mathrm{d}\, x = \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}\, x$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

▶ **Bemerkung 22.15**
Theorem 2.14 bleibt richtig, falls man $f_1 \geq f_2 \geq \dots$ f.ü. auf M hat.

Ferner ist wegen der Monotonie die Beschränktheit der Folge $\{\int_M f_k \,\mathrm{d}\, x\}$ für die Existenz des Grenzwertes ausreichend.

Beweis (Theorem 2.14). Nach Theorem 2.13 ist $f - f_1 = \lim\limits_{k\to\infty} f_k - f_1$ integrierbar auf M und damit auch $f = (f - f_1) + f_1$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_M f - f_1 \,\mathrm{d}\, x &\leq \lim_{k\to\infty} \int_M f_k - f_1 \,\mathrm{d}\, x \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}\, x - \int_M f_1 \,\mathrm{d}\, x \overset{\text{Monotonie}}{\leq} \int_M f \,\mathrm{d}\, x - \int_M f_1 \,\mathrm{d}\, x \\ &= \int_M f - f_1 \,\mathrm{d}\, x\end{aligned}$$

□

Theorem 22.16 (Majorisierte Konvergenz)
Seien f_k, $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar für $k \in \mathbb{N}$ und sei g integrierbar auf $M \subset D$ mit $|f_k| \leq g$ f.ü. auf M $\forall k \in \mathbb{N}$ und $f_k \to: f$ f.ü. auf M

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_M |f_k - f| \,\mathrm{d}\, x = 0 \tag{9}$$

und

$$\left(\int_M f \,\mathrm{d}\, x =\right) \int_M \lim_{k\to\infty} f_k \,\mathrm{d}\, x = \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}\, x,$$

wobei alle Integrale existieren.

Beweis. Nach dem Majorantenkriterium sind alle f_k f.ü. integrierbar auf M.

Nach Theorem 2.13 gilt:

$$\int_M 2g \,\mathrm{d}\, x = \int_M \liminf_{k\to\infty} |2g - |f_k - f|| \,\mathrm{d}\, x \leq \liminf_{k\to\infty} \int_M 2g - |f_k - f| \,\mathrm{d}\, x$$

$\Rightarrow 0 = \liminf\limits_{k\to\infty} - \int_M |f_k - f| \,\mathrm{d}\, x \Rightarrow (9) \xRightarrow{\text{Satz 2.9}}$ Behauptung □

Folgerung 22.17
Seien $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar auf M $\forall k \in \mathbb{N}$. Sei $|M| < \infty$ und konvergieren die $f_k \to: f$ gleichmäßig auf M
$\Rightarrow$ f ist integrierbar auf M und $\int_M f \,\mathrm{d}\, x = \lim\limits_{k\to\infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}\, x$

Beweis. $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f_k(x)| \leq |f_{k_0}(x) + 1|$ $\forall x \in \mathbb{M}$, $k > k_0$.

Da $f_{k_0} + 1$ integrierbar auf M folgt die Behauptung aus Theorem 2.16. □

Theorem 22.18 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und zusammenhängend, und sei $f : M \to \mathbb{R}$ stetig

$$\Rightarrow \quad \exists \xi \in M : \int_M f \,\mathrm{d}\, x = f(\xi) \cdot |M|$$

Beweis. Aussage klar für $|M| = 0$, deshalb wähle $|M| > 0$.

Da f stetig auf M kompakt

$$\begin{aligned}
&\xRightarrow[3.3]{\text{Weierstrass}} \exists \text{ Minimalstelle } x_1 \in M, \text{ Maximalstelle } x_2 \in M \text{ und } \gamma := \int_M f \,\mathrm{d}\, x \\
&\xRightarrow{\text{Folgerung 2.8}} f(x_1) \leq \tfrac{\gamma}{|M|} \leq f(x_2) \\
&\xRightarrow[3.11]{\text{Zwischenwertsatz}} \exists \xi \in M : f(\xi) = \frac{\gamma}{|M|} \\
&\Rightarrow \text{ Behauptung}
\end{aligned}$$

□

22.5. Parameterabhängige Integrale

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $P \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge von Parametern und sei $f : M \times P \to \mathbb{R}$.

Betrachte parameterabhängige Funktion

$$F(p) := \int_M f(x, p) \,\mathrm{d}\, x \tag{10}$$

Satz 22.19 (Stetigkeit)
Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $P \subset \mathbb{R}^n$ und $f : M \times P \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

- $f(\,\cdot\,, p)$ messbar $\forall p \in P$
- $f(x, \,\cdot\,)$ stetig für fa. $x \in M$

Weiterhin gebe es integrierbare Funktion $g : M \to \mathbb{R}$ mit

- $|f(x, p)| \leq g(x)$ für fa. $x \in M$

$\Rightarrow$ Integrale in (10) existieren $\forall p \in P$ und F ist stetig auf P.

Beweis. $f(\,\cdot\,, p)$ ist integrierbar auf M $\forall p \in P$ nach Satz 2.10.

Fixiere p und $\{p_k\}$ in P mit $p_k \to p$.

Setzte $f_k(x) := f(x, p_k)$

Stetigkeit von $f(x, \cdot)$ liefert $f_k(x) = f(x, p_k) \xrightarrow{x\to\infty} f(x,p)$ für fa. $x \in M$. $\xRightarrow{\text{Theorem 2.16}} F(p_k) = \int_M f_k(x) \,\mathrm{d}\, x \to \int_M f(x,p) \,\mathrm{d}\, x = F(p)$ $\xRightarrow[\text{beliebig}]{p\in P}$ Behauptung

Satz 22.20 (Differenzierbarkeit)
Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $P \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : M \times P \to \mathbb{R}$ mit $f(\cdot, p)$ integrierbar auf M $\forall p \in P$. und

- $f(x, \cdot)$ stetig diffbar auf P für fa. $x \in M$

Weiterhin gebe es eine integrierbare Funktion $g : M \to \mathbb{R}$ mit

- $|f_P(x,p)| \leq g(x)$ für fa. $x \in M$ und $\forall p \in P$

$\Rightarrow$ F aus (10) ist diffbar auf P mit

$$F'(p) = \int_M f_p(x,p) \,\mathrm{d}\, x \tag{11}$$

Hinweis: Das Integral in (11) ist komponentenweise zu verstehen und liefert für jedes $p \in P$ einen Wert im $\mathbb{R}^m$.

Betrachtet man für $p = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^n$ nur p_j als Parameter und fixiert andere p_i, dann liefert (11) die partielle ABleitung $F_{p_j}(p) = \int_m f_{p_j}(x,p) \,\mathrm{d}\, x$ für $j = 1, \dots, m$.

Beweis. Königsberger: Analysis 2 (Abschnitt 8.4) $\square$

22.6. Riemann-Integral

Der klassische Integralbegriff hat konzeptionelle Bedeutung (Einführung etwas einfacher, keine messbaren Mengen und Funktionen)
$\Rightarrow$ weniger Leistungsfähig (Anwendung nur in speziellen Situationen)
ebenfalls: Approximation von der zu integrierenden Funktion f durch geeignete Treppenfunktionen

Sei $f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $Q \in \mathcal{Q}$ eine beschränkte Funktion. Betrachte die Menge der Treppenfunktionen $T_{\mathcal{Q}}(Q)$, der Form

$$h = \sum_{j=1}^{l} c_j \chi_{Q_j} \quad \text{mit} \quad \bigcup_{j=1}^{l} Q_j = Q,$$

$Q_j \in \mathcal{Q}$ paarweise disjunkt, $c_j \in \mathbb{R}$.

Quader $\{Q_j\}_{j=1,\dots,l}$ werden als Zerlegung zugehörig zu h bezeichnet.

Definition (Feinheit, Riemann-Summe, Riemann-Folge)
Für Quader $Q' = F'_1 \times \ldots \times F'_n \in \mathcal{Q}$ mit Intervallen $F_j \subset \mathbb{R}$ heißt $\sigma_{Q'} := \max_j |I'_j|$ ($|I'_j|$ - Intervalllänge) Feinheit von Q' (setzte $\sigma_\emptyset = 0$).

Für $h = \sum_{j=1}^l c_j \chi_{Q_j}$ heißt $\sigma_h := \max \sigma_{Q_j}$ Feinheit zur Treppenfunktion h.

Treppenfunktion $h = \sum_{j=1}^l c_j \chi_{Q_j} \in T_{\mathcal{Q}}(Q)$ heißt zulässig (RIEMANN-zulässsig) für f falls $\forall j$ $\exists x_j \in Q_j : c_j = f(x_j)$, d.h. auf jedem Quader Q_j stimmt h mit f in (mindestens) einem Punkt x_j überein.

Zu zulässigen h nennen wir $S(h) := \sum_{j=1}^l c_j |Q_j| = \sum_{j=1}^l f(x_j) \cdot |Q_j|$ RIEMANN-Summe zu h.

Folge $\{h_k\}$ zulässiger Treppenfunktionen zu f, deren Feinheit gegen Null geht (d.h. $\sigma_{h_k} \to 0$) heißt RIEMANN-Folge zu f.

f heißt RIEMANN-integrierbar (kurz R-integrierbar) auf Q, falls $S \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$S = \lim_{k \to \infty} S(h_k) \tag{12}$$

für alle RIEMANN-Folgen $\{h_k\}$ zu f.

Grenzwert $\int_Q f(x) \, \mathrm{d}\, x := S$ heißt RIEMANN-Integral (kurz R-Integral) von f auf Q.

Satz 22.21
Sei $f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $Q \in \mathcal{Q}$ abgeschlossen
$\Rightarrow$ f ist (LEBESGUE) integrierbar und RIEMANN-Integrierbar auf Q mit R-$\int_Q f \, \mathrm{d}\, x = \int_Q f \, \mathrm{d}\, x$.

▶ **Bemerkung 22.22**
Sei $f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt und es sei $N := \{x \in Q \mid f \text{ nicht stetig in } x\}$.

Dann kann man zeigen: f ist RIEMANN-Integrierbar, wenn n Nullmenge ist.

$$f \text{ ist } R\text{-integrierbar } \Leftrightarrow N \text{ ist Nullmenge.}$$

Man sieht leicht: die DIRICHLET-Funktion (Beispiel 1.5) ist auf $[0,1]$ nicht R-integrierbar, da die Treppenfunktionen $h_0 = 0$ und $h_1 = 1$ auf $[0,1]$ mit belieb feiner Zerlegung $\{Q_j\}$ jeweils stets zulässig sind, sich jedoch in der RIEMANN-Summe 0 bzw. 1 unterscheiden. (Die DIRICHLET-Funktion ist jedoch L-integrierbar)

Beweis (Satz 2.21). Als stetige Funktion ist f auf Q messbar und beschränkt und somit L-integrierbar.

Fixiere $\varepsilon > 0$ und sei $h = \sum_{j=1}^{l_k} f(x_{k_j}) \chi_{Q_j}$ RIEMANN-Folge von Treppenfunktionen zu f.

Für $|Q| = 0$ folgt die Behauptung leicht, da $S(h_k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$

Sei nun $|Q| > 0$. Da f auf kompakter Menge Q gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{|Q|}$ falls $|x - \tilde{x}| < \delta$.

Da $\sigma_{h_k} \to 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} : \sigma_{h_k} < \frac{\delta}{\sqrt{n}} \ \forall k \geq k_0$

$\Rightarrow \ |x - \tilde{x}| < \delta \ \forall x, \tilde{x} \in Q_{k_j}$ falls $k \geq k_0$ und $|f(x) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{|Q|} \ \forall x \in Q_{k_j}$ mit $k \geq k_0$

$\Rightarrow \ \left| \int_Q f \, \mathrm{d}\, x - \int_Q h_k \, \mathrm{d}\, x \right| \leq \int_Q |f - h_k| \, \mathrm{d}\, x \leq \frac{\varepsilon}{|Q|} \cdot |Q| = \varepsilon \ \forall k \geq k_0$

Da $S(h_k) = \int_Q h_k \,\mathrm{d}\, x$ und $\varepsilon > 0$ beliebig folgt $S(h_k) \to \int_Q f \,\mathrm{d}\, x$.

Für jede Riemann-Folge $\{h_k\}$ zu f ist f R-integrierbar und Behauptung folgt. $\square$

23. Integration auf $\mathbb{R}$

23.1. Integrale konkret ausrechnen

$\int_I f \,\mathrm{d}\, x$ auf Intervalle $I = (\alpha, \beta) \subset \overline{\mathbb{R}}$ (mit $\alpha \leq \beta$) (da Randpunkte eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ nur Nullmenge sind, könnte man statt offenem Intervall auch abgeschlossene bzw. halboffene Intervalle verwenden, ohne den Integralwert zu ändern)

Schreibweise:

$$\int_\alpha^\beta f \,\mathrm{d}\, x := \int_I f \,\mathrm{d}\, x \qquad \text{und} \qquad \int_\beta^\alpha f \,\mathrm{d}\, x := -\int_\alpha^\beta f \,\mathrm{d}\, x$$

($\alpha = -\infty$ bzw. $\beta = +\infty$ zugelassen)
beachte: alle Intervalle sind messbare Mengen nach Satz 1.6, Satz 1.8.

$\int_\alpha^\beta f \,\mathrm{d}\, x$ heißt auch bestimmtes Integral von f auf I.

Nach Satz 1.6 (b):

Satz 23.1
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar auf I. Dann ist I auch auf allen Teilintervallen $\tilde{I} \subset I$ integrierbar.

Theorem 23.2 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und integrierbar auf Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in I$. Dann

a) $\tilde{F} : I \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{F}(x) := \int_{x_0}^x f(y) \,\mathrm{d}\, y \ \forall x \in I$ ist Stammfunktion von f auf I.

b) Für jede Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$ auf F gilt:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x \quad \forall a, b \in I \tag{1}$$

▶ **Bemerkung 23.3**

- damit besitzt jede stetige Funktion auf I eine Stammfunktion
- (1) ist zentrale Formel zur Berechnung von Integralen auf f der reelen Achse; die linke Seite in (1) schreibt man auch kurz

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b = F|_a^b = [F(x)]_a^b = [F]_a^b$$

Beweis.

zu a Fixiere $x \in I$. Dann gilt für $t \neq 0$

$$\frac{\tilde{F}(x+t) - \tilde{F}(x)}{t} = \frac{1}{t}\left(\int_{x_0}^{x+t} f \,\mathrm{d}\, y - \int_{x_0}^{x} f \,\mathrm{d}\, y\right) = \frac{1}{t}\int_x^{x+t} f \,\mathrm{d}\, y =: \varphi(t),$$

wobei nach Satz 3.1 alle Integrale existieren.

$\xRightarrow{\text{Theorem 2.18}} \forall t \neq 0\ \exists \xi_t \in [x, x+t]$ (bzw. $[x+t, x]$ für $t<0$): $\varphi(t) = \frac{1}{|t|} f(\xi)|t| = f(\xi_t)$

$\xRightarrow{f \text{ stetig}} \tilde{F}'(x) = \lim_{t\to 0} \varphi(t) = f(x)$

$\Rightarrow$ Behauptung

zu b Für eine beliebige Stammfunktion F von f gilt: $F(x) = \tilde{F}(x) + C$ für ein $c \in \mathbb{R}$ (vgl Satz 5.1)

$\Rightarrow\ F(b) - F(a) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = \int_{x_0}^b f \,\mathrm{d}\, x - \int_{x_0}^a f \,\mathrm{d}\, x = \int_a^b f \,\mathrm{d}\, x$

$\Rightarrow$ Behauptung □

■ **Beispiel 23.4**

$$\int_a^b \gamma x \,\mathrm{d}\, x = \frac{\gamma}{2} x^2 \Big|_a^b = \frac{\gamma}{2}(b^2 - a^2)$$

für $a = 0$: Integral $= \frac{b(\gamma b)}{2}$ (Flächenformel für's Dreieck)

$a = -b < 0$: Integral $= 0$ (d.h. vorzeichenbehaftete Fläche)

■ **Beispiel 23.5**

$$\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}\, x = -\cos x|_0^\pi = 1 - (-1) = 2$$

Satz 23.6 (Substitution für bestimmte Integrale)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ stetig diffbar und streng monoton, $a, b \in I$. Dann:

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(y))\varphi'(y) \,\mathrm{d}\, y \tag{2}$$

formal: ersetzte $\alpha = \varphi(y)$ und $\mathrm{d}\, x = \frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, y} \mathrm{d}\, y = \varphi'(y) \,\mathrm{d}\, y$.

