Lineare Algebra SS2018

Dozent: Prof. Dr. Arno Fehm

28. April 2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Endomorphismen

In diesem Kapitel seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, V ein n-dimensionaler K-VR und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus.

Das Ziel dieses Kapitels ist, die Geometrie von f besser zu verstehen und Basen zu finden, für die $M_B(f)$ eine besonders einfache oder kanonische Form hat.

1. Eigenwerte

▶ **Bemerkung 1.1**
Wir erinnern uns daran, dass $\mathrm{End}_K(V) = \mathrm{Hom}_K(V, V)$ sowohl einen K-VR als auch einen Ring bildet. Bei der Wahl einer Basis B von V wird $f \in \mathrm{End}_K(V)$ durch die Matrix $M_B(f) = M_B^B(f)$ beschrieben.

■ **Beispiel 1.2**
$K = \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}), f = f_A \in \mathrm{End}_K(K^2)$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \; A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ mit $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ist $M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Der Endomorphismus $f = f_A$ streckt also entlang der Achse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ um den Faktor 3 und spiegelt entlang der Achse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Definition 1.3 (Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum)
Sind $0 \neq x \in V$ und $\lambda \in K$ mit $f(x) = \lambda x$ so nennt man λ einen Eigenwert von f und x einen Eigenvektor von f zum Eigenwert λ. Der Eigenraum zu $\lambda \in K$ ist $\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$.

▶ **Bemerkung 1.4**
Für jedes $\lambda \in K$ ist $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$ ein UVR von V, da

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(f, \lambda) &= \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\} \\ &= \{x \in V \mid f(x) - \lambda \cdot \mathrm{id}_V(x) = 0\} \\ &= \{x \in V \mid (f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(x) = 0\} \\ &= \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \end{aligned}$$

und $f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V \in \mathrm{End}_K(V)$.

▶ **Bemerkung 1.5**
Achtung! Der Nullvektor ist nach Definition kein Eigenvektor, aber $\lambda = 0$ kann ein Eigenwert sein, nämlich genau dann, wenn $f \notin \mathrm{Aut}_K(V)$, siehe Übung. Die Menge der Eigenvektoren zu λ ist also $\mathrm{Eig}(f, \lambda) \backslash \{0\}$ und λ ist genau dann ein Eigenwert von f, wenn $\mathrm{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\}$.

■ **Beispiel 1.6**
Ist $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ und $f = f_A \in \mathrm{End}_K(K^n)$, so sind $\lambda_1, ..., \lambda_n$ EW von f und jedes e_i ist ein EV zum EW λ_i.

Satz 1.7
Sei B eine Basis von V. Genau dann ist $M_B(f)$ eine Diagonalmatrix, wenn B aus EV von f besteht.

Beweis. Ist $B = (x_1, ...x_n)$ eine Basis aus EV zu EW $\lambda_1, ..., \lambda_n$, so ist $M_B(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ und umgekehrt. □

■ **Beispiel 1.8**
Sei $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ und $f_\alpha \in \mathrm{End}_K(\mathbb{R}^2)$ die Drehung um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{E}}(f_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Für $\alpha = 0$ hat $f_\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ nur den EW 1.
Für $\alpha = \pi$ hat $f_\alpha = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ nur den EW -1.
Für $\alpha \neq 0, \pi$ hat f_α keine EW.

Lemma 1.9
Sind $\lambda_1, ..., \lambda_n$ paarweise verschiedene EW von f und ist x_i ein EV zu λ_i für $i = 1, ..., m$, so ist $(x_1, ..., x_m)$ linear unabhängig.

