Maß und Integral WS2018/19

Dozent: Prof. Dr. Rene Schilling

24. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 2
2 Sigma-Algebren 3

Anhang **5**

Index **5**

Vorwort

1. Einleitung

messen: Längen, Flächen, Volumina, $\mathbb{N} \to$ zählen, Wahrscheinlichkeiten, Energie $\to$ Integrale, ...
Wenn man ein Integral hat: $\int_{t_0}^{t} F(t)\mathrm{d}t$, also wird das d$t$ durch ein Maß $\mu(\mathrm{d}t)$ ersetzt.
Wir messen Mengen:

$$\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty] \text{ mit } \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$$

Dabei ist:

- X eine beliebige Grundmenge
- $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$ die Potenzmenge von X
- $F \to \mu(F) \in [0, \infty]$

Konvention:

- Familien von Mengen: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \dots, \mathcal{R}$
- Mengen: A, B, X
- Maße: $\mu, \lambda, \nu, \rho, \delta$

■ **Beispiel 1.1 (Flächenmessung)**

$$\begin{aligned} \mu(F) = g \cdot h &= \mu(F_1) + \mu(F_2) + \mu(F_3) \\ &= g' \cdot h + h' \cdot g'' + h'' \cdot g'' \\ &= \dots \stackrel{!}{=} gh \end{aligned}$$

F_1, F_2, F_3 disjunkt bzw. nicht überlappend!
$\mu(F) = \mu(\Delta_1) + \mu(\Delta_2)$ mit $\mu(\Delta) = 0.5gh$
Allgemein für Dreiecke:
$\mu(\Delta) = 0.5gh \stackrel{!}{=} 0.5g'h'$ und das ganze ist wohldefiniert!

Dreiecke lassen allgemeine Flächenberechnung zu - Triangulierung!

$$F = \biguplus_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n \text{ (disjunkte Vereinigung } \Delta_i \cap \Delta_k = \emptyset \quad k \neq i)$$

2. Sigma-Algebren

Ziel: Charakterisierung der Definitionsgebiete von Maßen.

Definition 2.1 (σ-Algebra, messbar)
Eine σ-Algebra über einer beliebigen Grundmenge $X \neq \emptyset$ ist eine Familie von Mengen in $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$:

- (S1): $X \in \mathcal{A}$
- (S2): $A \in \mathcal{A} \to A^C = X \setminus A \in \mathcal{A}$
- (S3): $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt messbar .

Satz 2.2 (Eigenschaften einer σ-Algebra)
Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X.

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

(c) $(A_n)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

(d) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

(e) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

Beweis. (a) $\emptyset = X^C \in \mathcal{A}$

(b) $A_1 = A$, $A_2 = B$m $A_3 = A_4 = ... = \emptyset \Rightarrow A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

(c) $A_n \in \mathcal{A} \overset{S2}{\Rightarrow} A_n^C \in \mathcal{A} \overset{S3}{\Rightarrow} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^C \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^C\right)^C \in \mathcal{A}$

(d) wie (b)

(e) $A \setminus B = A \cap B^C \in \mathcal{A}$ □

Fazit: Auf einer σ-Algebra kann man alle üblichen Mengenoperationen abzählbar oft durchführen ohne $\mathcal{A}$ zu verlassen!

■ **Beispiel 2.3**
$X \neq \emptyset$ Menge, $A, B \subset X$

(a) $\mathcal{P}(X)$ ist eine σ-Algebra (größtmögliche)

(b) $\{\emptyset, X\}$ ist eine σ-Algebra (kleinstmögliche)

(c) $\{\emptyset, A, A^C, X\}$ ist eine σ-Algebra

(d) $\{\emptyset, B, X\}$ ist eine σ-Algebra, wenn $B = \emptyset$ oder $B = X$

(e) $\mathcal{A} = \{A \subset X \mid \#A \leq \#\mathbb{N} \text{ oder } \#A^C \leq \#\mathbb{N}\}$ ist eine σ-Algebra

Anhang

Index

σ-Algebra, 2

messbar, 2