Ersetzung des Arguments von f durch $x = \varphi(y)$ bezeichnet man als Substitution bzw. Variablentransformation

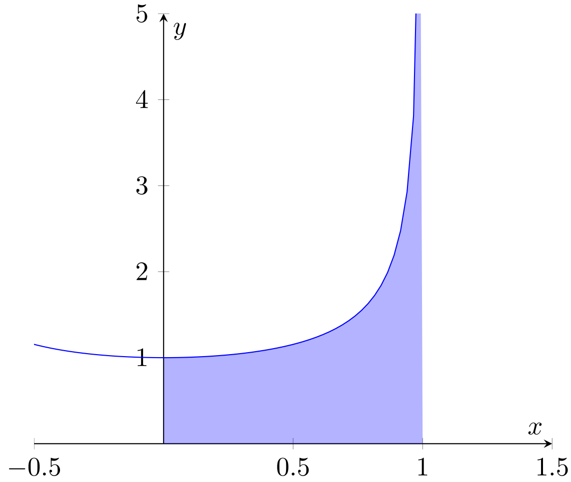
Beweis. Sei $F : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f auf I (existiert nach Theorem 3.2)

$\xRightarrow{\text{Satz 5.6}} F(\varphi(\cdot))$ ist Stammfunktion zu $f(\varphi(\cdot))\varphi'(\cdot)$

$$\xRightarrow{\text{Theorem 3.2}} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(y))\varphi'(y) \,\mathrm{d}\, y = F(\varphi(y))|_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x$$ □

■ **Beispiel 23.7**

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}\, x \overset{x=\varphi(x)=\sin y}{=} \int_0^{\varphi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \cdot \cos y \,\mathrm{d}\, y = \int_0^{\pi/2} 1 \,\mathrm{d}\, y = \frac{\pi}{2}$$



Satz 23.8 (partielle Integration für bestimmte Integrale)
Seien f, $g : I \to \mathbb{R}$ stetig und F bzw. G die zugehörigen Stammfunktionen, $a,b \in I$. Dann

$$\int_a^b fG \,\mathrm{d}\,x = FG|_a^b - \int_a^b Fg \,\mathrm{d}\,x$$

Beweis. Es gilt nach Satz 5.2

$$\int fG \,\mathrm{d}\,x = F(x)G(x) - \int Fg \,\mathrm{d}\,x$$

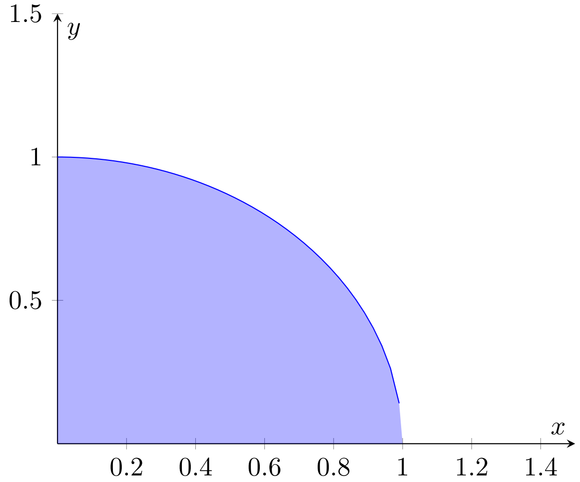
und somit folgt aus (1)

$$\int_a^b fG \,\mathrm{d}\,x = \left[\int fG \,\mathrm{d}\,x\right]_a^b = [F \cdot G]_a^b - \left[\int Fg \,\mathrm{d}\,x\right]_a^b = F \cdot G|_a^b - \int_a^b Fg \,\mathrm{d}\,x$$ □

■ **Beispiel 23.9**
Fläche des Einheitskreises: betrachte $y = \sqrt{1-x^2}$ und

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x &= \int_0^1 1 \cdot \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \left[x \cdot \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x \overset{\text{Beispiel 3.7}}{=} \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Der Viertelkreis hat die Fläche $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ und folglich die Kreisfläche von π.

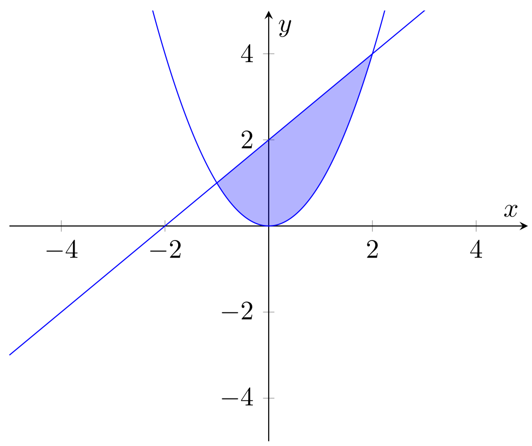


■ **Beispiel 23.10**

Berechne die Fläche zwischen den Graphen von $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$.

Schnittpunkte: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

$$\int_{-1}^{2} g - f \,\mathrm{d}\, x = \int_{-1}^{2} x + 2 - x^2 \,\mathrm{d}\, x = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$



■ **Beispiel 23.11**

Berechne die Fläche zwischen den Graphen von $f(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x$ und $g(x) = x_0$.

Schnittpunkte: $x_{1,3} = \pm\sqrt{2}$, $x_2 = 0$

Betrachte $g - f$ auf $[0, \sqrt{2}]$

$$\int_{0}^{\sqrt{2}} g - f \,\mathrm{d}\, x = \int_{0}^{\sqrt{2}} 2x - x^3 \,\mathrm{d}\, x = \left[x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{\sqrt{2}} = 1,$$

analog $\int_{-\sqrt{2}}^{0} f - g \,\mathrm{d}\, x = 1$

$\Rightarrow$ Gesamtfläche $= 2$

Satz 23.12 (Differenz von Funktionswerten)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D offen, f stetig diffbar, $[x, y] \subset D$. Dann

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 f'(x + t(y - x)) \cdot (y - x) \,\mathrm{d}\, t = \int_0^1 f(x + t(y - x)) \,\mathrm{d}\, t(y - x)$$

Hinweis: die linke Seite ist Element in $\mathbb{R}^n$ und die Integrale sind jeweils komponentenweise zu verstehen (Mitte $= \mathbb{R}^m$, rechts $\mathbb{R}^{n\times m}$). Man vergleiche den Mittelwertsatz (Theorem 4.4) und Schrankensatz (Theorem 4.9).

Beweis. Sei $f = (f_1, \dots, f_n)$, $\varphi_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_k(t) := f_K(x + t(y - x))$

$\Rightarrow$ φ_t ist diffbar auf $[0, 1]$ mit $\varphi_k'(t) = f'(x + t(y - x)) \cdot (y - x)$

$\xRightarrow{\text{Theorem 3.2}}$ $f_k(y) - f_k(x) = \varphi_k(1) - \varphi_k(0) = \int_0^1 \varphi_k'(t) \,\mathrm{d}\, t$

$\Rightarrow$ Behauptung □

23.2. Uneigentliche Integrale

Frage: $\int_I f \,\mathrm{d}\, x$ für I unbeschränkt bzw. f unbeschränkt?

Strategie: Verwende den Hauptsatz mittels Grenzprozess.

Satz 23.13
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig für a, $b \in \mathbb{R}$. Dann

$$f \text{ integrierbar auf } (a, b] \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{x \downarrow a \\ x \neq a}} \int_a^b |f| \,\mathrm{d}\, x \text{ existiert}$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f \,\mathrm{d}\, x = \lim_{k\to\infty} \int_{\alpha_k}^a f \,\mathrm{d}\, x \text{ für eine Folge } \alpha_k \downarrow a \tag{3}$$

▶ **Bemerkung 23.14**

a) Eine analoge Aussage gilt für $f : [a, b) \to \mathbb{R}$

b) Falls f beschränkt auf $(a, b]$, dann stets integrierbar (vgl. Folgerung 2.17)

c) Nutzen: Integrale können mittels Hauptsatz berechnet werden

d) Für uneigentliche Integrale $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, x$ im Sinne von Riemann-Integralen muss nur $\lim_{\alpha\downarrow a} \int_\alpha^b f \,\mathrm{d}\, x$ existieren (vgl. Beispiel 3.19 unten)

Beweis. Sei $\alpha_k \downarrow a$, $a < \alpha_k$ $\forall k$ und

$$f_k(x) := \begin{cases} f(x) & \text{auf } (\alpha_k, b] \\ 0 & \text{auf } (a, \alpha_k) \end{cases}$$

Offenbar ist $|f_k| \leq |f|$, $f_k \to f$, $|f_k| \to |f|$ f.ü. auf (a,b).

„⇒“ f integrierbar auf (a,b). Mit Theorem 2.16 (Majorisierte Konvergenz) folgt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\alpha_k}^{b} |f| \,\mathrm{d}\,x = \lim_{k\to\infty} \int_{a}^{b} |f_k| \,\mathrm{d}\,x = \int_a^b |f| \,\mathrm{d}\,x$$

$\Rightarrow$ Behauptung $\xRightarrow[\text{Beträge}]{\text{ohne}}$ (3)

„⇐“ Folge $\{|f_k|\}$ monoton wachsend,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{a}^{b} |f_k| \,\mathrm{d}\,x = \lim_{k\to\infty} \int_{\alpha_k}^{b} |f| \,\mathrm{d}\,x \quad \text{existiert}$$

$\xRightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{majorisierte}}$ f integrierbar □

■ **Beispiel 23.15**

$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} \,\mathrm{d}\,x$ existiert für $0 < \gamma < 1$ und <u>nicht</u> für $\gamma \geq 1$

Für $\gamma \neq 1$: $\displaystyle\int_{\alpha_k}^{1} \frac{1}{x^\gamma} \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} \Big|_{\alpha_k}^{1} = \frac{1}{1-\gamma}(1-\alpha_k)^{1-\gamma} \xrightarrow{\alpha_k \downarrow 0} \frac{1}{1-\gamma}$

(keine Konvergenz für $1-\gamma \leq 0$, $\gamma = 1$: analog mit Stammfunktion $\ln x$)

Satz 23.16

sei $f : [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ stetig, dann

$$f \text{ integrierbar auf } [a,+\infty] \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta |f| \,\mathrm{d}\,x \text{ existiert}$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty f \,\mathrm{d}\,x = \lim_{k\to\infty} \int_0^{\beta_k} f \,\mathrm{d}\,x$ für eine Folge $\beta_k \to \infty$

▶ **Bemerkung 23.17**

Analoge Bemerkungen wie in Bemerkung 3.14

Beweis. Analog zu Satz 3.13 □

■ **Beispiel 23.18**

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma} \,\mathrm{d}\,x \text{existiert für } \gamma > 1 \text{ und nicht für } 0 \leq \gamma \leq 1$$

Für $\gamma \neq 1$:

$$\int_1^{\beta_k} \frac{1}{x^\gamma} \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\gamma} x^{1-\gamma} \Big|_1^{\beta_k} = \frac{1}{\gamma - 1}(1 - \beta_k^{1-\gamma}) \xrightarrow{\beta_k \to \infty} \frac{1}{\gamma-1},$$

falls $1-\gamma < 0$ (keine Konvergenz für $1-\gamma \geq 0$, $\gamma = 1$ analog mit Stammfunktion $\ln x$)

■ **Beispiel 23.19**

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}\, x$$

Offenbar ist $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}\, x \geq \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| \,\mathrm{d}\, x = \frac{2}{k\pi}$ $\forall k \geq 1$ (vgl. Beispiel 3.5)

$$\Rightarrow \int_0^{k\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}\, x \geq \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$$

$\Rightarrow$ $\frac{\sin x}{x}$ <u>nicht</u> integrierbar auf $(0, \infty)$

<u>aber:</u>

$$\int_1^\beta \frac{1}{x} \sin x \,\mathrm{d}\, x = \frac{\cos 1}{1} - \frac{\cos \beta}{\beta} - \int_1^\beta \frac{\cos x}{x^2} \,\mathrm{d}\, x$$

Wegen $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ $\forall x \neq 0$, $\frac{1}{x^2}$ ist integrierbar nach Beispiel 3.18

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{\cos x}{x^2} \,\mathrm{d}\, x$ existiert nach Satz 2.10

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}\, x$ existiert $\Rightarrow$ $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$ $\left(= \frac{\pi}{2}\right)$ existiert als uneigentliches Integral im Sinne des Riemann-Integral (vgl Bemerkung 3.14), aber nicht als Lebesgue-Integral.

24. Satz von Fubini und Mehrfachintegrale

Ziel: Reduktion der Berechnung von Integralen auf $\mathbb{R}^n$ $\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\, x$ auf Integrale über $\mathbb{R}$.

Betrachte Integrale auf $X \times Y$ mit $X = \mathbb{R}^p$, $Y = \mathbb{R}^q$, $(x, y) \in X \times Y$. $|M|_X$ Maß auf X, $\mathcal{Q}_X$ Quader in X usw.

Theorem 24.1 (Fubini)
Sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $X \times Y$. Dann

a) Für Nullmenge $N \subset Y$ ist $x \to f(x, y)$ integrierbar auf X $\forall y \in Y \setminus N$

b) Jedes $F : Y \to \mathbb{R}$ mit $F(y) := \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\, x$ $\forall y \in Y \setminus N$ ist integrierbar auf Y und

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_Y F(y)\,\mathrm{d}\, y = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\, x \right) \mathrm{d}\, y \tag{1}$$

Definition (iteriertes Integral, Mehrfachintegral)
Rechte Seite in (1) heißt iteriertes Integral bzw. Mehrfachintegral .

▶ **Bemerkung 24.2**
Analoge Aussage gilt bei Vertauschungen von X und Y mit

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_X \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\, y\,\mathrm{d}\, x \tag{2}$$

Theorem 4.1 mit $f = \chi_N$ für Nullmenge $N \subset X \times Y$ liefert Beschreibung von Nullmengen in $X \times Y$.

Folgerung 24.3
Sei $N \subset X \times Y$ Nullmenge und $N_Y := \{x \in X \mid (x, y) \in N\}$
$\Rightarrow \exists$ Nullmenge $\tilde{N} \subset Y$ mit $|N_Y|_X = 0$ $\forall y \in Y \setminus \tilde{N}$
Hinweis: $\tilde{N} \neq \emptyset$ tritt z.B. auch auf für $N = \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(\tilde{N} = \mathbb{Q})$

Beweis (Theorem 4.1, Folgerung 4.3).

a) Zeige: Theorem 4.1 gilt für $f = \chi_M$ mit $M \subset X \times Y$ messbar, $|M|_{X\times Y} < \infty$
   - $\exists Q_{k_j} \in \mathcal{Q}_{X\times Y}$, paarweise disjunkt für festes k mit $M \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_{k_j} =: R_k$

$$|M| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_{k_j}| \leq |M| + \frac{1}{k}, R_{k+1} \subset R_k \tag{3}$$

   - Wähle $Q'_{k_j} \in \mathcal{Q}_X$, $Q''_{k_j} \in \mathcal{Q}_Y$ mit $Q_{k_j} = Q'_{k_j} \times Q''_{k_j}$ $\forall k, j \in \mathbb{N}$
   - Mit $M_Y := \{x \in X \mid (x, y) \in M\}$ gilt:

$$|M_Y|_X \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q'_{k_j}|_X \cdot \chi_{Q''_{k_j}}(y) =: \psi_k(y) \in [0, \infty] \quad \forall y \in Y \tag{4}$$

   - Für festes k ist $y \to \psi_{k_l}(y) := \sum_{j=1}^{l} |Q'_{k_j}|_X \cdot \chi_{Q_{k_j}}(y)$ monoton wachense Folge und Treppenfuntion in $T^1(Y)$ mit $\psi_k(y) = \lim\limits_{l\to\infty} \psi_{k_l}(y)$

$$\Rightarrow \int_Y \psi_{k_l}(y)\,\mathrm{d}\,y = \sum_{j=1}^{l} |Q'_{k_j}|_X \cdot |Q''_{k_j}|_Y = \sum_{j=1}^{l} |Q_{k_j}|_{X\times Y} \overset{(3)}{\leq} |M| + \frac{1}{k}$$

- Nach Lemma 2.11 ist $\{\psi_{k_l}\}_l$ L^1-CF zu ψ_k und ψ_k ist integrierbar auf Y mit

$$|M| \overset{(3)}{\leq} \int_Y \psi_k\,\mathrm{d}\,y = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_{k_j}|_{X\times Y} \overset{(3)}{\leq} |M| + \frac{1}{k} \tag{5}$$

- Da $\{\psi_k\}$ monoton fallend (wegen $R_{k+1} \subset R_k$), existiert $\psi(y) = \lim_{k\to\infty} \psi_k(y) \geq 0\ \forall y \in Y$.
- Grenzwert (5) mittels majorisierter Konvergenz liefert

$$|M| = \int_Y \psi\,\mathrm{d}\,y \tag{6}$$

- Falls $|M| = 0$, folgt $\psi(y) = 0$ f.ü. auf Y

  $\Rightarrow$ Folgerung 4.3 bewiesen.