Beweis. Induktion nach m
$\underline{m = 1}$: klar, denn $x_1 \neq 0$
$\underline{m - 1 \to m}$: Sei $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i x_i = 0$ mit $\mu_1, ..., \mu_m \in K$.

$$\begin{aligned} 0 &= (f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mu_i (f(x_i) - \lambda_m \cdot x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i (\lambda_i - \lambda_m) \cdot x_i \end{aligned}$$

Nach IB ist $\mu_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0$ für $i = 1, ..., m - 1$, da $\lambda_i \neq \lambda_m$ für $i \neq m$ also $\mu_i = 0$ für $i = 1, ..., m - 1$. Damit ist auch $\mu_m = 0$. Folglich ist $(x_1, ..., x_m)$ linear unabhängig. □

Satz 1.10
Sind $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$ paarweise verschieden, so ist

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Eig}(f, \lambda_i) = \bigoplus_{i=0}^{m} \mathrm{Eig}(f, \lambda_i).$$

Beweis. Seien $x_i, y_i \in \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ für $i = 1, ..., m$. Ist $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i$, so ist $\sum\limits_{i=1}^{m} \underbrace{x_i - y_i}_{z_i} = 0$.
o. E. seien $z_i \neq 0$ für $i = 1, ..., r$ und $z_i = 0$ für $i = r + 1, ..., m$. Wäre $r > 0$, so wären $(z_1, ..., z_r)$ linear abhängig,

aber $z_i = x_i - y_i \in \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)\backslash\{0\}$, im Widerspruch zu Lemma 1.9. Somit ist $x_i = y_i$ für alle i und folglich ist die Summe $\sum \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ direkt. □

Definition 1.11 (EW und EV für Matrizen)
Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Man definiert Eigenwerte, Eigenvektoren, etc von A als Eigenwerte, Eigenvektoren von $f_A \in \mathrm{End}_K(K^n)$.

Satz 1.12
Sei B eine Basis von V und $\lambda \in K$. Genau dann ist λ ein EW von f, wenn λ ein EW von $A = M_B(f)$ ist. Insbesondere haben ähnliche Matrizen die selben EW.

Beweis. Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "\Phi_B"'] & K^n \arrow[d, "\Phi_B"] \\ V \arrow[r, "f"'] & V \end{tikzcd}$$

denn $f_A(x) = \lambda x \iff (\Phi_B \circ f_A)(x) = \Phi_B(\lambda x) \iff f(\Phi_B(x)) = \lambda\Phi_B(x)$.
Ähnliche Matrizen beschreiben den selben Endomorphismus bezüglich verschiedener Basen, vgl. IV.4.1 □

2. Das charakteristische Polynom

Satz 2.1
Sei $\lambda \in K$. Genau dann ist λ ein EW von f, wenn $\det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f) = 0$.

Beweis. Da $\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \mathrm{Ker}(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f)$ ist λ genau dann ein EW von f, wenn $\dim_K(\mathrm{Ker}(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f)) > 0$, also wenn $\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f \notin \mathrm{Aut}_K(V)$. Nach IV.4.6 bedeutet dies, dass $\det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f) = 0$ $\square$

Definition 2.2 (charakteristisches Polynom)
Das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ist die Determinante der Matrix $t \cdot \mathbb{1}_n - A \in \mathrm{Mat}_n(K[t])$.

$$\chi_A(t) = \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A) \in K[t]$$

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ist $\chi_f(t) = \chi_{M_B(f)}(t)$, wobei B eine Basis von V ist.

Satz 2.3
Sind $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit $A \sim B$, so ist $\chi_A = \chi_B$. Insbesondere ist χ_f wohldefiniert.

Beweis. Ist $B = SAS^{-1}$ mit $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, so ist $t \cdot \mathbb{1}_n - B = S(t \cdot \mathbb{1}_n - A)S^{-1}$, also $t \cdot \mathbb{1}_n - B \sim t \cdot \mathbb{1}_n - A$ und ähnliche Matrizen haben die selben Determinante (IV.4.4).
Sind B, B' Basen von V, so sind $M_B(f) \sim M_{B'}(f)$, also $\chi_{M_B(f)} = \chi_{M_{B'}(f)}$ $\square$

Lemma 2.4
Für $\lambda \in K$ ist $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f)$.

