Wichtige Methoden der Analysis

H. Haustein, P. Lehmann

1. August 2018

1 Wichtige Ungleichungen

1. geometrisches/arithmetisches Mittel

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

2. Bernoulli-Ungleichung

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \, \forall x \geq -1, \alpha > 1$$
$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \, \forall x \geq -1, 0 < \alpha < 1$$

3. Youn'sche Ungleichung: $p, q \in \mathbb{R}, p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \, \forall a, b \geq 0$$

4. Hölder'sche Ungleichung: $p, q \in \mathbb{R}, p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

5. Minkowski-Ungleichung: $p \in \mathbb{R}, p > 1$

$$\big(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \big)^{\frac{1}{p}} \leq \big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \big)^{\frac{1}{p}} + \big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \big)^{\frac{1}{p}} \, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

2 Grenzwerte berechnen

1. Kann man die Grenze in die Funktion einsetzen und ausrechnen, ohne dass es zu Problemen kommt?

2. Geschicktes Ausklammern im Nenner, dann kürzen im Zähler.

3. Regel von l'Hospital (mehrfach) verwenden, klappt aber nur, wenn Zähler und Nenner differenzierbar sind:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3 Reihen

1. Cauchykriterium: undersuche Differenz von aufeinanderfolgenden Partialsummen, müssen kleiner als ϵ sein (Konvergenz für Folgen eigentlich)

2. eines (oder mehrere) der folgenden Kriterien prüfen:
   - *Majorantenkriterium* $\|x_k\| \leq \alpha_k \,\forall k \geq k_0, \sum_k \alpha_k$ konvergent $\Rightarrow \sum_k \|x_k\|$ konvergent
   - *Minorantenkriterium* $\|x_k\| \geq \alpha_k \,\forall k \geq k_0, \sum_k \alpha_k$ divergent $\Rightarrow \sum_k \|x_k\|$ divergent
   - *Quotientenkriterium* $\frac{\|x_{k+1}\|}{\|x_k\|} \leq q < 1 \,\forall k \geq k_0 \Rightarrow \sum_k \|x_k\|$ konvergiert
   - *Wurzelkriterium* $\sqrt[k]{\|x_k\|} \leq q < 1 \,\forall k \geq k_0 \Rightarrow \sum_k \|x_k\|$ konvergiert
   - *Monotonie-Kriterium* Eine Reihe positiver Summanden konvergiert genau dann gegen einen Grenzwert, wenn ihre Partialsummen nach oben beschränkt sind
   - *Leibnitz-Kriterium* $\sum_k (-1)^k x_k$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ und $x_k \geq 0$ monoton fallend und $x_k \leq 0$ monoton steigend $\Rightarrow \sum_k (-1)^k x_k$ konvergiert

3. *Konvergenzradius* Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ dann

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \text{ wobei } 0 = \frac{1}{\infty}, \frac{1}{0} = \infty$$

   - $|z - z_0| < R \Rightarrow$ absolut konvergent
   - $|z - z_0| > R \Rightarrow$ divergent
   - $|z - z_0| = R \Rightarrow$ keine Aussage,z bestimmen (Fallunterscheidung!), in Reihe einsetzen und obige Kriterien testen

4 Stetigkeit

1. wenn funktioniert, Rechenregeln und Beispiele aus Vorlesung (elementare Funktionen sind stetig)

2. Summen, Produkte, Komposition, Skalarmultiplikation von/mit stetigen Funktionen sind wieder stetig

3. wenn Rechenregel nicht funktionieren, dann über Folgenstetigkeit argumentieren

$$f(x_n) \to f(x_0) \forall \text{ Folgen } x_n \to x_0 \text{ in } D$$

5 Partialbruchzerlegung

1. Bestimmung der Nullstellen des Nenner-Polynoms

2. Umschreiben des Polynoms (mit 3 Nullstellen n_1, n_2, n_3):

$$\frac{f}{(x - n_1)(x - n_2)(x - n_3)} = \frac{A}{x - n_1} + \frac{B}{x - n_2} + \frac{C}{x - n_3}$$