- $\{\chi_{R_k}\}$ monoton fallend mit $\psi_{R_k} \to \chi_M$ f.ü. auf $X \times Y$ und χ_{R_k} integrierbar auf $X \times Y$

  $\Rightarrow$ $\{\chi_{R_k}\}$ ist L^1-CF zu χ_M und

$$\int_{X\times Y} \psi_{R_k}\,\mathrm{d}(x,y) \to \int_{X\times Y} \chi_M\,\mathrm{d}(x,y).$$

- Nach Folgerung 4.3 existiert Nullmenge $\tilde{N} \subset Y$ mit $\chi_{R_k}(\,\cdot\,,y) \to \chi_M(\,\cdot\,,y)$ f.ü. auf X $\forall y \in Y \setminus \tilde{N}$

  $\xRightarrow{(3),(4)}$ $\chi_{R_k}(\,\cdot\,,y)$ integrierbar auf X $\forall k \in \mathbb{N}$, $y \in Y \setminus \tilde{N}$

  $\xRightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{majorisierte}}$ $\chi_M(\,\cdot\,,y)$ integrierbar auf X $\forall y \in Y \setminus \tilde{N}$ mit

$$\psi(y) = \int_X \chi_{R_k}(x,y)\,\mathrm{d}\,x \to \int_X \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

  für fa. $y \in Y$

$$\overset{(6)}{\Longrightarrow} \int_{X\times Y} \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = |M| = \int_Y \left(\int_X \chi_m(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y$$

- D.h. Behauptung für $f = \chi_M$

  $\xRightarrow[\text{des Integrals}]{\text{Linearität}}$ Behauptung richtig für alle Treppenfunktionen

b) Sei $f \geq 0$ integrierbar auf $X \times Y$

Wähle zu f monotone Folge von Treppenfunktionen $\{h_k\}$ gemäß Folgerung 1.16

$$\Rightarrow \int_{X\times Y} h_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{a)}}{=} \int_Y \left(\int_X h_k\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y$$

Analog zu a) folgt: $h_k(\,\cdot\,,y) \to f(\,\cdot\,,y)$ f.ü. auf X für fa. $y \in Y$

$\xRightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{Majorisierte}}$ Behauptung für f.

Allgemein: Zerlege $f = -f^- + f^+$ und argumentiere für $f^\pm$ separat. □

Satz 24.4 (Satz von Tonelli)
Sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ messbar. Dann

$$f \text{ integrierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \int_Y \left(\int_X |f(x,y)| \,\mathrm{d}\, x \right) \mathrm{d}\, y \quad \text{oder} \quad \int_X \left(\int_Y |f(x,y)| \,\mathrm{d}\, y \right) \mathrm{d}\, x \tag{7}$$

existiert.

▶ Bemerkung 24.5

a) Falls eines der iterierten Integrale (7) mit $|f|$ existieren, dann gelte (1), (2)

b) Existiert z.B. $\int_Y \left(\int_X |f| \,\mathrm{d}\, x\right) \mathrm{d}\, y$ heißt dies: $\exists$ Nullmenge $\tilde{N} \subset Y$ mit

$$F(y) := \int_X |f(x,y)| \,\mathrm{d}\, x \quad \forall y \in Y \setminus \tilde{N}$$

und mit $F(y) := 0 \ \forall y \in \tilde{N}$ ist F integrierbar auf Y

Beweis.

„$\Rightarrow$“ Mit f auch $|f|$ integrierbar und die Behauptung folgt aus Theorem 4.1

„$\Leftarrow$“ Sei $W_k := (-k,k)^{p+q} \subset X \times Y$ Würfel, $f_k :=\in \{|f|, k \cdot \chi_{W_k}\}$

$\Rightarrow$ f ist integrierbar auf $X \times Y$

Offenbar sind die $\{f_k\}$ wachsend, $f_k \to |f|$ f.ü. auf $X \times Y$. Falls oberes Integral in (7) existiert, gilt

$$\int_{X\times Y} f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_Y \left(\int_X f_k \,\mathrm{d}\, x \right) \mathrm{d}\, y \leq \int_Y \left(\int_X |f| \,\mathrm{d}\, x \right) \mathrm{d}\, y < \infty$$

$\Rightarrow$ $\{\int_{X\times Y} f_k \,\mathrm{d}(x,y)\}$ beschränkte Folge

$\xRightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{Majorisierte}}$ $|f|$ integrierbar $\xRightarrow{\text{Satz 2.7}}$ f integrierbar $\Rightarrow$ Behauptung □

Folgerung 24.6
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_{\mathbb{R}} \dots \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) \,\mathrm{d}\, x_1 \right) \dots \mathrm{d}\, x_n \tag{8}$$

Beweis. Mehrfachanwendung von Theorem 4.1 □

▶ Bemerkung 24.7

1) Die Reihenfolge der Integration in (8) ist beliebig

2) Integrale reduzieren die Integration auf reelle Integrale über $\mathbb{R}$

3) Für $\int_M f \,\mathrm{d}\, x$ ist $(\chi_M f)$ gemäß (8) zu integrieren, wo ggf. $\int_{\mathbb{R}} \dots$ durch $\int_a^b \dots$ mit geeigneten Grenzen ersetzt wird.

■ Beispiel 24.8
Sei $f : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, $M = [a,b] \times [c,d]$

$\Rightarrow$ f messbar, beschränkt auf M

$\Rightarrow$ f integrierbar auf M

$\Rightarrow$ $\chi_M f$ ist integrierbar auf $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_M f \,\mathrm{d}\, x &= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_M f \,\mathrm{d}\, x = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_M(x_1, x_2) f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\, x_1 \,\mathrm{d}\, x_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_a^b \chi_{[c,d]}(x_2) f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\, x_1 \,\mathrm{d}\, x_2 = \int_c^d \int_a^b f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\, x_1 \,\mathrm{d}\, x_2\end{aligned}$$

Z.B. $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot \sin x_2$, $M = [0,1] \times [0, \pi]$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_M f \,\mathrm{d}\, x &= \int_0^\pi \int_0^1 x_1 \sin x_2 \,\mathrm{d}\, x_1 \,\mathrm{d}\, x_2 = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} x_1^2 \sin x_2\right]_0^1 \mathrm{d}\, x_2 \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin x_2 \,\mathrm{d}\, x_2 = \left[-\frac{1}{2} \cos x_2\right]_0^\pi = 1\end{aligned}$$

■ **Beispiel 24.9**

Sei $f : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

$\Rightarrow$ $\chi_M f$ integrierbar auf $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow \int_M f \,\mathrm{d}(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_M f \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, x = \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, x$$

Z.B. $f(x, y) = |y|$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_M |y| \,\mathrm{d}(x, y) &= 2 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, x = 2 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} y^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}\, x \\ &= 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1 - x^2) \,\mathrm{d}\, x = \left[x - \frac{1}{3} x^3\right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

■ **Beispiel 24.10**

Sei $f : M \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig, M Tetraeder mit Ecken 0, e_1, e_2, e_3

$$\int_M f \,\mathrm{d}(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) \,\mathrm{d}\, z \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, x$$

Z.B: $f(x, y, z) = 1$:

$$\begin{aligned}\int_M 1 \,\mathrm{d}(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) \,\mathrm{d}\, z \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, x = \int_0^1 \int_0^{1-x} [z]_0^{1-x-y} \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, x \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 - x - y \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, z = \int_0^1 [y - xy - \frac{y^2}{2}]_{y=0}^{1-x} \,\mathrm{d}\, x = \int_0^1 \frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \,\mathrm{d}\, x \\ &= \frac{1}{6},\end{aligned}$$

das Volumen eines Tetraeders.

24.1. Integration durch Koordinatentransformation

Definition (Diffeomorphismus, diffeomorph)
Sei $f : U \subset K^n \to V \subset K^m$ bijektiv, wobei U, V offen.

f heißt Diffeomorphismus, falls f und f^{-1} stetig diffbar auf U bzw. V sind.

U und V heißen dann diffeomorph.

Theorem 24.11 (Transformationssatz)
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \to V$ Diffeomorphismus. Dann

$$f : V \to \mathbb{R} \text{ integrierbar} \;\Leftrightarrow\; f(\varphi(\,\cdot\,))|\det \varphi'(y)| : U \to \mathbb{R} \text{ integrierbar}$$

und es gilt

$$\int_U f(\varphi(y)) \cdot |\varphi'(y)| \,\mathrm{d}\, y = \int_V f(x) \,\mathrm{d}\, x \tag{9}$$

Beweis. Vgl. Literatur (z.B. Königsberger Analysis 2, Kapitel 9) □

Sei $U = Q \in \mathcal{Q}$ Würfel, $V := \varphi(Q)$, $\tilde{y} \in \mathcal{Q}$, $x := \varphi(\tilde{y})$
$\overset{(9)}{\Longrightarrow} |V| = \int_V 1 \,\mathrm{d}\, y = \int_Q |\det \varphi'(y)| \,\mathrm{d}\, y \overset{Q \text{ klein}}{\approx} |\det \varphi'(\tilde{y})| \cdot |Q|$, d.h. $|\det \varphi'(y)|$ beschreibt (infinitesimale) relative Veränderung des Maßes unter Transformation φ.

■ **Beispiel 24.12**

Sei $V = B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ Kugel mit Radius $R > 0$.

Zeige: $|B_R(0)| = \displaystyle\int_V 1 \,\mathrm{d}(x, y, z) = \frac{4}{3}\pi R^3$

Benutze Kugelkoordinaten (Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$) mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \varphi(r, \alpha, \beta) := \begin{pmatrix} r \cos\alpha \cos\beta \\ r \sin\alpha \cos\beta \\ r \sin\beta \end{pmatrix}$$

Für $(r, \alpha, \beta) \in U : (0, R) \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Mit $H := \{(x, 0, z) \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ und $\tilde{V} := V \setminus H$ gilt: $|H|_{\mathbb{R}^3} = 0$

$\varphi : U \to \tilde{V}$ diffbar, injektiv, und

$$\varphi'(r, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cos\beta & -r \sin\alpha \cos\beta & -r \cos\alpha \sin\beta \\ \sin\alpha \cos\beta & r \cos\alpha \cos\beta & -r \sin\alpha \sin\beta \\ \sin\beta & 0 & r \cos\beta \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Definiere $\varphi'(r, \alpha, \beta) = r^2 \cos\beta \neq 0$ auf U

$\overset{Satz 27.8}{\Longrightarrow}$ $\varphi : U \to \tilde{V}$ ist Diffeomorphismus

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad |B_R(0)| &= \int_V 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\tilde{V}} 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) + \int_H 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) \\
&\overset{(9)}{=} \int_U |\det \varphi'(r,\alpha,\beta)| \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,\alpha \,\mathrm{d}\,\beta + |H| \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\beta \,\mathrm{d}\,\beta \,\mathrm{d}\,\alpha \,\mathrm{d}\,r \\
&= \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} [r^2 \sin\beta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \,\mathrm{d}\,\alpha \,\mathrm{d}\,r = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} 2r^2 \,\mathrm{d}\,\alpha \,\mathrm{d}\,r = \int_0^R 4\pi r^2 \,\mathrm{d}\,r \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3 \Big|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}$$

■ **Beispiel 24.13 (Rotationskörper im $\mathbb{R}^3$)**

Sei $g : [a,b] \to [0,\infty]$ stetiger, rotierender Graphen von g um die z-Achse.
$\to$ Bestimme das Volumen des (offenen) Rotationskörpers $V \subset \mathbb{R}^3$.

Benutze Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \varphi(r,\alpha,z) := \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \\ z \end{pmatrix}$$

auf

$$U = \{(r,\alpha,z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in (0, g(z)), \alpha \in (-\pi,\pi), z \in (a,b)\},$$

mit $H := \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0\}$, $\tilde{V} := V \setminus H$ gilt $|H| = 0$ und $\varphi : U \to \tilde{V}$ diffbar, injektiv, sowie

$$\varphi'(r,\alpha,z) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & r\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r > 0 \text{ auf } U$$

$\overset{\text{Satz 27.8}}{\Longrightarrow}$ $\varphi : U \to \tilde{V}$ ist Diffeomorphismus

V messbar (da offen) $\Rightarrow \tilde{V}$ messbar, und offenbar $f = 1$ integrierbar auf $\tilde{V}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad |V| = |\tilde{V}| \quad &= \int_{\tilde{V}} 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{(9)}{=} \int_U |\det \varphi'(r,\alpha,z)| \,\mathrm{d}(x,y,z) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{g(z)} r \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,\alpha \,\mathrm{d}\,z = \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{g(z)} \,\mathrm{d}\,\alpha \,\mathrm{d}\,z \\
&= \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(z)^2}{2} \,\mathrm{d}\,\alpha \,\mathrm{d}\,z = \pi \int_a^b g(z)^2 \,\mathrm{d}\,z
\end{aligned}$$

Z.B. $g(z) = R$ auf $[a,b]$: $|V| = \pi \int_a^b R^2 \,\mathrm{d}\,z = \pi R^2(b-a)$ (Volumen des Kreiszylinders)

Kapitel VII

Differentiation II

25. Höhere Ableitungen und Taylor-scher Satz

Vorbetrachtung: Sei X endlich dimensionaler, normierter Raum über K (d.. Vektorraum über K mit Norm $\|\cdot\|$, $\dim X = l \in \mathbb{N}$).

Offebar sind X und K^l isomorph als Vektorraum, schreibe $X \cong K^l$, z.B. $X = L(K^n, K^m) \cong K^{m \cdot n}$.

Für $g : D \subset K^n \to X$, D offen, kann man die bisherigen Resultate bezüglich der Ableitung übertragen. $g'(x) \in L(K^n, X)$ heißt Ableitung von g im Punkt $x \in D$, falls

$$g(x+y) = g(x) + g'x()y + o(|y|),\ y \to 0$$

Definition (zweite Ableitung)
Betrachte nun $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, f diffbar auf D. Falls $g := f' : D \to L(K^n, K^m) =: y_1$ diffbar in $x \in D$ ist, heißt

$$f''(x) := g'(x) \in L(K^n, Y_1) = L\big(K^n, \underbrace{L(K^n, K^m)}_{\cong K^{m\times n}}\big) \tag{1}$$

zweite Ableitung von f in X.

Offenbar gilt dann:

$$f'(x+y) = f'(x) + f''(x)y + o(|y|),\ y \to 0$$

bzw.

$$f'(x+y)\cdot z = f'(x)\cdot z + \underbrace{\big(\underbrace{f''(x)\cdot y}_{\in K^{m\times n}}\big)z}_{\in K^m} + o(|y|)\cdot z \quad \forall z \in K^n \tag{2}$$

Interpretation: Betrachte $f''(x)$ als kubische bzw. 3-dimensionale „Matrix“ (heißt auch Tensor 3. Ordnung).

beachte: Ausdruck für $f''(x+y)\cdot z$ ist jeweils linear in y und z.

Frage: höhere Ableitungen, d.h. von $f'' : D \to L(K^n, Y_1)$ usw.