Beweis. Sei B eine Basis von V und $A = M_B(f) = (a_{ij})_{i,j}$. Dann ist $M_B(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f) = \lambda \cdot \mathbb{1}_n - A$. Aus IV.2.8 und I.6.8 folgt $\det(t \cdot \mathbb{1}_n - A)(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)$. Folglich ist

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \chi_A(\lambda) \\ &= \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A)(\lambda) \\ &= \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) \\ &= \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f) \end{aligned}$$ $\square$

Satz 2.5
Sei $\dim_K(V) = n$ und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann ist $\chi_f(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i t^i$ ein Polynom vom Grad n mit

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 1 \\ \alpha_{n-1} &= -\operatorname{tr}(f) \\ \alpha_0 &= (-1)^n \cdot \det(f) \end{aligned}$$

Die Nullstellen von χ_f sind genau die EW von f.

Beweis. Sei B eine Basis von V und $A = M_B(f) = (a_{ij})_{i,j}$. Wir erinnern uns daran, dass $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$.
Es ist $\chi_f(t) = \det(t - \cdot 1_n - A) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} (t\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)})$.
Der Summand für $\sigma = \mathrm{id}$ ist $\prod\limits_{i=1}^{n} (t - a_{ii}) = t^n + \sum\limits_{i=1}^{n} (-a_{ii}) t^{n-1} + ... + \prod\limits_{i=1}^{n} (-a_{ii})$
Für $\sigma \neq \mathrm{id}$ ist $\sigma(i) \neq i$ für mindestens zwei i, der entsprechende Summand hat also Grad höchstens $n-2$. Somit haben α_n und α_{n-1} die oben behauptete Form, und $\alpha_0 = \chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \cdot \det(f)$.

Die Aussage über die Nullstellen von χ_f folgt aus Satz 2.1 und Lemma 2.4. □

Folgerung 2.6
Ist $\dim_K(V) = n$, so hat f höchstens n Eigenwerte.

Beweis. Satz 2.5 und I.6.10 □

Definition 2.7 (normiertes Polynom)
Ein Polynom $0 \neq P \in K[t]$ mit Leitkoeffizient 1 heißt normiert.

Beispiel 2.8

1. Ist $A = (a_{ij})_{i,j}$ eine obere Dreiecksmatrix, so ist $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^{n}(t - a_{ii})$, vgl. IV.2.9.c

   Insbesondere ist $\chi_{1_n}(t) = (t-1)^n$, $\chi_0(t) = t^n$

2. Für eine Blockmatrix $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ mit quadratischen Matrizen A_1, A_2 ist $\chi_A = \chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2}$ vgl. IV.2.9.e

3. Für

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \quad c_0, \dots, c_{n-1} \in K$$

   ist $\chi_A(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$

   Man nennt diese Matrix die Begleitmatrix zum normierten Polynom $P = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$ und schreibt $M_P := A$

3. Diagonalisierbarkeit

Definition 3.1 (diagonalisierbar)
Man nennt f diagonalisierbar, wenn V eine Basis B besitzt, für die $M_B(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

Lemma 3.2
Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn

$$V = \sum_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$$

.

Beweis. ($\Rightarrow$): Ist B eine Basis aus EV von f (vgl. Satz 1.7), so ist $B \leq \bigcup_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$, also $V = \operatorname{span}_K(\bigcup_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda)) = \sum_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$.

($\Leftarrow$): Ist $V = \sum_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$, so gibt es $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit $V = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{Eig}(f, \lambda_i)$. Wir wählen Basen B_i von $\operatorname{Eig}(f, \lambda_i)$. Dann ist $\bigcup_{i=1}^{r} B_i$ ein endliches Erzeugendensystem von V, enthält also eine Basis von V (II.3.6). Diese besteht aus EV von f. □

Satz 3.3
Ist $\dim_K(V) = n$, so hat f höchstens n Eigenwerte. Hat f genau n Eigenwerte, so ist f diagonalisierbar.