3. kommt eine Nullstelle doppelt vor, so ergibt sich

$$\frac{f}{(x - n_1)^2} = \frac{A}{x - n_1} + \frac{B}{(x - n_1)^2}$$

4. bei komplexen Nullstellen:

$$\frac{A}{a - ib - z} + \frac{B}{a + ib - z} \text{ in die Form } \frac{C + Dz}{(a - z)^2 + b^2}$$

5. Multiplikation beider Seiten mit $x - n_1$, Kürzen auf der linken Seite nicht vergessen!
6. Einsetzen: $x = n_1$, Brüche mit B und C werden zu 0, linke Seite $= A$
7. diesem Schritt mit n_2 und n_3 wiederholen

6 Ableitung

6.1 (normale) Ableitung

1. Rechenregeln verwenden:

$$\begin{aligned}(f \pm g)' &= f' \pm g' \\ (cf)' &= c \cdot f' \\ (x^n)' &= nx^{n-1} \\ (fg)' &= f' \cdot g + f \cdot g' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \\ f(g(x))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ (\ln f)' &= \frac{f'}{f}\end{aligned}$$

2. bei mehrdimensionalen Funktionen: komponentenweise ableiten
3. affin lineare Funktionen sind diffbar $Ax + b$ (folgt aus Definition diffbar Kap. 17)

6.2 Richtungsableitung und partielle Ableitung

1. Berechnung der Richtungsableitung von f in x in Richtung v:

$$\mathrm{D}_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

2. bei partieller Ableitung: Behandeln aller Variablen, die nicht abzuleiten sind, als Konstanten

7 Integration

7.1 partielle Integration

$$\int f' \cdot g \, \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f \cdot g' \, \mathrm{d}x$$

Beispiel:

$$\int x \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x & g(x) &= \ln(x) \\ f(x) &= \frac{1}{2}x^2 & g(x)' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2}x \, \mathrm{d} \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2\end{aligned}$$

7.2 Integration durch Substitution

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\phi(x))$$

Beispiel: Mit der Substitution $x = t - 1$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ ist

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t = \arctan(t)$$
$$= \arctan(x+1)$$

7.3 Mehrfachintegrale

$$\int_{X\times Y\times Z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_X \int_Y \int_Z f\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

7.4 Der Transformationssatz

1. $f : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar
2. $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to V$ Diffeomorphismus

$$\int_V f(x)\,\mathrm{d}x = \int_U f(\phi(y)) \cdot |\phi(y)'|\,\mathrm{d}y$$

7.5 parametrisierte Integrale

1. $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $P \subset \mathbb{R}^m$ Menge von Parametern offen, $f : M \times P \to \mathbb{R}$
2. $f(\cdot, p)$ integrierbar auf M $\forall p$
3. $f(x, \cdot)$ stetig differenzierbar auf P $\forall x$
4. $\exists g : M \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $|f_p(x,p)| \leq g$ $\forall x, p$

$$F(p) = \int_M f(x,p)\,\mathrm{d}x \Rightarrow F'(p) = \int_M f_p(x,p)\,\mathrm{d}x$$

8 Extremwerte

8.1 ohne Nebenbedingung

1. alle partiellen Ableitungen Null setzen, das resultierende Gleichungssystem lösen $\to$ Kandidaten für Extremstellen
2. Hesse-Matrix aufstellen

$$\mathrm{Hess}(f) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \dots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \dots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

3. jeden Kandidaten in die Hesse-Matrix einsetzen, Definitheit ausrechnen
   - $\det(A) < 0 \Leftrightarrow$ indefinit
   - $\det(A) > 0, a_1 < 0 \Leftrightarrow$ negativ definit (Maximum)
   - $\det(-A) > 0, a_1 > 0 \Leftrightarrow$ positiv definit (Minimum)

8.2 mit Nebenbedingung, Lagrange-Multiplikatoren

1. Voraussetzungen prüfen:

$$\begin{aligned}&f : D \subseteq R^n \to R, \text{ stetig, differenzierbar}\\&g : D \to R^m, \text{ stetig, differenzierbar}\\&\text{rang}(g') = m\end{aligned}$$

2. Gleichungssystem lösen

$$\begin{aligned}f'(x) + \lambda^T g'(x) &= 0\\g(x) &= 0\end{aligned}$$

3. Lösung(en) sind Kandidaten für Extremalstellen!