Offenbar:

$$g_2 := L(K^n, Y_1) = L\big(K^n, L(K^n K^m)\big) \cong L(K^n, K^{m\times n}) \cong L(K^n, K^{m\times n}) \cong K^{m\cdot n^2}$$
$$g_3 := L(K^n, Y_2) \cong L(K^n, K^{m\cdot n^2}) \cong K^{k\cdot n^3}$$

Endlich dimenionale, normierte Räume, man kann rekursiv $\forall k \in \mathbb{N}$ definieren:

(i) (Räume)

$$Y_0 = K^n \quad \text{mit } |\,.\,|$$

$$Y_{k+1} := L(K^n, Y_k) \text{ mit Standardnormen } \|A\|_{k+1} = \sup_{|z|\leq 1} \|Az\|_{Y_k} \text{ (vgl. Satz 13.8),}$$

analog zu oben ist $Y_k \cong K^{m\cdot n^k}$, Y_k normierter Raum

(ii) (Ableitungen)

$f^{(0)} := f : D \subset K^n \to K^m$, D offen.
Falls $f^{(k)} : D \to Y_k$ diffbar in $x \in D$ heißt

$$f^{(k+1)}(x) := \left(f^{(k)}\right)(x) \in L(K^n, Y_k)$$

$(k+1)$-te Ableitung von f in x. (beachte: $f^{(1)}(x) = f'(x)$)

Somit gilt:

$$f^{(k)}(x+y) = f^{(k)}(x) + f^{(k+1)}(x) \cdot y + o(|y|) \; (\in Y_k), \; y \to 0 \tag{3}$$

Definition (k-fach differenzierbar)
f heißt k-fach differenzierbar (auf D), falls $f^{(k)}$(x) existiert $\forall x \in D$.

f heißt k-fach stetig diffbar (auf D) oder C^k-Funktion, falls f k-fach diffbar und $f^{(k)} : D \to Y_k$ stetig.

$C^k(D, K^m) := \{f : D \to K^m \,|\text{f } k\text{-fach stetig diffbar auf } D\}$

Hinweis: Falls $f^(k)(x)$ existiert $\Rightarrow$ $f^{(k-1)}$ stetig in X (vgl. Satz 2.2)

Speziafall $n = 1$: $f : D \subset K \to K^m$

$$f'(x) \in Y_1 = L(K, K^n) \cong K^m$$

$$f''(x) \in Y_2 = L(K, Y_1) \cong L(K, K^m) \cong K^m$$

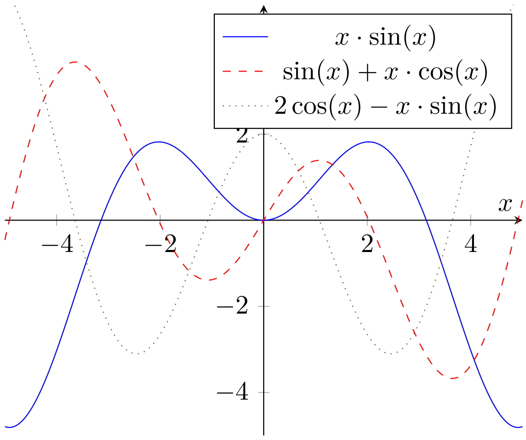
Allgemein: $f^{(k)}(x) \in Y_k = L(K, Y_{k-1}) \cong L(K, K^m) \cong K^m$, d.h. für $n = 1$ kann $f^{(k)}(x)$ stets als m-Vektor in K^m betrachtet werden.

■ **Beispiel 25.1**
Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot \sin x$

$\Rightarrow \quad f'(x) = \sin x + x \cdot \cos x$

$\Rightarrow \quad f''(x) = \cos x + \cos x - x \sin x = 2\cos x - x \sin x$

$\Rightarrow \quad f'''(x) = -3\sin x - x \cos x$ usw.



■ **Beispiel 25.2**

sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = \binom{x^3}{\ln x}$.

$$\Rightarrow\ f'(x) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow\ f''(x) = \begin{pmatrix} 6x \\ -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow\ f'''(x) = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{2}{x^3} \end{pmatrix}$$

■ **Beispiel 25.3**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$

Folglich

$$\Rightarrow\ f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \\ -3x^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow\ f''(x) = \begin{cases} 6x \\ -6x \end{cases}$$

$\Rightarrow f'''(0)$ existiert nicht, d.h. $f \in C^2(K, \mathbb{R})$ aber $f \notin C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

■ **Beispiel 25.4**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f^{(k)}(x)$ existiert $\forall x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ mit $f^{(k)}(0) = 0\ \forall k$, d.h. $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Man schreibt auch $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Räume $\mathbf{Y_k}$: $= L(K^n, Y_{k-1}) \cong K^{m \times n^k}$.

Für $A \in Y_k = L(K^n, Y_{k-1})$ und $y_1, \ldots, y_k \in K^n$ gilt:

$$\begin{aligned}
&A \cdot y_1 && \in Y_{k-1} = L(K^n, Y_{k-2}), \\
&(Ay_1) \cdot y_2 && \in Y_{k-2} = L(K^n, Y_{k-3}) \\
& && \vdots \\
&(\dots (Ay_1)y_2) \dots \cdot y_k) \in Y_0 && = K^m
\end{aligned}$$

Ausdrücke links sind offebar linear in jedem $y_j \in K^n$ separat, $j = 1 \dots, k$

Definition (k-lineare Abbildung)
Betrachte

$$\begin{aligned}
X_k &:= L^k(K^n, K^m) \\
&:= \{B : \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{k\text{-fach}} \to K^m \mid y_j \to B(y_1, \dots, y_k) \text{ linear für jedes } j = 1, \dots, k \}
\end{aligned}$$

$B \in X_k$ heißt k-lineare Abbildung . X_k ist Vektorraum.

■ **Beispiel 25.5**
Für 3-lineare Abbildung $B \in L^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ mit

$$B(x, y, z) = \begin{pmatrix} xyz \\ (x+y)z \end{pmatrix}$$

ist z.B. nicht linear als Abbildung auf $\mathbb{R}^3$.

Satz 25.6
Für $k \in \mathbb{N}$ ist $I_k : Y_k \to X_k$ mit

$$(I_k A)(y_1, \dots, y_k) := \big(\dots\big((Ay_1)y_2\big)\dots y_k\big) \quad \forall A \in Y_k,\ y_j \in K^n,\ j = 1, \dots, k \tag{4}$$

ein Isomorphismus bezüglich der Vektorraum-Struktur (also $X_k \cong Y_k$).

Hinweis: Somit kann $f^{(k)}(x)$ auch als Element von X_k betrachtet werden, d.h. $f^{(k)}(x) \in X_k = L^k(K^n, K^m)$

Damit wird z.B. (2) zu

$$f'(x+y) \cdot z = f'(x) \cdot z + f''(x) \cdot (y, z) + o(|y|) \cdot z \quad \forall z \in K^n \tag{5}$$

und für $n = 1$ gilt

$$f^{(k)}(x)(y_1, \dots, y_k) = \underbrace{f^{(k)}(x)}_{\in K^m} \cdot \underbrace{y_1 \cdot \dots y_k}_{\text{Produkt von Zahlen}} \quad \forall y_j \in K$$

Beweis. I_k offenbar linear auf Y_k, I_k injektiv, denn $I_k(A) = 0$ gdw. $A = 0$

Zeige mittels Vollständiger Induktion: I, surjektiv.

<u>IA:</u> Offenbar ist $X_1 = Y_1$ und $I_1 A = A \Rightarrow I_1$ surjektiv

<u>IS:</u> Sei I_k surjektiv und wähle beliebiges $B \in X_{k+1}$.
Setze $\tilde{B}_{y_1} := B(y_1, \cdot, \dots, \cdot) \in X_k\ \forall y_1 \in K^n$, $\tilde{B} \in L(K^n, X_k)$

$$\Rightarrow\ A := I_k^{-1}\tilde{B} \in L(K^n, Y_k) = Y_{k+1} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ (I_{k+1}A)(y_1,\dots,y_{k+1}) &\overset{(4)}{=} \big(\dots\big((Ay_1)y_2\big)\dots y_{k+1}\big) = \big(I_K(Ay_1)\big)(y_2,\dots,y_{k+1})\\ &\overset{(6)}{=} (\tilde{B}y_1)(y_2,\dots,y_{k+1}) \qquad = B(y_1,\dots,y_{k+1})\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ B = I_{k+1}\cdot A \Rightarrow I_{k+1}$ surjektiv

$\Rightarrow I_k$ Isomorphismus □

Norm: in X_k, Y_k: für $A \in Y_k$ folgt durch rekursive Definition

$$\begin{aligned}&\left(\dots\left(\left(A\frac{y_1}{|y_1|}\right)\frac{y_2}{|y_2|}\right)\dots\frac{y_k}{|y_k|}\right) \le \|A\|_{Y_k} \quad \forall y_j \in K^n,\ y_j \ne 0\\ \Rightarrow\ &\big(\dots\big((Ay_1)y_2\big)\dots y_k\big) \le \|A\|_{Y_k}|y_1||y_2|\dots|y_k| \quad \forall y_1\ \dots, y_k \in K^n\end{aligned} \tag{7}$$

Norm für $A \in X_k = L^k(K^n, K^m)$:

$$\|A\|_{X_k} := \sup\{|A(y_1,\dots,y_k)| \mid y_j \in K^n,\ |y_j| \le 1\}$$

Analog zu (7) folgt für $A \in X_k$:

$$|A(y_1,\dots,y_k)| \le \|A\|_{X_k}|y_1|\cdot\ldots\cdot|y_k| \quad \forall y_j \in K^n \tag{8}$$

Satz 25.7
Mit Isomorphismus $I_k : Y_k \to X_k$ aus Satz 1.6 gilt:

$$\|I_(A)\|_{X_k} = \|A\|_{Y_k} \quad \forall A \in Y_k$$

Beweis. Selbststudium / ÜA □

▶ **Bemerkung 25.8**
$\|f^{(k)}(x)\|$ unabhängig davon, ob man $f^{(k)}(x)$ als Element von X_k oder Y_k betrachtet.

25.1. Partielle Ableitungen

Sei $X = (x_1, \dots, x_k) \in K^n$; d.h. $x_j \in K$, $e_1, \dots, e_k$ die Standard-Einheitsvektoren

Wiederholung: Partielle Ableitung $f_{x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = D_{x_j} f(x)$ ist Richtungsableitung $f'(x, e_j) = D_{e_j} f(x) \in L(K, K^m)$.

Definition (partielle Ableitung)
Nenne $f_{x_1}(x), \dots, f_{x_1}(x)$ partielle Ableitung 1. Ordnung von f in X

Für $g : D \to X$ definieren wir die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_j} g(x) = g_{x_j}(x) \in L(K, X)$ analog zu Abschnitt 3:

$$g(x + t \cdot e_j) = g(x) + g_{x_j}(x)t + o(t),\ t \to 0,\ t \in K \tag{9}$$

Für $g = f_x : D \to L(K, K^m)$ ist dann $g_{x_j} \in L\big(K, L(K, K^m)\big)$. Für $g = f_{x_j} : D \to L(K, K^m)$ ist dann $g_{x_j} \in L(K, L(K, K^m)) \cong L^2(K, K^m) \cong K^m$ die partielle Ableitung $f_{x_i x_j}(x)$ von f in x nach x_i und x_j.

Andere Notation: $\frac{\partial^2}{\partial x_j x_i} f(x), D_{x_i x_j} f(x), \dots$

Die $f_{x_i x_j}(x)$ heißen partielle Ableitung 2. Ordnung von f in x.

Mittels Rekursion

$$f_{x_{j_1} \dots x_{j_k}}(x) := \frac{\partial}{\partial x_i} f_{x_{i_1} \dots x_{j_k}} \tag{10}$$

erhält man schrittweise die partielle Ableitung der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ von f in x:

$$f_{x_{j_1} \dots x_{j_k}}(x) = D_{x_{j_1} \dots x_{j_k}} f(x) = \frac{\partial^k}{\partial x_{j_k} \dots \partial_{x_{j_1}}} f(x) \in L^k(K, K^m)$$

Berechnung durch schrittweises Ableiten von $x_{j_1} \to f(x_1, \dots, xn)$, $x_{j_2} \to f_{x_{j_1}}(x_1, \dots, x_n)$ usw.

■ **Beispiel 25.9**
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y \sin x\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y\cos x & \qquad f_y(x,y) &= \sin x \\ f_{xx}(x,y) &= -y \sin x & f_{yy}(x,y) &= 0 \\ f_{xy}(x,y) &= \cos x & f_{yx}(x,y) &= \cos x \end{aligned}$$

Beobachtung: $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$

Abkürzende Schreibweise:

$$\begin{aligned} f_{x_j x_j x_j}(x) &= \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_j \partial x_j} f(x) = \frac{\partial^3}{\partial x_j^3} f(x) \\ f_{x_i x_j x_i x_l x_l} f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_l^2 \partial x_j^2 \partial x_i} f(x) \end{aligned}$$

Definition (Hesse-Matrix)
Für $m = 1$ (d.h. $f : D \subset \mathbb{R}^n \to K$) ist

$$\begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x) & \dots & f_{x_1x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x) & \dots & f_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix} =: \mathrm{Hess}(f)$$

die HESSE-Matrix , die alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung enthält.

■ **Beispiel 25.10**
Sei $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_1x_2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

Folglich

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad f_{x_2}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_1^2 \\ x_2 & x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

ist die JACOBI-Matrix sowie

$$\mathrm{Hess}(f_1) = \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Hess}(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Anschaulich: alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung bilden eine 3D Matrix.

Frage: Zusammenhang von $f^{(k)}(x)$ mit partiellen Ableitungen?

Theorem 25.11
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, $x \in D$. Dann

(a) Falls $f^{(k)}(x)$ existiert, dann existieren alle partiellen Ableitungen der Ordnung k in x und

$$f_{x_{j_1}\dots x_{j_k}}(x) = f^{(k)}(x)(e_{j_k}, \dots, e_{j_1}) \tag{11}$$

(b) Falls alle partiellen Ableitungen $f_{x_{j_1}\dots x_{j_k}}$ der Ordnung k für alle $y \in B_r(x) \subset D$ existieren und falls diese stetig sind
$\Rightarrow$ f ist k-fach diffbar, d.h. $f^{(k)}(x)$ existiert.

▶ **Bemerkung 25.12**
Theorem 1.11 (b) ist ein wichtiges Kriterium zur Prüfung der diffbarkeit, k-te Ableitung kann dann mittels (11) bestimmt werden.

Beweis. Jeweils mittels vollständiger Induktion nach K ausgeführt:

a) basiert auf Theorem 3.11

b) basiert auf Theorem 4.14 □

■ **Beispiel 25.13 (nochmal Beispiel 1.10)**
$f^{(2)}(x) = f''(x) \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ existiert $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ nach Theorem 1.11 und kann als Vektor von der HESSE-Matrix dargestellt werden:

$$f^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{Hess} f_1 \\ \mathrm{Hess} f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Was ist nun $f''(x)(y_1, y_2)$ für (Vektoren) y_1, $y_2 \in \mathbb{R}^2$?

$$\begin{aligned}
f''(x)(y_1, y_2) &= f''(x)\left(\binom{y_{11}}{y_{12}}, \binom{y_{21}}{y_{22}}\right) = f^{(2)}(x)(y_{11}e_1 + y_{12}e_2, y_{21}e_1 + y_{22}e_2) \\
&= y_{11} f''(x)(e_1, y_2) + y_{12} f''(x)(e_2, y_2) \\
&= y_{21}y_{11} f''(x)(e_1, e_1) + y_{12}y_{21} f''(x)(e_2, e_1) + y_{11}y_{22} f''(x)(e_1, e_2) + y_{12}y_{22} f''(x)(e_2, e_2) \\
&\overset{(11)}{=} y_{11}y_{21} f''_{x_1x_1}(x) + y_{12}y_{21} f_{x_1x_2}(x) + y_{21}y_{22} f_{x_2x_1}(x) + y_{12}y_{22} f_{x_2x_2}(x) \ (\in \mathbb{R}^2) \\
&= \begin{pmatrix} \langle (\mathrm{Hess} f_1)(x) y_1, y_2 \rangle \\ \langle (\mathrm{Hess} f_2)(x) y_1, y_2 \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Analoge Rechnung liefert allgemein

■

Folgerung 25.14
Für $f = (x_1, \ldots, f_m) : D \subset K^n \to K^m$, D offen, es existieren alle $f^{(2)}(x)$ für $x \in D$. Dann

$$f^{(2)}(x)(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \langle (\mathrm{Hess} f_1)(x) y_1, y_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle (\mathrm{Hess} f_m)(x) y_1, y_2 \rangle \end{pmatrix} \in K^m \ \forall y_1, y_2 \in K^n \tag{12}$$

▶ **Bemerkung 25.15**
Für höhere Ableitungen wird die Darstellung $f^{(k)}(x)(y_1, \ldots, y_k)$ allgemein mittels partiellen Ableitungen immer komplexer, wird allerdings auch selten benötigt.