Beweis. Ist λ ein EW von f, so ist $\dim_K(\operatorname{Eig}(f, \lambda)) \geq 1$. Sind also $\lambda_1, ..., \lambda_n$ paarweise verschiedene EW von f, so ist

$$\begin{aligned}
n = \dim_K(V) &\geq \dim_K\left(\sum_{i=1}^{m} \operatorname{Eig}(f, \lambda_i)\right) \\
&\overset{\text{Satz 1.10}}{=} \dim_K\left(\bigoplus_{i=0}^{m} \operatorname{Eig}(f, \lambda_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \dim_K(\operatorname{Eig}(f, \lambda_i)) \\
&\geq m
\end{aligned}$$

Ist zudem $m = n$, so muss

$$\begin{aligned}
\dim_K(V) = \dim_K(\sum_{i=1}^{m} \operatorname{Eig}(f, \lambda_i)) \text{ sein, also} \\
V = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Eig}(f, \lambda_i)
\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2 ist f genau dann diagonalisierbar. □

Definition 3.4 (a teilt b)
Sei R ein kommutativer Ring mit seien $a, b \in R$. Man sagt, a teilt b (in Zeichen $a|b$), wenn es $x \in R$ mit $b = ax$ gibt.

Definition 3.5 (Vielfachheit)
Für $0 \neq P \in K[t]$ und $\lambda \in K$ nennt man $\mu(P, \lambda) = \max\{r \in \mathbb{N}_{>0} \mid (t-r)^r | P\}$ die Vielfachheit der Nullstelle λ von P.

Lemma 3.6
Genau dann ist $\mu(P,\lambda) \geq 1$, wenn λ eine Nullstelle von P ist.

Beweis. ($\Rightarrow$): $t-\lambda|P \Rightarrow P(t) = (t-\lambda)\cdot Q(t)$ mit $Q(t) \in K[t] \Rightarrow P(\lambda) = 0 \cdot Q(\lambda) = 0$.
($\Leftarrow$): $P(\lambda) = 0 \overset{I.6.9}{\Rightarrow} t-\lambda|P(t) \Rightarrow \mu(P,\lambda) \geq 1$. □

Lemma 3.7
Ist $P(t) = (t-\lambda)^r \cdot Q(t)$ mit $Q(t) \in K[t]$ und $Q(\lambda) \neq 0$, so ist $\mu(P,\lambda) = r$

Beweis. Offensichtlich ist $\mu(P,\lambda) \geq r$. Wäre $\mu(P,\lambda) \geq r+l$, so $(t-\lambda)^{r+l}|P(t)$ also $(t-\lambda)^r \cdot Q(t) = (t-\lambda)^{r+l} \cdot R(t)$ mit $R(t) \in K[t]$, folglich $t-\lambda|Q(t)$, insbesondere $Q(\lambda) = 0$.
(Denn wir dürfen kürzen: R ist nullteilerfrei, genau so wie $K[t]$).
$(t-\lambda)^r(Q(t) - (t-\lambda)R(t)) = 0 \Rightarrow Q(t) = (t-\lambda)R(t)$. □

Lemma 3.8
Sind $P,Q,R \in K[t]$ mit $PQ = PR$, und ist $P \neq 0$, so ist $Q = R$.

Beweis. $PQ = PR \Rightarrow P(Q-R) = 0 \overset{K[t] \text{ nullteilerfrei}}{\Rightarrow} Q - R = 0$, d.h. $Q = R$. □

Lemma 3.9
Es ist $\sum\limits_{\lambda \in K} \mu(P,\lambda) \leq \deg(P)$, mit Gleichheit genau dann, wenn P in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis. Schreibe $P(t) = \prod\limits_{\lambda \in K}(t-\lambda)^{r_\lambda} \cdot Q(t)$, wobei $Q(t) \in K[t]$ keine Nullstellen mehr besitzt. Nach Lemma 3.7 ist $\mu(P,\lambda) = r_\lambda$ für alle λ und somit $\deg(P) = \sum\limits_{\lambda \in K} r_\lambda + \deg(Q) \geq \sum\limits_{\lambda \in K} \mu(P,\lambda)$ mit Gleichheit genau dann,wenn $\deg(Q) = 0$, also $Q = c \in K$, d.h. genau dann, wenn $P(t) = c \cdot \prod\limits_{\lambda \in K}(t-\lambda)^{r_\lambda}$. □