Frage:: Kann man die Reihenfolge bei partiellen Ableitungen vertauschen? (vgl. Beispiel 1.9)

■ **Beispiel 25.16**
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

und folglich

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(,0,)}{t} = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

insbesondere $f_x(0,y) = -y \ \forall y \in \mathbb{R}$, also $f_{xy}(0,0) = -1$

analog $f_y(x,0) = \ \ x \ \forall x \in \mathbb{R}$, also $f_{yx}(0,0) = +1$

Satz 25.17 (Satz von Schwarz)
Für $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D offen. Mögen die partiellen Ableitungen f_{x_i}, f_{x_j}, $f_{x_i x_j}$ auf D existieren. Falls $f_{x_i x_j}$ stetig in $x \in D$

$$\Rightarrow \ f_{x_j x_i}(x) \text{ existiert und } f_{x_i x_j}(x) = f_{x_j x_i}(x) \tag{14}$$

Folgerung 25.18
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D offen, f k-fach diffbar (d.h. $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$)
$\Rightarrow$ alle partiellen Ableitung bis Ordnung k existieren und die Reihenfolge kann vertauscht werden.

Beweis (Folgerung 1.18). Existenz der partiellen Ableitung und deren Stetigkeit folgen aus Theorem 1.11, beliebige Vertauschung der Reihenfolge kann durch schrittweises Vertauschen von zwei „benachbarten Veränderlichen“ erreicht werden.
$\xRightarrow{\text{Satz } 1.17}$ Behauptung

Zur Veranschaulichung:

$$\begin{aligned} f_{x_3x_1x_2}(x) &\overset{(10)}{=} D_{x_2}f_{x_3x_1}(x) \overset{\text{Satz 1.17}}{=} D_{x_2}f_{x_1x_3}(x) \overset{(10)}{=} f_{x_1x_3x_2}(x) \\ &\overset{(10)}{=} (f_{x_1})_{x_3x_2}(x) \overset{\text{Satz 1.17}}{=} (f_{x_1})_{x_2x_3}(x) \overset{(10)}{=} f_{x_1x_2x_3}(x) \end{aligned}$$ □

Beweis (Satz 1.17). oBdA $m = 1$. Fixiere $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ mit

$$x + s \cdot e_i + t \cdot e_j \in D \quad \forall s, t \in (-\delta, \delta)$$

und

$$|f_{x_ix_j}(x + s \cdot e_i + t \cdot e_j) - f_{x_ix_j}(x)| < \varepsilon \quad \forall s, t \in (-\delta, \delta) \tag{15}$$

Definiere $\varphi(s) := f(x + s \cdot e_i + t \cdot e_j) - f(x + s \cdot e_i)$ ist diffbar auf $(-\delta, \delta)$ $\forall t \in (-\delta, \delta)$
$\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow}$ $\exists \sigma \in (0, s) : \varphi(s) - \varphi(0) = \varphi'(\sigma)s = (f_{x_i}(x + \sigma e_i + te_j) - f_{x_i}(x + \sigma e_i))\, s$
$\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow}$ für $t \to f_{x_i}(x + \sigma e_i + te_j)$: $\exists \tau \in (0, t) : \varphi(s) - \varphi(0) = f_{x_ix_j}(\underbrace{x + \sigma e_i + \tau e_j}_{=:\tilde{x}})st$ (σ, τ abhängig von s, t)

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\varphi(s) - \varphi(0)}{st} - f_{x_ix_j}(x)\right| &\leq \underbrace{\left|\frac{\varphi(s) - \varphi(0)}{st} - f_{x_ix_j}(\tilde{x})\right|}_{=0} + \left|f_{x_ix_j}(\tilde{x}) - f_{x_ix_j}(x)\right| \\ &\overset{(15)}{<} \varepsilon \quad \forall s, t \in (-\delta, \delta),\ s, t \neq 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Wegen

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(s) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + s \cdot e_i + t \cdot e_j) - f(x + s \cdot e_i)}{t} - \frac{f(x + t \cdot e_j) - f(x)}{t} = f_{x_j}(x + s \cdot e_i) - f_{x_j}(x)$$

folgt aus Gleichung (16)

$$\left|\frac{f_{x_j}(x + s \cdot e_i) - f_{x_j}(x)}{s} - f_{x_ix_j}(x)\right| < \varepsilon \quad \forall s \in (-\delta, \delta);\ s \neq 0 \tag{17}$$

$\overset{\varepsilon > 0}{\Longrightarrow} f_{x_jx_i}(x) = \lim_{s \to 0} \frac{f_{x_j}(x + s \cdot e_i) - f_{x_j}(x)}{s} \overset{(17)}{=} f_{x_ix_j}(x)$ □

25.2. Anwendungen

Frage: Wann besitzt $fD \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Stammfunktion? (Vgl. Abschnitt 5, oBdA $m = 1$)

Satz 25.19 (notwendige Integrabilitätsbedingung)
Sei $f = (f_1, \ldots, f_n) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, D Gebiet, f stetig diffbar.

Damit f eine Stammfunktion $F : D \to \mathbb{R}$ besitzt, muss folgende Integrabilitätsbedingung erfüllt sein:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x) \quad \forall x \in D,\ i, j = 1, \ldots, n \tag{18}$$

▶ **Bemerkung 25.20**
(18) ist hinreichend, falls z.B. D konvex (siehe Analysis 3)

Beweis. f habe Stammfunktion $F \Rightarrow F \in C^2(D)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow F_{x_j}(x) &&= f_j(x) \quad \forall x \in D, j, i \\ &\Rightarrow F_{x_j x_i}(x) &&= \tfrac{\partial}{\partial x_i} f_j(x) \ \forall x \in D, i, j \\ &\overset{\text{Schwarz}}{\Longrightarrow} F_{x_j x_i}(x) &&= F_{x_i x_j}(x) = \tfrac{\partial}{\partial x_j} f_i(x) \end{aligned}$$

□

■ **Beispiel 25.21**
Nochmal Beispiel 5.11 mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Betrachte die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y) = \alpha x, \qquad \frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y) = 2x$$

$\overset{(18)}{\Longrightarrow} \alpha = 2$

Satz 25.22
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen und konvex, f stetig diffbar. Dann:

a) f konvex $\Leftrightarrow \langle f'(x), y - x\rangle \leq f(y) f(x) \ \forall x, y \in D$

b) falls sogar $f \in C^2(D)$, dann:

$$f \text{ konvex} \Leftrightarrow f''(x) = (\text{Hess} f)(x) \text{ positiv definit } \forall x \in D$$

Beweis. Vgl. Literatur □

25.3. Taylor-scher Satz

Ziel: Bessere Approximation als durch Linearisierung

Verwende <u>allgemeine Polynome</u> $\varphi : K^n \to K$ der Ordnung k, d.h.

$$\varphi(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \ldots + \sum_{j_1,\ldots,j_k}^{n} a_{j_1 \cdots j_k} x_{j_1} \cdot \cdots \cdot x_{j_k} \tag{19}$$

mit a_0, a_j, $a_{ij} \in K$ gegebene Koeffizienten
Notation: $f^{(k)}(x)(y, \ldots, y) = f^{(k)}(x) y^k$

Wiederholung: $f \in C(D)$: $f(x+y) = f(x) + o(1)$, $y \to 0$
$f \in C^1(D)$: $f(x+y) = f(x) + f(x)y + o(|y|)$, $y \to 0$

Theorem 25.23 (Taylor-scher Satz)
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, k-fach diffbar auf D, $x \in D$. Dann

$$f(x+y) = f(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x) y^j + R_k(y) \quad \text{falls } [x, x+y] \subset D, \tag{20}$$

wobei

$$|R_k(y)| \leq \frac{1}{k!} \left| f^{(k)}(x+\tau y) y^k \right| \leq \frac{1}{k!} \left\| f^{(k)}(x+\tau y) \right\| |y|^k \tag{21}$$

für ein $\tau = \tau(y) \in (0,1)$

Für $K = \mathbb{R}$, $m = 1$ gilt auch

$$R_k(y) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x+\tau y) y^k \tag{22}$$

(LAGRANGE Restglied)

Falls $f \in C^k(D, K^m)$ gilt:

$$R_k(y) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) y^k + o(|y|^k),\ y \to 0 \tag{23}$$

▶ **Bemerkung 25.24**
Entscheidente Aussage in Theorem 1.23 ist nicht (20), sondern die Eigenschaften des Restglieds (dies wird klein).

Beweis. Sei $[x, x+y] \subset D$, definiere

$$R_K(y) = f(x+y) - f(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x) y^j \quad \Rightarrow (20)$$

und definiere

$$\varphi(t) := f(x+y) - f(x+ty) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(1-t)^j}{j!} f^{(j)}(x+ty) y^j - (1-t)^k R_k(y)$$

Offenbar $\varphi(1) = 0 = \varphi(0)$.

Da f k-fach diffbar
$\Rightarrow$ $\varphi : [0,1] \to K^m$ $\mathbb{R}$-diffbar auf $(0,1)$ mit

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -f'(x+ty) \cdot y + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{(1-t)^{j-1}}{(j-1)!} f^{(j)}(x+ty) y^j - \frac{(1-t)^j}{j!} f^{(j+1)}(x+ty) y^{j+1} \right) + k(1-t)^{k-1} R_k(y) \\ &= -\frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x+ty) y^k + k(1-t)^{k-1} R_k(y) \end{aligned} \tag{24}$$

(a) $K = \mathbb{R}$, $n = 1$: nach MWS $\exists \tau \in (0,1)$ und

$$0 = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) \quad \overset{(24)}{\Longrightarrow} (22)$$

(b) zu (21) mit $K = \mathbb{R}$: Sei $\psi(t) := \langle \varphi(t), v \rangle$ für $v \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ diffbar auf $(0,1)$ mit $\psi'(t) = \langle \varphi'(t), r \rangle$

$\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow}$ $\exists \tau \in (0,1)$: $0 = \langle \varphi'(\tau), v \rangle$

$$\Rightarrow \langle R_K(y), v \rangle = \frac{1}{k!} \langle f^{(k)}(x + \tau y) y^k, v \rangle \tag{25}$$

mit $v = \frac{R_k(y)}{|R_k(y)|}$ ($|R_k(y)| \neq 0$, sonst klar) und es folgt

$$\langle R_k(y), v \rangle = |R_k(y)| = \left\langle \frac{1}{k!} f^{(k)}(x + \tau y) y^k, v \right\rangle \overset{|v|=1}{\leq} \frac{1}{k!} \left| f^{(k)}(x + \tau y) y^k \right| \quad \overset{(8)}{\Longrightarrow} (21)$$

(c) $K = \mathbb{C}$: identifiziere $\mathbb{C}^m$ mit $\mathbb{R}^{2m}$ und setzte $\varphi(t) = \langle \varphi(t), r \rangle_{\mathbb{R}^{2m}}$.

Beachte:

- $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \mathfrak{Re} \varphi_j(t) = \mathfrak{Re} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \varphi_j(t)$ $\forall j$
- $\langle R_k(y), R_k(y) \rangle_{\mathbb{R}^{2m}} = |R_k(y)|^2_{\mathbb{C}^m}$

und argumentiere wie in b)

(d) zu (23): Setzte $R_k(y) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) y^k + r_k(y)$ in (25), $r = \frac{r_k(y)}{|r_k(y)|}$ (falls $r_k(y) \neq 0$)

$$\Rightarrow \frac{|r_k(y)|}{|y|^k} \leq \frac{1}{k! |y|^k} \left| \left(f^{(k)}(x + \tau(y) y) - f^{(k)}(x) \right) y^k \right| \overset{(8)}{\leq} \frac{1}{k!} \left\| f^{(k)}(x + \tau(y) y) - f^{(k)}(x) \right\| \xrightarrow{y \to 0} 0,$$

d.h. $r_k(y) = o(|y|^k)$, $y \to 0$ □

Definition (Taylorpolynom, Taylorentwicklung)

Rechte Seite in (20) ohne Restglied heißt Taylorpolynomvon f in x vom Grad $k - 1$.

(20) heißt Taylorentwicklungvon f in x.

Folgerung 25.25 (Taylor-Formel mit partiellen Ableitungen)

Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, d offen, f k-fach diffbar auf D, $x \in D$, $[c, c + y] \subset D$:

$$f(x + y) = f(x) = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l!} \sum_{j=1}^{n} f_{x_{j_l} \dots x_{j_1}}(x) y_{j_1} \dots y_{j_l} + R_k(y), \tag{26}$$

wobei $y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$ (d.h $y_j \in K$ Zahlen).

Beweis. Benutze (11) □

▶ **Bemerkung 25.26**

Falls alle partiellen Ableitungen von f bis Ordnung k existieren und stetig sind auf D
$\Rightarrow f \in C^k(D)$ und (26) (vgl. Theorem 1.11)

■ **Beispiel 25.27**
Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\cos x$. Für $x=0$ gilt:

$$\begin{aligned}\cos y &= \cos 0 + \frac{1}{1!}\big(\cos'(0)\big)y + \frac{1}{2!}\big(\cos''(0)\big)y^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\big(\cos^{(k)} 0\big)y^k + o(|y|^k)\\ &\overset{k=8}{=} 1 - 0\cdot y - \frac{1}{2}y^2 + 0y^3 + \frac{1}{24}y^4 - 0\cdot y - \frac{1}{720}y^6 + 0\cdot y^7 + \frac{1}{40320}y^8 + o(|y|^8)\end{aligned}$$

(gilt auch für $K=\mathbb{C}$)

■ **Beispiel 25.28**
Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=(x_1^2+x_1x_2+\sin x_2)$ $(x=(x_1,x_2))$

Taylorentwicklung in $x_0=(1,\pi)$, $y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$.

$$f(x+y)=f(x_0)+f'(x_0)y+\frac{1}{2}f''(x_0)y^2+\frac{1}{3}f'''(x_0)y^3+o(|y|^3)$$

Offenbar sind

$$f'(x)=\begin{pmatrix}2x_1+x_2\\ x_1+\cos x_2\end{pmatrix} \qquad f''(x)=(\operatorname{Hess} f)(x)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -\sin x_2\end{pmatrix}$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned}f(x_0+y) &= f(x_0)+f_{x_1}(x_0)y_1+f_{x_2}(x_0)y_2\\ &\quad + \frac{1}{2!}f_{x_1x_1}(x_0)y_1^2+\frac{2}{2}f_{x_1x_2}(x_0)y_1y_2+\frac{1}{2}f_{x_2x_2}(x)y_2^2\\ &\quad + \frac{1}{3}f_{x_2x_2x_2}(x_0)y_2^3+o(|y|^3)\\ &= 1+\pi+(2+\pi)y_1+0\cdot y_2+y_1^2+y_1y_2+0\cdot y_2^2+\frac{1}{6}y_2^3+o(|y|^3),\ y\to 0\end{aligned}$$

Frage: Falls $f\in C^\infty(D)$ existiert, dann

$$f(x+y)=f(x)*\sum\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)y^k+\cancel{o(|y|^k)}\quad \text{für } k=1,\ldots,n \tag{27}$$

Definition (Taylorreihe)
Rechte Seite in (27) heißt Taylorreihevon f in x.

■ **Beispiel 25.29**
Sei $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ mit $f(x)=\sin x$ für $x=0$, dann

$$f^{(k)}(0)=\begin{cases}0 & k \text{ gerade}\\ (-1)^k & \text{für } k=2l+1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ (27) hat die folgende Form:

$$\sin y = y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}+\ldots=\sum(-1)^l\frac{y^{2l+1}}{(2l+1)!}\ \text{für } l=0,\ldots,\infty$$

Diese gilt $\forall y \in \mathbb{C}$ (vgl. Definition Sinus in Kap. 13), analog Cosinus

■ Beispiel 25.30

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Nach Beispiel 1.4: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(k)}(0) = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$

$\xRightarrow{(27)}\ f(y) = 0)\ \forall y \Rightarrow \lightning$

$\Rightarrow$ (27) gilt nicht für alle $f \in C^\infty(D)$

Wiedeholung: Eine Reihe ist konvergent, falls die Folge der Partialsummen konvergieren, und damit (27) gilt, muss die Reihe auch gegen $f(x+y)$ konvergieren!