Lemma 3.10
Für $\lambda \in K$ ist

$$\dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda)) \geq \mu(x_f,\lambda)$$

Beweis. Ergänze eine Basis B von $\mathrm{Eig}(f,\lambda)$ zu einer Basis B von V. Dann ist

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1}_s & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix $A' \in \mathrm{Mat}_{n-s}(K)$, also $\chi_f(t) = \chi_A(t) \overset{\text{Beispiel 2.8}}{=} \chi_{\lambda\mathbb{1}} \cdot \chi_{A'}(t) = (t-\lambda)^s \cdot \chi_{A'}(t)$ und somit $\dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda)) = s \leq \mu(x_f,\lambda)$. □

Satz 3.11
Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn χ_f in Linearfaktoren zerfällt und $\dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda)) = \mu(x_f,\lambda)$ für alle $\lambda \in K$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\dim_K(\sum_{\lambda\in K}\mathrm{Eig}(f,\lambda)) &\overset{\text{Satz 1.10}}{=} \dim_K(\bigoplus_{\lambda\in K}\mathrm{Eig}(f,\lambda)) \\
&\overset{\text{II.4.12}}{=} \sum_{\lambda\in K}\dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda)) \\
&\overset{\text{Lemma 3.10}}{\leq} \sum_{\lambda\in K}\mu(\chi_f,\lambda) && (1)\\
&\leq \deg(\chi_f) && (2)\\
&= n
\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2 ist f genau dann diagonalisierbar, wenn $\dim_K(\sum_{\lambda\in K}\mathrm{Eig}(f,\lambda)) = n$, also wenn bei (1) und (2) Gleichheit herrscht. Gleichheit bei (1) bedeutet $\dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda)) = \mu(\chi_f,\lambda)$ für alle $\lambda\in K$, und Gleichheit bei (2) bedeutet nach Lemma 3.9, dass χ_f in Linearfaktoren zerfällt. □

Definition 3.12 (algebraische und geometrische Vielfachheit)
Man nennt $\mu_a(f,\lambda) = \mu(\chi_f,\lambda)$ die algebraische Vielfachheit und $\mu_g(f,\lambda) = \dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda))$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ von f.

▶ **Bemerkung 3.13**
Wieder nennt man $A\in\mathrm{Mat}_n(K)$ diagonalisierbar, wenn $f_A\in\mathrm{End}_K(K^n)$ diagonalisierbar ist, also wenn $A\sim D$ für eine Diagonalmatrix D.

4. Trigonalisierbarkeit

Definition 4.1
Man nennt f <u>trigonalisierbar</u>, wenn V eine Basis B besitzt, für die $M_B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

■ **Beispiel 4.2**
Ist f diagonalisierbar, so ist f auch trigonalisierbar.

Lemma 4.3
Ist f trigonalisierbar, so zerfällt χ_f in Linearfaktoren.

Beweis. Klar aus Beispiel 2.8 und Satz 2.3. □

Definition 4.4 (invariant)
Ein Untervektorraum $W \leq V$ ist f-<u>invariant</u>, wenn $f(W) \leq W$.

▶ **Bemerkung 4.5**
Ist W ein f-invarianter UVR von V, so ist $f|_W \in \mathrm{End}_K(W)$.

■ **Beispiel 4.6**
1. V hat stets die f-invarianten UVR $W = \{0\}$ und $W = V$.
2. Jeder UVR $W \leq \mathrm{Eig}(f, \lambda)$ ist f-invariant.
3. Ist $B = (x_1, ..., x_n)$ eine Basis von V, für die $M_B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, so sind alle UVR $W_i = \mathrm{span}_K(x_1, ..., x_i)$ f-invariant.
4. Sei $V = W \oplus U$, $B_1 = (x_1, ..., x_r)$ Basis von W, $B_2(x_{r+1}, ..., x_n)$ Basis von U und $B = (x_1, ..., x_n)$. Ist W f-invariant, so ist
$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(f|_W) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$
Sind W und U f-invariant, so ist
$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(f|_W) & 0 \\ 0 & M_{B_2}(f|_U) \end{pmatrix}$$

Lemma 4.7
Ist $W \subset V$ ein f-invarianter UVR, so gilt $\chi_{f|_W} | \chi_f$. Hat W ein lineares Komplement U, dass auch f-invariant ist, so $\chi_f = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{f|_U}$.

Beweis. Ergänze eine Basis $B_0 = (x_1, ..., x_r)$ von W zu einer Basis $B = (x_1, ..., x_n)$ von V. Sei $A = M_B(f)$, $A_0 = M_{B_0}(f|_W)$. Dann ist
$$A = \begin{pmatrix} A_0 & * \\ 0 & C \end{pmatrix} \qquad C \in \mathrm{Mat}_{n-r}(K)$$
folglich $\chi_f = \chi_A = \chi_{A_0} \cdot \chi_C$, insbesondere $\chi_{f|_W} | \chi_f$.
Ist auch $U = \mathrm{span}_K(x_{r+1}, ..., x_n)$ f-invariant, so ist
$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
und folglich $\chi_f = \chi_A = \chi_{A_0} \cdot \chi_C = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{f|_U}$. □

Theorem 4.8
Genau dann ist f trigonalisierbar, wenn χ_f in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis. ($\Rightarrow$): Lemma 4.3
($\Leftarrow$): Induktion nach $n = \dim_K(V)$.
$\underline{n = 1}$: trivial
$\underline{n-1 \to n}$: Nach Annahme ist $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$. Sei x_1 ein EV zum EW λ_1. Dann ist $V_1 = K \cdot x_1$ ein f-invarianter UVR. Ergänze $B_1 = (x_1)$ zu einer Basis $B = (x_1, ..., x_n)$ von V und setze $B_2 = (x_2, ..., x_n)$, $V_2 = \operatorname{span}_K(B_2)$.

$$\Rightarrow M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \qquad A_2 \in \operatorname{Mat}_{n-1}(K)$$
$$\chi_f(t) = \chi_{\lambda_1 \mathbb{1}_1} \cdot \chi_{A_2} = (t - \lambda_1) \cdot \chi_{A_2}(t)$$
$$\overset{\text{Lemma 3.7}}{\Rightarrow} \chi_{A_2}(t) = \prod_{i=2}^n (t - \lambda_i)$$

Seien $\pi_1, \pi_2 \in \operatorname{End}_K(V)$ gegeben durch $M_B(\pi_1) = \operatorname{diag}(1, 0, ..., 0)$ und $M_B(\pi_2) = \operatorname{diag}(0, 1, ..., 1)$. Dann ist $\pi_1 + \pi_2 = \operatorname{id}_V$ und $f_i = \pi_1 \circ f$ ist $f = \operatorname{id}_V \circ f = f_1 + f_2$ und $f_2|_{V_2} \in \operatorname{End}_K(V_2)$. Nach Induktionshypothese ist $f_2|_{V_2}$ trigonalisierbar, da $M_B(f_2|_{V_2}) = A_2$, also $\chi_{f_2|_{V_2}} = \chi_{A_2}$. Dies bedeutet, es gibt also eine Basis $B_2' = (x_2', ..., x_n')$ von V_2, für die $M_{B_2'}(f_2|_{V_2})$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Somit ist für $B' = (x_1, x_2', ..., x_n')$ auch

$$\begin{aligned} M_{B'}(f) &= M_{B'}(f_1) + M_{B'}(f_2) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{B_2'}(f_2|_{V_2}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine obere Dreiecksmatrix. □

Folgerung 4.9
Ist K algebraisch abgeschlossen, so ist jedes $f \in \operatorname{End}_K(V)$ trigonalisierbar.

Beweis. Ist K algebraisch abgeschlossen, so zerfällt nach I.6.14 jedes Polynom über K in Linearfaktoren, insbesondere also χ_f. □

Folgerung 4.10
Ist V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-VR, so ist jedes $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ trigonalisierbar.

Beweis. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra I.6.16 ist $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen. □

5. Das Minimalpolynom

Definition 5.1
Für ein Polynom $P(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i t^i \in K[t]$ definieren wir $P(f) = \sum_{i=0}^{m} c_i f^i \in \mathrm{End}_K(V)$, wobei $f^0 = \mathrm{id}_V$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, ...