Satz 25.31 (Taylorreihe)

Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, $f \in C^\infty(D, K^m)$, $x \in D$, $B_r(x) \subset D$. Falls

$$\lim_{k\to\infty} R_k(y) = 0 \quad \forall y \in B_r(x)$$

$\Rightarrow$ Taylorformel (27) gilt $\forall y \in B_r(x)$ und f heißt analytisch in x.

Beweis. Folgt direkt aus Theorem 1.23 □

■ Beispiel 25.32

sin, cos, exp : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind jeweils analytisch in allen $x \in \mathbb{C}$ und (27) gilt jeweils $\forall y \in \mathbb{C}$ (klar für $x = 0$) aus der Definition, für $x \neq 0$ erfolgt der Nachweis als ÜA / Selbststudium.

26. Extremwerte

26.1. Lokale Extrema ohne Nebenbedingung

Betrachte $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, f diffbar.

notwendige Bedingung: (Theorem 4.1): f hat lokales Minimum / Maximum in $x \in D \Rightarrow f'(x) = 0$

Frage: Hinreichende Bedingung?

Definition (definit, semidefinit, indefinit)
$f^{(k)}(x)$ für $k \geq$ heißt positiv definit (negativ definit), falls

$$f^{(k)}(x)y^k > 0\ (< 0) \quad \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{1}$$

und positiv (negativ) semidefinit mit $\geq$ ($\leq$).

$f^{(k)}$ heißt indefinit , falls

$$\exists y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : f^{(k)}(x)y_1^k < 0 < f^{(k)}(x)y_2^k \tag{2}$$

Hinweis: k ungerade, $f^{(k)}(x) \neq 0 \Rightarrow f^{(k)}(x)$ indefinit, denn $f^{(k)}(-y)^k = (-1)^k f^{(k)}(x)y^k$

Satz 26.1 (Hinreichende Extremwertbedingung)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, $f \in C^k(D, \mathbb{R})$, $x \in D$, $k \geq 2$ und sei

$$f'(x) = \ldots = f^{(k-1)} = 0 \tag{3}$$

Dann:

a) f hat strenges lokales Minimum (Maximum), falls $f^{(k)}(x)$ positiv (negativ) definit

b) f hat weder Minimum noch Maximum, falls $f^{(k)}(x)$ indefinit.

▶ **Bemerkung 26.2**

1) Falls $f^{(k)}(x)$ positiv (negativ) semidefinit $\Rightarrow$ keine Aussage möglich.

   (betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$, hat Minimum in $x = 0$, aber $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3$ hat weder Minimum noch Maximum in $x = 0$)

2) b) liefert: $f^{(k)}(x) \neq 0$ positiv (negativ) semidefinit ist notwendige Bedingung für ein lokales Minimum bzw. Maximum, falls (3) gilt

Beweis.

zu a) Für Minimum (Maximum analog):

Sei $f^{(k)}(x)$ positiv definite Abbildung, $y \to f^{(k)}(x)y^k$ stetige Abbildung (folgt aus Bemerkung 1.8).

Sei $S = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| = 1\}$ ist kompakt

$$\xRightarrow{\text{Theorem 3.3}} \quad \exists \tilde{y} \in S : f^{(k)}(x)y^k \geq f^{(k)}(x)\tilde{y}^k =: \gamma > 0 \; \forall y \in S$$

$$\begin{aligned} \xRightarrow{\text{Theorem 1.23}} \quad f(x+y) &= f(x) + \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x)y^k + o(|y|^k) \\ &= f(x) + \tfrac{1}{k!}|y|^k \left(\underbrace{f^{(k)}(x)\left(\frac{y}{|y|}\right)^k}_{\geq \gamma} + \underbrace{o(1)}_{\geq -\frac{\gamma}{2}} \right), \; |y| \to 0 \\ &\geq f(x) + \tfrac{\gamma}{2k!} \cdot |y|^k \; \forall y \in B_r(0) \text{ falls } y \in B_r(0),\, r > 0 \text{ klein} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ x ist strenges, lokales Minimum $\Rightarrow$ Behauptung

zu b) Wähle y_1, y_2 gemäß (2), oBdA $|y_1| = |y_2| = 1$

$$\begin{aligned} \xRightarrow[|t| \text{ klein}]{\text{analog zu a)}} \quad f(x+ty_1) &= f(x) + \tfrac{t^k}{k!}\left(f^{(k)}(x)y_1^k + o(1)\right) < f(x), \\ f(x+ty_2) &= f(x) + \tfrac{t^k}{k!}\left(f^{(k)}(x)y_2^k + o(1)\right) > f(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung □

Test Definitheit in Anwendungen: $k = 2$ wichtig (vgl. lineare Algebra).

$f''(x) \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ (Hesse-Matrix)

$f''(x)y^2 = f''(x)(y, y) = \langle (\mathrm{Hess} f)(x)y, y \rangle$, vgl. Beispiel 1.10

Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times}$ ist

- positiv (negativ) definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte sind positiv (negativ)
- indefinit $\Rightarrow$ $\exists$ positive und negative Eigenwerte

26.2. Sylvester'sches Definitheitskriterium

Eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist positiv definit gdw. alle führenden Hauptminoren positiv sind, d.h.

$$\alpha_k := \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

beachte: A negativ definit $\Leftrightarrow$ $-A$ positiv definit

Spezialfall $n = 2$:

- $\det A < 0 \Leftrightarrow$ indefinit
- $\alpha_1 < 0$ und $\det A > 0 \Leftrightarrow$ negativ definit

■ **Beispiel 26.3**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1^2 + \cos x_2$

$\Rightarrow$ $f'(x_1, x_2) = (2x_1) - \sin x_2 = 0$

$\Rightarrow$ $x_1 = 0$, $x_2 = k \cdot \pi$, d.h. $\tilde{x} = (0, k \cdot \pi)$ für $k \in \mathbb{Z}$ sind Kandidaten für Extrema.

$$f''(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\cos x_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad f(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & (-1)^{k+1} \end{pmatrix}$$

entsprechend ergeben sich folgende Fälle:

$\Rightarrow$ $f''(\tilde{x})$ ist positiv definit für k ungerade

$\Rightarrow$ lokales Minimum,

$\Rightarrow$ $f''(\tilde{x})$ ist indefinit für k gerade

$\Rightarrow$ kein Extremum

26.3. Lokale Extrema mit Gleichungsnebenbedingung

Betrachte $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffbar, D offen, $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffbar

Frage:: Bestimmen von Extrema von f auf der Menge $G := \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$, d.h. suche notwendige Bedingung (für hinreichende Bedingung sieh Vorlesung Optimierung)

Motivation: Für $m \geq 1$: notwendige Bedingung: $f'(\max)$ steht senkrecht auf der Niveaumenge G
$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : f'(x_{\max}) + \lambda g'(x_{\max}) = 0$

Satz 26.4 (Lagrange-Multiplikatorregel, notwendige Bedingung)
Seien $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}^m$ stetig, diffbar, D offen und sei $x \in D$ lokales Extremum von f bezüglich G, d.h.

$$\exists r > 0 : f(x) \substack{\leq \\ \geq} f(y) \quad \forall y \in B_r(x)$$

mit $g(y) = 0$.

Falls $g'(x)$ regulär, d.h.

$$\operatorname{rang} g'(x) = m, \tag{4}$$

dann

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^m : f'(x) + \lambda^{\mathsf{T}} g'(x) = 0 \tag{5}$$

Definition (Lagrangescher Multiplikator)
λ oben heißt Lagrangescher Multiplikator

▶ Bemerkung 26.5

- Offenbar nur für $m \leq n$
- x mit (4) heißt reguläres Extrema .
- Kandidaten für Extrema bestimmen: (5) liefert n Gleichungen für $n + m$ Unbekannte (x, λ), aber (5) mit $g(x) = 0$ liefert $n + m$ Gleichungen für (x, λ)

Beweis. Vgl. Literatur. □

■ **Beispiel 26.6**

Bestimme reguläre Extrema von f auf $G = \{g = 0\}$ mit

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$$
$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + 4y^2 - 1 \\ z \end{pmatrix}$$

Betrachte $\lambda^\mathsf{T} = (\lambda_1, \lambda_2)$:

$$0 = f'(x, y, z) + \lambda^\mathsf{T} g'(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) + \lambda^\mathsf{T} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 8y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$
$$0 = g(x, y, z)$$

Das heißt

$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda_1 x &= 0 & x^2 + 4y^2 &= 1 \\ 2y + 8\lambda_1 y &= 0 & z &= 0 \\ 2z + \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow z = 0,\ \lambda_2 = 0$, und

$$x(1 + \lambda_1) = 0 \qquad y(1 + 4\lambda_1) = 0 \qquad x^2 + 4y^2 = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{falls: } \bullet\ x \neq 0\colon \lambda_1 = -1,\ y = 0,\ x = \pm 1 \Rightarrow (\pm 1, 0, 0) \\ &\phantom{\text{falls: }} \bullet\ x = 0\colon y = \pm\tfrac{1}{2},\ \lambda_1 = -\tfrac{1}{1} \Rightarrow (0, \pm\tfrac{1}{2}, 0) \end{aligned}\right\}\ \text{Kandidaten für reguläre Extrema}$$

Offenbar ist rang $g'(x, y, z) = 2$ für alle Kandidaten.

Da G Ellipse in der x-y-Ebene ist, und f die Norm in's Quadrat, prüft man leicht: Minimum in $(0, \pm\frac{1}{2}, 0)$ und Maximum in $(\pm 1, 0, 0)$.

26.4. Globale Extrema mit Abstrakter Nebenbedinung

Betrachte $f : \overline{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, D offen, f stetig auf $\overline{D}$, diffbar auf D.
Existenz: nach Theorem 3.3:

$$D \text{ beschränkt} \xRightarrow{\overline{D} \text{ kompakt}} f \text{ besitzt auf } \overline{D} \text{ ein Minimum und ein Maximum}$$

Frage: Bestimme sogenannte globale Extremalstelle $x_{\min}$, $x_{\max}$.

Strategie:: a) Bestimmte lokale Extrema in D

b) Bestimme globale Extrema auf ∂D

c) Vergleiche Extrema aus a) und b)

■ **Beispiel 26.7**

Sei $f(x_1, x_2) = x_1^2 + \cos x_2$ mit $D = (-1, 1) \times (0, 4)$ (vgl. Beispiel 2.3).

Lokale Extrema in D: $f(0, \pi) = -1$ Minimum.

Globale Extrema auf ∂D:

- $x_1 = \pm 1$: Betrachte $x_2 \to f(\pm 1, x_2) = 1 + \cos x_2$ auf $[0, 4]$.

  Offenbar $0 = f(\pm 1, \pi) \leq f(\pm 1, x_2) \leq f(\pm 1, 0) = 2$

- $x_2 = 0$: $x_1 \to f(x_1, 0) = x_1^2 + 1$ auf $[-1, 1]$

  Offenbar $1 = f(0, 0) \leq f(x_1, 0) \leq f(\pm 1, 0) = 2$

- $x_2 = 4$: Betrachte $x_1 \to x_1^2 + \cos 4$ mit $[-1, 1]$

  $\cos 4 \leq f(0, 4) \leq f(x_1, 4) \leq f(\pm 1, 4) = 1 + \cos 4$

Vergleich liefert:$x_{\min} = (0, \pi)$, $x_{\max} = (\pm 1, 0)$

Hinweis: Bentze für Extrema evtl. partielle Ableitungen

$$\begin{aligned} & f_{x_2}(\pm 1, x_2) = -\sin x_2 = 0 \\ \text{bzw.} \quad & f_{x_1}(x_1, 0) = 2x_1 = 0 \qquad \text{usw.} \end{aligned}$$

27. Inverse und implizite Funktionen

Frage 1: Sei $f : D \subset K^n \to K^m$ diffbar, $x \in D$. Wann existiert – zumindest lokal – diffbar Umkehrfunktion?

Vorbetrachtung: f ist dann (lokal) Diffeomorphismus und man hat in Umgebung von x

- f^{-1} existiert $\Rightarrow$ f injektiv
- f^{-1} diffbar, z.B. $y \in K^m \Rightarrow B_\varepsilon(y) \subset f(K^m)$ für ein $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ (y innerer Punkt) f surjektiv

Falls f linear, d.h. $f(x) = Ax$ und $A \in L(K^n, K^m) \Rightarrow n = m$ und A regulär.

Für allgemeine Funktion sollte dann gelten: $n = m$, $f'(x)$ regulär (sonst ungewiss)

■ **Beispiel 27.1**

Sei $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_j(x) = x^j$ (in Umgebung von $_0$). f_1 und f_3 sind invertierbar, f_2 nicht.

wobei: $f_1'(0) = 1$ $(\neq 0)$ regulär, $f_2'(0) = 0 = f'(0) \Rightarrow$ nicht regulär

■ **Beispiel 27.2**

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cos \frac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(0) = 1$, d.h. regulär

<u>aber:</u> f in keiner Umgebung von $x = 0$ invertierbar (Selbststudium / ÜA) (Problem: f' nicht stetig in $x = 0$)

Lemma 27.3

Sei $f : U \subset K^n \to V \subset K^m$, U, V offen, f Diffeomorphismus mit $f(U) = V$

$\Rightarrow n = m$

Beweis. Sei $y = f(x) \in V$ für $x \in U$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(f(x)) = x, \; f(f^{-1}(y)) = y$$

$$\xRightarrow[\text{regel}]{\text{Ketten-}} \quad \underbrace{(f^{-1})'(f(x))}_{n\times m} \cdot \underbrace{f'(x)}_{m\times n} = \mathrm{id}_{K^n}, \; f'(x) \cdot (f^{-1})'(y) = \mathrm{id}_{K^m}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathfrak{Re}\left((f^{-1})'(y)\right) &= K^n \; \Rightarrow n \leq m \text{ sowie} \\ \mathfrak{Re}\left(f'(x)\right) &= K^m \; \Rightarrow m \leq n \end{aligned}\right\} n = m$$

□

Frage 2: Lösen von Gleichungen:

Sei $f : D \subset K^n \times K^l \to K^m$, $(x, y) \in K^n \times K^l$.

Bestimme Lösungen y in Abhängigkeit vom Parameter x für folgende Gleichung:

$$f(x,y) = 0 \tag{1}$$

Sinnvolle Anwendung:

- Lösung $y = g(x)$ hängt stetig oder Differenzierbar vom Parameter x ab

■ **Beispiel 27.4**

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffbar.

Betrachte die Niveaumenge

$$N = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\right\} \quad (\widehat{=} \text{ Kurve})$$

Im Allgemeinen mehrere Lösungen von (1) für $\tilde{x}$ fest.

$\Rightarrow$ betrachte lokale Lösung, d.h. fixiere $(x_0, y_0) \in N$ und suche Lösungen in der Umgebung.
Was passiert bei (x_j, y_j)?

- $j = 1$: Kreuzungspunkt: $\Rightarrow$ keine eindeutige Lösung (offenbar $f'(x,y) =$)
- $j = 2$: kein eindeutiges y (offenbar $f'(x,y) = 0$)
- $j = 3$: eindeutige Lösung, aber Grenzfall mit $f_y(x_3, y_3) = 0$
- $j = 4$: eindeutige Lösung y und offenbar $f_y(x_4, y_4) \neq 0$

$\xRightarrow{\text{Vermutung}}$ lokale Lösung existiert, falls $f_y(x_0, y_0)$ regulär

$\xRightarrow{\text{allgemein}}$
a) beste lokale Lösungen, d.h. in Umgebung einer Lösung $(x_0, y_0) \in D$
b) lokal eindeutige Lösung y erforderlich $\forall x$

$\Rightarrow$ $y \to f(x,y)$ muss invertierbar sein für festes x

$\Rightarrow$ I.A. nur für $l = m$ möglich (vgl. Lemma 3.3).
Betrachte z.B. f affin linear in y, d.h. (1) hat die Form $A(x)y = b(x)$ mit $A(x) \in L(K^l, K^m)$, $b(x) \in K^m$

$\Rightarrow$ betrachte somit $f : D \subset K^n \times K^m \to K^m$

$\Rightarrow$ für gegebenes x hat (1) m skalare Gleichungen mit m skalaren Unbekannten

$$f^j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

$\Rightarrow$ Faustregel: wie bei linearen Gleichungen benötigt man m skalare Gleichungen zur Bestimmung von m skalaren Unbekannten.
(mehrere Gleichungen: in der Regel keine Lösung, weniger Gleichungen: i.A. viele Lösungen)

Definition
u[(lokale) Lösung] Funktion $\tilde{y} : \tilde{D} \subset K^n \to K^m$ heißt (lokale) Lösung von (1) in x auf $\tilde{D}$ falls

$$f(x, \tilde{y}(x)) = 0 \quad \forall x \in \tilde{D} \tag{2}$$

Man sagt: (1) beschreibt Funktion $\tilde{y}$ implizit (d.h. nicht explizit)
häufig schreibt man $y(x)$ statt $\tilde{y}(x)$

Sei $f : D \subset K^n \times K^m \to K^m$, D offen, $f_x(x,y)$ bzw. $f_y(x,y)$ ist Ableitung der Funktion $x \to f(x,y)$ (für y feste) im Punkt x bzw. von $y \to f(x,y)$ (x fest) im Punkt y heißt partielle Ableitung von f in (x,y) bezüglich x. bzw. y

Theorem 27.5 (Satz über implizite Funktionen)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^m \times K^m \to K^m$, D offen, f stetig und

a) $f(x_0, y_0) = 0$ für ein $(x_0, y_0) \in D$

b) die Partielle Ableitung $f_y : D \to L(K^m, K^n)$ existiert, ist stetig in (x_0, y_0) und $f_y(x_0, y_0)$ ist regulär

Dann:

1) $\exists r, \rho > 0$: $\forall x \in B_r(x_0)\ \exists! y = \tilde{y} \in B_\rho(y_0)$ mit $f(x, \tilde{y}(x)) = 0$ und $\tilde{y} : B_r(x_0) \to B_\rho(y_0)$ stetig

   (beachte: $B_r(x_0) \times B_\rho(y_0) \subset D$)

2) falls zusätzlich $f : D \to K^m$ stetig diffbar
   $\Rightarrow$ auch $\tilde{y}$ stetig diffbar auf $B_r(x_0)$ mit

$$\tilde{y}'(x) = -\underbrace{f_y(x, \tilde{y}(x))^{-1}}_{m \times n} \cdot \underbrace{f_x(x, \tilde{y}(x))}_{m \times n} \quad \in K^{m \times n}$$

$\mathrm{GL}(n, K) := \{A \in L(K^n, K^n) \mid A \text{ regulär}\}$ ist die allgemeine lineare Gruppe .

Lemma 27.6

a) Sei $A \in \mathrm{GL}(n, K)$, $B \in L(K^n, K^n)$, $\|B - A| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$
   $\Rightarrow B \in \mathrm{GL}(n, K)$

b) $\varphi : \mathrm{GL}(n, K) \to \mathrm{GL}(n, K)$ mit $\varphi(A) = A^{-1}$ ist stetig.

Hinweis: a) liefert, dass $\mathrm{GL}(n, K) \subset L(K^n, K^n)$ offen ist

Beweis (Lemma 3.6).
zu (a) Es ist

$$\|\mathrm{id} - A^{-1}B\| = \|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\| < 1$$
$$|(\mathrm{id} - A^{-1}B)x| \leq \|\mathrm{id} - A^{-1}B\| \cdot |x| < |x| \quad \forall x \neq 0 \tag{3}$$

Sei $A^{-1}Bx = 0$ für $x \neq 0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} \lightning \Rightarrow C := A^{-1}B$ regulär
$\Rightarrow B = AC$ regulär

zu (b) Fixiere $A \in \mathrm{GL}(n,K)$ und betrachte $B \in \mathrm{GL}(n,K)$ mit

$$\|B - A\| \leq \frac{1}{2\|A^{-1}\|} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\xRightarrow{\forall y \in K^n}\ & |B^{-1}y| = |A^{-1}AB^{-1}y| \leq \|A^{-1}\||AB^{-1}y| = \|A^{-1}\||(A-B)B^{-1}y + y| \\
& \leq \|A^{-1}\| \left(\|A-B\||B^{-1}y| + |y|\right) \overset{(4)}{\leq} \frac{1}{2}|B^{-1}y| + \|A^{-1}\||y| \\
\Rightarrow\ & |B^{-1}y| \leq 2\|A^{-1}\||y| \ \forall y \in K^n \\
\Rightarrow\ & \|B^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\| \\
\Rightarrow\ & \|\varphi(B) - \varphi(A)\| = \|B^{-1} - A^{-1}\| = \|B^{-1}(A-B)A^{-1}\| \\
& \leq \|B^{-1}\| \cdot \|A - B\|\|A^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|^2|A - B| \\
\Rightarrow\ & \lim_{B \to A} \varphi(B) = \varphi(A) \\
\Rightarrow\ & \varphi \text{ stetig in } A \xRightarrow{A \text{ beliebig}} \text{Behauptung}
\end{aligned}$$

□

Beweis (Theorem 3.5). Setze $\varphi(x,y) := y - f_y(x_0,y_0)^{-1}f(x,y)\ \forall (x,y) \in D$

a) Offenbar existiert die partielle Ableitung $\varphi_y(x,y) = \mathrm{id}_{K^m} - f_y(x_0,y_0)^{-1}f_y(x,y)\ \forall (x,y) \in D$

Da f_y stetig in (x_0,y_0) und $\varphi(x_0,y_0) = 0$ existiert konvexe Umgebung $U(x_0,y_0) \subset D$ von (x_0,y_0) und

$$\|\varphi_y(x,y)\| < \frac{1}{2} \quad \forall (x,y) \in U(x_0,y_0)$$

Für feste (x,y), $(x,z) \in U(x_0,y_0)$ liefert der Schrankensatz ein $\tau \in (0,1)$ mit

$$|\varphi(x,y) - \varphi(x,z)| \leq \|\varphi_y(x, \underbrace{z + \tau(y-z)}_{\in U(x_0,y_0)})\||y - z| \leq \frac{1}{2}|y - z| \quad \forall (y,z),\ (x,z) \in U(x_0,y_0) \tag{5}$$

Nun existiert $\rho > 0 : \overline{B_\rho(x_0) \times B_\rho(y_0)} \subset U(x_0,y_0)$.

Da f stetig, $f(x_0,y_0) = 0$ existiert $r > 0$:

$$\|f_y(x_0,y_0)^{-1}f(x,y_0)\| < \frac{1}{2}\rho \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ & |\varphi(x,y) - y_0| \leq |\varphi(x,y) - \varphi(x,y_0)| + |\varphi(x,y_0) - y_0| \\
& \overset{(5)}{\leq} \frac{1}{2}|y - y_0| + \|f_y(x_0,y_0)^{-1}\| \cdot |f(x,y_0)| < \rho \quad \forall x \in B_r(x_0),\ y \in \overline{B_\rho(y_0)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \varphi(x,\cdot\,) : \overline{B_\rho(y_0)} \to B_\rho(y_0) \quad \forall x \in B_r(x_0) \tag{6}$$

und $\varphi(x,\cdot\,)$ ist kontraktiv nach (5) $\forall x \in B_r(x_0)$

$\xRightarrow{\text{Satz 3.16}} \forall x \in B_r(x_0)\ \exists!$ Fixpunkt: $y = \tilde{y}(x) \in \overline{B_\rho(y_0)}$ mit

$$\tilde{y}(x) = \varphi(x, \tilde{y}(x)) \tag{7}$$

Offenbar (7) $\Leftrightarrow f_y(x_0,y_0)^{-1}f(x,\tilde{y}(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x,\tilde{y}(x)) = 0$

Wegen (6) und (7) ist $\tilde{y}(x) \in B_\rho(y_0)$

$\Rightarrow$ Behauptung (1) bis auf Stetigkeit von $\tilde{y}$

b) Zeige: $\tilde{y}$ ist stetig. Für $x_1, x_2 \in B_r(x_0)$ gilt:

$$\begin{aligned}|\tilde{y}(x_2) - \tilde{y}(x_1)| &\overset{(7)}{=} |\varphi(x_2, \tilde{y}(x_2)) - \varphi(x_1, \tilde{y}(x_1))| \\ &\leq |\varphi(x_2, \tilde{y}(x_2)) - \varphi(x_2, \tilde{y}(x_1))| + |\varphi(x_2, \tilde{y}(x_1)) - \varphi(x_1, \tilde{y}(x_1))| \\ &\underset{\text{Def. } \varphi}{\overset{(5)}{\leq}} \frac{1}{2}|\tilde{y}(x_2) - \tilde{y}(x_1)| + \|f_y(x_0, y_0)^{-1}\| \cdot |f(x_2, \tilde{y}(x_1)) - f(x_1, \tilde{y}(x_1))\|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; |\tilde{y}(x_2) - \tilde{y}(x_1)| \leq 2\|f_y(x_0, y_0)^{-1}\||f(x_2, \tilde{y}(x_1)) - f(x_1, \tilde{y}(x_1))| \tag{8}$$

Da f stetig folgt $\tilde{y}$ stetig auf $B_r(x_0)$

c) Zeige 2): Fixiere $x \in B_r(x_0)$, $z \in K^n$

Da f diffbar und $\tilde{y}$ Lösung, gilt für $|t|$ klein nach Satz 2.1 b):

$$\begin{aligned}0 &= f(x + t \cdot z, \tilde{y}(x + tz)) - f(x, \tilde{y}(x)), \xrightarrow{t \to 0} 0 \\ &= Df(x, \tilde{y}) \cdot \begin{pmatrix} tz \\ \tilde{y}(x + tz) - \tilde{y}(x) \end{pmatrix} + \underbrace{r(t)}_{\xrightarrow{t \to 0} 0} \cdot \begin{pmatrix} tz \\ \tilde{y}(x + tz) - \tilde{y}(x) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; 0 = f_x(x, \tilde{y}(x)) \cdot (tz) + f_y(x, \tilde{y}(x)) \cdot (\tilde{y}(x + tz) - \tilde{y}(x)) + \underbrace{\underbrace{r(t)}_{\to 0} \cdot \begin{pmatrix} tz \\ \tilde{y}(x + tz) - \tilde{y}(x) \end{pmatrix}}_{=:R(t)} \tag{9}$$

Wegen (8) existiert $c > 0$:

$$\begin{aligned}|\tilde{y}(x + tz) - \tilde{y}(x)| &\leq c|f(x + tz, \tilde{y}(x)) - f(x, \tilde{y}(x))| = c|f_x(x, \tilde{y}(x)) \cdot (tz) + o(t)| \\ &\leq c\left(\|f_x(x, \tilde{y}(x))\| \cdot |z| \cdot |t| + o(1) \cdot |t|\right) \\ &\leq c\left(\|f_x(x, \tilde{y}(x))\| \cdot |z| + o(1)\right)|t| \quad \text{für } |t| \text{ klein}\end{aligned}$$

$\Rightarrow R(t) = o(t)$, $t \to 0$

Wegen $f_y(x_0, \tilde{y}(x_0)) \in \mathrm{GL}(m, K)$, f_y stetig, $\tilde{y}$ stetig

$\xRightarrow{\text{Lemma 3.6}}$ für eventuell kleineres $r > 0$ als oben:

$$f_y(x, \tilde{y}(x)) \in \mathrm{GL}(m, K) \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

$$\overset{(9)}{\Longrightarrow} \; \tilde{y}(x + tz) - \tilde{y}(x) = -f_y(x, \tilde{y}(x))^{-1} \cdot f_x(x, \tilde{y}(x)) \cdot (tz) + o(t), \; t \to 0$$

$\Rightarrow$ $\tilde{y}'(x, z)$ existiert $\forall z \in K^n$ mit

$$\tilde{y}'(x, z) = -\underbrace{f_y(x, \tilde{y}(x))^{-1} \cdot f_x(x, \tilde{y}(x))}_{\text{stetig bezüglich } x, \text{ da } f \in C^1 \text{ nach Lemma 3.6}} \cdot z \quad \forall z \in K^n \tag{10}$$

$\Rightarrow$ Alle partiellen Ableitungen $\tilde{y}_{x_j}$ sind stetig auf $B_r(x_0)$

$\xRightarrow{\text{Theorem 4.14}}$ $\tilde{y}$ stetig diffbar auf $B_r(x_0)$

Wegen $\tilde{y}'(x) \cdot z = \tilde{y}'(x; z)$ folgt aus (10) die Formel für $\tilde{y}'(t)$ □

Hinweis: Sei $f = (f^1, \ldots, f^m) : D \subset K^n \times K^n \to K^m$, D offen und seien alle partiellen Ableitungen $f^i_{y_j}$

stetig in y (d.h. $y \to f^i_{y_j}(x,y)$ stetig für x fest $\forall i = 1, \dots, m$)

$$\xRightarrow{\text{Theorem 4.14}} f_y(x,y) = \begin{pmatrix} f^1_{y_1}(x,y) & \dots & f^1_{y_m}(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ f^m_{y_1}(x,y) & \dots & f^m_{y_m}(x,y) \end{pmatrix}$$

Analog erhält man $f_x(x,y) \in K^{m \times n}$.

Falls alle $f^j_{x_j}$, $f^i_{y_l}$ stetig sind in x und y
$\Rightarrow f$ diffbar mit

$$f'(x,y) = \big(f_x(x,y) \mid f_y(x,y)\big)$$

Beispiel 27.7
Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2(1-x^2) - y^2 \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Offenbar ist

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x(1-x^2) - 2x^3 = 2x - 4x^3 \\ f_y(x,y) &= -2y \end{aligned}$$

Suche Lösungen von $f(x,y) = 0$

- $y_0 = 0$: $f_y(x_0, 0) = 0$ nicht regulär $\Rightarrow$ Theorem nicht anwendbar
- $y_0 \neq 0$: $f_y(x_0, y_0) \neq 0$, also regulär.
  Sei $f(x_0, y_0) = 0 \xRightarrow{\text{Theorem 3.5}}$ anwendbar, z.B. $(x_0, y_0) = (\frac{1}{3}, \frac{2\cdot\sqrt{2}}{9})$ ist Nullstelle von f

  $\Rightarrow \exists r, \rho > 0$, Funktion $\tilde{y} : f(x, \tilde{y}(x)) = 0 \ \forall x \in B_r(\frac{1}{3})$
  $\tilde{y}(\frac{1}{3}) = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{9}$ und $\tilde{y}(x)$ ist einzige Lösung um $B_\rho(\frac{2\sqrt{2}}{9})$

  $$\begin{aligned} \tilde{y}'\left(\frac{1}{3}\right) &= -f_y\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{9}\right)^{-1} \cdot f_x\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{9}\right) \\ &= -\left(-\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{27}\right) = \frac{7}{6\sqrt{2}} \approx 0{,}8 \end{aligned}$$
- $y_0 = 0$, $x_0 = 1$: hier ist $f_x(1,0) = -2$, also regulär

  $\xRightarrow{\text{Theorem 3.5}} \exists$ lokale Lösung $\tilde{x}(y)$: $f(\tilde{x}(y), y) = 0 \ \forall y \in B_{\tilde{r}}(0)$ und $\tilde{x}'(0) = 0$
- $y_0 = 0$, $x_0 = 0$: $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ nicht regulär

  $\xRightarrow{\text{Theorem 3.5}}$ in keiner Variante Anwendbar.

■ **Beispiel 27.8**

Betrachte nicht-lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2e^u + vw &= 5 \\ v\cos u - 6u + 2w &= 7 \end{aligned} \tag{11}$$

Offenbar $(u, v, w) = (0, 1, 3)$ Lösung.