Analog definiert man $P(A)$ für $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

▶ **Bemerkung 5.2**
Die Abbildung $\begin{cases} K[t] \to \mathrm{End}_K(V) \\ P \mapsto P(f) \end{cases}$ ist ein Homomorphismus von K-VR und Ringen. Sein Kern ist das Ideal

$$\mathcal{I}_f := \{P \in K[t] \mid P(f) = 0\}$$

und sein Bild ist der kommutative Unterring

$$\begin{aligned} K[f] &:= \{P(f) \mid P \in K[t]\} \\ &= \mathrm{span}_K(f^0, f^1, f^2, ...) \end{aligned}$$

des (im Allgemeinen nicht kommutativen) Rings $\mathrm{End}_K(V)$.

Analog definiert man $\mathcal{I}_A$ und $K[A] \leq \mathrm{Mat}_n(K)$.

Lemma 5.3
$\mathcal{I}_f \neq \{0\}$

Beweis. Wäre $\mathcal{I}_f = \{0\}$, so wäre $K[t] \to \mathrm{End}_K(V)$ injektiv, aber $\dim_K(K[t]) = \infty > n^2 = \dim_K(\mathrm{End}_K(V))$, ein Widerspruch. □

Satz 5.4
Es gibt ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom $0 \neq P \in K[t]$ kleinsten Grades mit $P(f) = 0$. Dieses teilt jedes $Q \in K[t]$ mit $Q(f) = 0$.

Beweis. Nach Lemma 5.3 gibt es $0 \neq P \in K[t]$ mit $P(f) = 0$ von minimalem Grad d. Indem wir durch den Leitkoeffizienten von P teilen, können wir annehmen, dass P normiert ist.
Sei $Q \in \mathcal{I}_f$. Polynomdivision liefert $R, H \in K[t]$ mit $Q = P \cdot H + R$ und $\deg(R) < \deg(P) = d$. Es folgt $R(f) = \underbrace{Q(f)}_{=0} - \underbrace{P(f)}_{=0} \cdot H(f) = 0$. Aus der Minimalität von d folgt $R = 0$ und somit $P|Q$.
Ist Q zudem normiert vom Grad d, so ist $H = 1$, also $Q = P$, was die Eindeutigkeit zeigt. □

Definition 5.5 (Minimalpolynom)
Das eindeutig bestimmte normierte Polynom $0 \neq P \in K[t]$ kleinsten Grades mit $P(f) = 0$ nennt man das Minimalpolynom P_f von f.

Analog definiert man das Minimalpolynom $P_A \in K[t]$ einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

■ **Beispiel 5.6**

1. $A = \mathbb{1}_n$, $\chi_A(t) = (t-1)^n$, $P_A(t) = t - 1$
2. $A = 0$, $\chi_A(t) = t^n$, $P_A(t) = t$
3. Ist $A = \mathrm{diag}(a_1, ..., a_n)$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_r$, so ist $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^{n}(t - a_i) = \prod_{i=1}^{n}(t - \lambda_i)^{\mu_a(f_A, \lambda_i)}$, $P_A(t) = \prod_{i=1}^{r}(t - \lambda_i)$ und es folgt $\deg(P_A) \geq |\{a_1, ..., a_n\}| = r$.

Definition 5.7 (f-zyklisch)
Ein f-invarianter UVR $W \leq V$ heißt f-zyklisch, wenn es ein $x \in W$ mit $W = \operatorname{span}_K(x, f(x), f^2(x), ...)$ gibt.

Lemma 5.8
Sei $x \in V$ und $x_i = f(x)$. Es gibt ein kleinstes k mit $x_k \in \operatorname{span}_K(x_0, x_1, ..., x_{k-1})$, und $W = \operatorname{span}_K(x_0, ..., x_{k-1})$ ein f-zyklischer UVR von V mit Basis $B = (x_0, ..., x_{k-1})$ und $M_B(f|_W) = M_{\chi_{f|_W}}$.