Faustregeln: 2 Gleichungen, 3 Unbekannte $\Rightarrow$ „viele" Lösungen, 1 Freiheitsgrad
$\Rightarrow$ Suche Lösung der Form $(u, v) = g(w)$ nahe obiger Lösung für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

Betrachte mit $x := w$, $g = (y_1, y_2) := (u, v)$ Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{y_1} + y_2 x - 5 \\ y_2 \cos y - 1 - 6y_1 + 2x - 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ f_y(x, y) = \begin{pmatrix} 2e^{y_1} & x \\ -y_2 \sin y_1 - 6 & \cos y_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f_y((3, 0, 01)) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ regulär, det} = 20$$

$\xRightarrow{\text{Theorem 3.5}}$ $\exists$ Funktion $g : (3 - r, 3 + r) \to B_\rho((0, 1))$ mit

$$f(x, g(x)) = 0, \qquad\qquad g(3) = (0, 1)$$

Insbesondere $(u, v, w) = (g(w), w)$ sind weitere Lösungen von (11).

$$g'(3) = -f_y(3, (0, 1))^{-1} \cdot f_(3, (0, 1)) = - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Zurück zu Frage 1: Wann hat $f : D \subset K^n \to K^n$ eine diffbar Umkehrfunktion?

Betrachte Gleichung $f(x) - y = 0$. Falls diese Gleichung nach x auflösbar, d.h. $\exists g : K^n \to K^n$ mit $f(g(y)) = y\ \forall y \Rightarrow g = f^{-1}$

Theorem 27.9 (Satz über inverse Funktionen)

Sei $f : U \subset K^n \to K^n$, U offen, f stetig diffbar, $f'(x)$ regulär für ein $x_0 \in U$

$\Rightarrow$ Es existiert eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von x_0, sodass $V_0 := f(U_0)$ offene Umgebung von $y_0 := f(x_0)$ ist, und die auf U_0 eingeschränkte Abbildung $f : U_0 \to V_0$ ist Diffeomorphismus.

Satz 27.10 (Ableitung der inversen Funktion)
Sei $f : D \subset K^n \to K^n$, D offen, f injektiv und diffbar, f^{-1} diffbar in $y \in \operatorname{int} f(D)$

$$\Rightarrow \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = f'\left(f^{-1}(y)\right)^{-1} \tag{12}$$

(bzw. $(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1}$ falls $y = f(x)$)

Spezialfall$n = m = 1$: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Beweis (Theorem 3.9). Betrachte $\tilde{f} : D \times K^n \to K^n$ mit $\tilde{f}(x, y) = f(x) - y$.

Offenbar ist $\tilde{f}$ stetig, $\tilde{f}(x_0, y_0) = 0$ und $\tilde{f}_x(x, y) = f'(x)$, $f_y(x, y) = -\mathrm{id}_{K^n}$ $\forall (x, y)$

$\Rightarrow$ $\tilde{f}_x$, $\tilde{f}_y$ stetig $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ stetig diffbar

Nach Voraussetzung $\tilde{f}_x(x_0, y_0) = f'(x_0)$ regulär

$\xRightarrow{\text{Theorem 3.5}}$ $\exists r, \rho > 0$: $\forall y \in B_r(y_0)$ $\exists! x = \tilde{x}(y) \in B_y(x_0)$ mit $0 = \tilde{f}(\tilde{x}(y), y) = f(\tilde{x}(y)) - y$

$\Rightarrow$ lokal inverse Funktion $f^{-1} = \tilde{x}$ existiert auf $B_r(y_0) =: V_0$ und ist stetig diffbar.

Setzte $U_0 := f^{-1}(V_0) = \underbrace{\{x \in D \mid f(x) \in V_0\}}_{\text{offen, da } f \text{ stetig}} \cap B_\rho(x_0)$ offene Umgebung von x_0

$\Rightarrow$ $f(U_0) = V_0 \Rightarrow f : U_0 \to V_0$ ist Diffeomorphismus □

Beweis (Satz 3.10). f^{-1} existiert, f diffbar, f^{-1} diffbar in $y = f(x)$, $x \in D$.

Wegen $f(f^{-1}(y)) = y$, $f^{-1}(f(x)) = x$ folgt

$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = \mathrm{id}_{K^n}, \qquad (f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y)) = \mathrm{id}_{K^n}$$

$\Rightarrow f'(f^{-1}(y))^{-1} = (f^{-1})(y)$ □

Als Folgerung eine globale Aussage:

Satz 27.11
Sei $f : D \subset K^n \to K^n$, D offen, f stetig diffbar, $f'(x)$ regulär $\forall x \in D$

$\Rightarrow$
(a) (Satz über offene Abbildungen)
$f(D)$ ist offen
(b) (Diffeomorphiesatz)
f injektiv $\Rightarrow$ $f : D \to f(D)$ ist Diffeomorphismus

Beweis.

zu a) Sei $y_0 \in f(D) \Rightarrow x_0 \in D : y_0 = f(x_0)$

$\xRightarrow{\text{Theorem 3.9}}$ $\exists$ Umgebung $V_0 \subset f(D)$ von y_0

$\xRightarrow{y_0 \text{ beliebig}}$ $f(D)$ offen

zu b) Offenbar existiert $f^{-1} : f(d) \to D$

Lokale Eigenschaften wie Stetigkeit und diffbarkeit folgen aus Theorem 3.9 □

■ Beispiel 27.12

Sei $f(x) = a^x \ \forall x \in \mathbb{R} \ (a > 0,\ a \neq 1)$

$\xRightarrow{\text{Beispiel 2.18}} f'(x) = a^x \cdot \ln a,\ f'$ stetig

Offenbar $f^{-1}(y) = \log_a y \ \forall y > 0,\ f'(x) \neq 0$, d.h. regulär $\forall x \in \mathbb{R}$

$\xRightarrow[f \text{ injektiv}]{\text{Satz 3.11}} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{<0}$ ist Diffeomorphismus und

$$(\log_a y)' = (f^{-1})(y) \overset{y=f(x)}{=} \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a} \quad \forall y > 0$$

(vgl. Beispiel 2.19)

■ Beispiel 27.13

Sei $f(x) = \tan x \ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\xRightarrow{\text{Beispiel 2.21}} (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0 \ \forall x$, stetig

$\xRightarrow{\text{Satz 3.11}} \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ist Diffeomorphismus und

$$(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \cos^2 x = \frac{1}{\tan^2 x + 1} = \frac{1}{1 + y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

■ Beispiel 27.14 (Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$)

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad\qquad y = r \cdot \sin\varphi$$

Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Offenbar stetig diffbar auf $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ mit

$$f'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Wegen $\det f'(x) = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$ ist $f'(r, \varphi)$ regulär $\forall r, \varphi \in (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R})$

$\xRightarrow{\text{Theorem 3.9}} f$ ist lokal Diffeomorphismus, d.h. für jedes $(r_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ existiert Umgebung U_0, sodass $f : U_0 \to V_0 := f(U_0)$ Diffeomorphismus ist.

Für Ableitung $(f^{-1})'(x, y)$ mit $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ gilt mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\left(f^{-1}\right)'(x, y) = f'(r, \varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \neq 0$$

beachte: $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist kein Diffeomorphismus, da f nicht injektiv (f periodisch in φ),

aber: $f : \mathbb{R}_{>0} \times (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{Strahl in Richtung } \varphi_0\}$ ist Diffeomorphismus für beliebiges $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ nach Satz 3.11 (b).

folglich: Voraussetzung f injektiv in Satz 3.11 (b) ist wesentlich.

28. Funktionsfolgen

Betrachte $f_k : D \subset K^n \to K^m$, D offen, f_k diffbar für $k \in \mathbb{N}$

Frage:: Wann konvergiert $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegen diffbare Funktion f mit $f_k' \to f'$

Wiederholung: alle f_k stetig, $f_k \to f$ gleichmäig auf $D \xRightarrow{\text{Satz 2.19}} f$ stetig

- **Beispiel**

  Sei $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \frac{\sinh^2 x}{k}$.

  Wegen $|f_k(x)| \leq \frac{1}{k}$ $\forall k \Rightarrow f_k \to f$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ für $f = 0$

  Aber $f_k'(x) = k \cdot \cosh^2 x \not\to f'(x) = 0$

- **Beispiel 28.1**

  Sei $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}}$, wobei $f(x) = |x|$

  $\Rightarrow$ alle f_k diffbar, $f_k \to f$ gleichmäßig auf $[-1, 1]$ und $(|f_k(x) - f(x)| \leq f_k(0)\frac{1}{\sqrt{k}}$ aber f nicht diffbar

- **Beispiel 28.2**

  Sei $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \frac{\sin kx}{x}$, $\Rightarrow f_k \to f(x) = 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ (da $|f_k(x)| \leq \frac{1}{k} \forall x \in \mathbb{R}$)

  aber $f_k^{'}(x) = \cos kx \not\to f^{'}(x) = 0$

> **Satz 28.3 (Differentiation bei Funktionsfolgen)**
> Sei $f_K : D \subset K^n \to K^m$, D offen, beschränkt, f_k diffbar $\forall k$ und
>
> (a) $f_k' \to: g$ gleichmäßig auf $B_r(x) \subset D$
>
> (b) $\{f_k(x_0)\}_k$ konvergiert für ein $x_0 \in B_r(x)$
>
> $\Rightarrow f_k \to: f$ gleichmäßig auf $B_r(x)$ und f ist diffbar auf $B_r(x)$ mit
>
> $$f_k'(y) \to f'(y) \quad \forall y \in B_r(x)$$

Hinweis: Betrachte $f_k(x) := \frac{\sin x}{k} + k$ auf $\mathbb{R}$ um zu sehen ($g = 0$), dass Voraussetzung (b) wichtig ist.

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_k(x_0) - f_l(x_0)| < \varepsilon \quad \forall k, l \geq k_0 \text{ und} \tag{1}$$

$$\|g(y) - f_k^y\| < \varepsilon, \|f_k^{'}(y) - f_k^{'}(y)\| < \varepsilon \forall k, l \geq k_0, y \in B_r(x) \tag{2}$$

Weiter gilt (eventuell für größeres k_0) $\|g(z) - f_k'(z)\| < \varepsilon$ und

$$\|f_k'(y) - f_l'(y)\| < \varepsilon \quad \forall k, l \geq k_0,\ z, y \in B_r(x) \tag{3}$$

Schrankensatz: $\forall z, y \in B_r(x)$, $k, l \geq k_0$ $\exists \xi \in [y, z]$ mit

$$\|(f_k(y) - f_l(y)) - (f_k(z) - f_l(z))\| \leq \|f_k'(\xi) - f_l'(\xi)\| \cdot |y - z| \leq \varepsilon |y - z| < 2r \cdot \varepsilon \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad |f_k(y) - f_l(y)| &\leq |\big(f_k(y) - f_l(y)\big) - \big(f_k(x_0) - f_l(x_0)\big)| + |f_k(x_0) - f_l(x_0)| \\ &\leq 2r\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(2r + 1) \quad y \in B_r(x),\ k, l \geq k_0 \end{aligned} \tag{5}$$

$\Rightarrow \{f_k(y)\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist CF in K^m $\forall y$
$\Rightarrow f_k(y) \xrightarrow{k\to\infty}: f(y)$ $\forall y \in B_r(x)$

Mit $l \to \infty$ in (5): $f_k \to f$ gleichmäßig auf $B_r(x)$

Fixiere $\tilde{x} \in B_r(x)$, $k = k_0$. Dann liefert $l \to \infty$ in (4)

$$|f(y) - f(\tilde{x}) - \big(f_k(y) - f_k(\tilde{x})\big)| \leq \varepsilon |y - \tilde{x}| \quad \forall y \in B_r(x)$$

Da f_k diffbar $\exists \rho = \rho(\varepsilon) > 0$ mit

$$|f_k(y) - f_k(\tilde{x}) - f_k'(\tilde{x}) \cdot (y - \tilde{x})| \leq \varepsilon |y - \tilde{x}| \quad \forall y \in B_\rho(\tilde{x}) \subset B_r(x)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad |f(y) - f(\tilde{x}) - g(\tilde{x}) \cdot (y - \tilde{x})| &\leq |f(y) - f(\tilde{x})| + |f_k(y) - f_k(\tilde{x}))| \\
&\quad + |f_k(y) - f_k(\tilde{x}) - f_k'(\tilde{x}) \cdot (y - \tilde{x})| \\
&\quad + |f_k'(\tilde{x}) \cdot (y - \tilde{x}) - g(\tilde{x})(y - \tilde{x})| \\
&\leq \varepsilon|y - \tilde{x}| + \varepsilon|y - \tilde{x}| + \varepsilon|y - \tilde{x}| = 3\varepsilon|y - \tilde{x}| \quad \forall y \in B_\rho(\tilde{x})
\end{aligned} \tag{6}$$

Beachte: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \rho > 0$ und mit (6)

$\Rightarrow$ $f(y) - f(\tilde{x}) - g(\tilde{x}) \cdot (y - \tilde{x}) = o(|y - \tilde{x}|)$, $y \to \tilde{x}$

$\Rightarrow$ $f(\tilde{x}) = g(\tilde{x}) \xRightarrow{\tilde{x} \text{ beliebig}}$ Behauptung $\square$

28.1. Anwendung auf Potenzreihen

Sei $f : B_R(x_0) \subset K \to K$ gegeben durch eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \forall x \in B_{\underbrace{R}_{\text{Konvergenzradius}}}(x_0) \tag{7}$$

Wiederholung: $R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$

Frage: Ist f diffbar und kann man gliedweise differenzieren?

Satz 28.4
Sei $f : B_r(x_0) \subset K \to K$ Potenzreihe gemäß (7)
$\Rightarrow f$ ist diffbar auf $B_r(x_0)$ mit

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} \quad \forall x \in B_r(x_0) \tag{8}$$

Folgerung 28.5
Sei $f : B_R(x_0) \subset K \to K$ Potenzreihe gemäß (7)

$\Rightarrow f \in C^\infty(B_R(x_0), K)$ und

$$a_k = \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)})(x_0) \tag{9}$$

(d.h die Potenzreihe stimmt mit der Taylorreihe von f in x_0 überein)

Beweis. k-fache Anwendung von Satz 4.4 liefert $f \in C^k(B_r(x_0), K)\ \forall k \in \mathbb{N}$
$\overset{(8)}{\Longrightarrow} f'(x) = a_1,\ f''(x_0) = 2a_k,\ \ldots$ rekursiv folgt (9). □

Beweis (Satz 4.4). Betrache die Partialsummen

$$f_k(x) := \sum_{j=0}^{k} a_j(x - x_0)^j \quad \forall x \in B_R(x_0)$$

$\Rightarrow f_k(x_0) \xrightarrow{k\to\infty} f(x_0)$ und f_k diffbar mit

$$f_k'(x) = \sum_{j=1}^{k} j a_j (x - x_0)^{j-1} \quad \forall x \in B_R(x_0)$$

Wegen

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{(k+1)|a_{k+1}|} = \limsup \sqrt[k]{k\left(1+\frac{1}{k}\right)} \cdot \left(\sqrt[k+1]{|a_{k+1}|}\right)^{\frac{k+1}{k}} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R}$$

hat die Potenzreihe

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

den Konvergenzradius R

$\Rightarrow$ Reihe g konvergiert gleichmäßig auf $B_r(x_0)\ \forall r \in (0, R)$ (vgl. 13.1), d.h. $f_k' \to g$ gleichmäßig auf $B_r(x_0)$

$\overset{\text{Satz 4.3}}{\Longrightarrow} f$ ist diffbar auf $B_r(x_0)$ mit (8) auf $B_r(x_0)$.

Da $r \in (0, R)$ beliebig, folgt die Behauptung. □

■ **Beispiel 28.6**

Es gilt

$$\ln(1+x) = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \forall x \in (-1, 1) \subset \mathbb{R} \tag{10}$$

Beweis. $f(x)$ sei Potenzreihe in (10), hat Konvergenzradius $R = 1$, $x_0 = 0$
$\overset{\text{Satz 4.4}}{\Longrightarrow} f$ diffbar auf $(-1, 1)$ und

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} \qquad \text{geometrische Reihe}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\ln(1+x) = \frac{1}{1+x} = f'(x)$$
$$f(x) = \ln(1+x) + \text{const}$$

Wegen $f(0) = 0 = \ln 1 \Rightarrow f(x) = \ln(1+x)\ \forall x \in (-1,1)$, d.h. (10) gilt. $\square$

Anhang

Anhang A: Listen

A.1. Liste der Theoreme

A.2. Liste der benannten Sätze