Beweis. Da $\dim_K(V) = n$ ist $(x_0, ..., x_n)$ linear abhängig, es gibt also ein kleinstes k mit $(x_0, ..., x_{k-1})$ linear unabhängig, aber $(x_0, ..., x_k)$ linear abhängig, folglich $x_k \in \operatorname{span}_K(x_0, ..., x_{k-1})$. Mit $x_k = f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$ ist dann

$$M_B(f|_W) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -c_{k-1} \end{pmatrix}$$

somit $\chi_{f|_W} = t^k + \sum\limits_{i=0}^{k-1} c_i t^i$, also $M_B(f|_W) = M_{\chi_{f|_W}}$. □

Theorem 5.9 (Satz von Cayley-Hamiltion)
Für $f \in \operatorname{End}_K(V)$ ist $\chi_f(f) = 0$.

Beweis. Sei $x \in V$. Definiere $x_i = f^i(x)$ und $W = \operatorname{span}_K(x_0, ..., x_{k-1})$ wie in Lemma 5.8. Sei $\chi_{f|_W} = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$, also $f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$. Wenden wir $\chi_{f|_W}(f) \in \operatorname{End}_K(V)$ auf x an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi_{f|_W}(f)(x) &= \left(f^k + \sum_{i=1}^{k-1} c_i f^i\right)(x) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} -c_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} c_i x_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aus $\chi_{f|_W} | \chi_f$ (Beispiel 4.6) folgt somit $\chi_f(f)(x) = 0$, denn ist $\chi_f = Q \cdot \chi_{f|_W}$ mit $Q \in K[t]$, so ist $\chi_f(f) = Q(f) \circ \chi_{f|_W}(f)$, also $\chi_f(f)(x) = Q(f)\underbrace{(\chi_{f|_W}(f)(x))}_{=0} = 0$. Da $x \in V$ beliebig war, folgt $\chi_f(f) = 0 \in \operatorname{End}_K(V)$. □

Folgerung 5.10
Es gilt $P_f | \chi_f$. Insbesondere ist $\deg(P_f) \leq n$.

Beweis. Theorem 5.9 + Satz 5.4 □

▶ **Bemerkung 5.11**
Ist B eine Basis von V und $A = M_B(f)$, so ist $P_A = P_f$. Insbesondere ist $P_A = P_B$ für $A \sim B$. Als Spezialfall von Theorem 5.9 erhält man $\chi_A(A) = 0$ und $P_A | \chi_A$.

▶ **Bemerkung 5.12**
Der naheliegende "Beweis" $\underbrace{\chi_A}_{\in \operatorname{Mat}_n(K)} = \det(t\mathbb{1}_n - A)(A) = \det(A\mathbb{1}_n - A) = \det(0) = \underbrace{0}_{\in K}$ ist falsch!

6. Nilpotente Endomorphismen

▶ **Bemerkung 6.1**
Für $f \in \mathrm{End}_K(V)$ sind

- $f\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subseteq \mathrm{Ker}(f^1) \subseteq \mathrm{Ker}(f^2) \subseteq \ldots$
- $V = \mathrm{Im}(f^0) \supseteq \mathrm{Im}(f^1) \supseteq \mathrm{Im}(f^2) \supseteq \ldots$

Folgen von UVR von V. Nach der Kern-Bild-Formel III.7.13 ist

$$\dim_K(\mathrm{Ker}(f^i)) + \dim_K(\mathrm{Im}(f^i)) = \dim_K(V) \quad \forall i$$

Da $\dim_K(V) = n < \infty$ gibt es ein d mit $\mathrm{Ker}(f^d) = \mathrm{Ker}(f^{d+i})$ und $\mathrm{Im}(f^d) = \mathrm{Im}(f^{d+i})$ für jedes $i \geq 0$.

■ **Beispiel 6.2**
$f = f_A$, $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) = \mathrm{Ker}(f^1) = \ldots$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subset \mathrm{Ker}(f^1) = \mathrm{Ker}(f^2) = \ldots = \mathrm{span}_K(e_2)$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subset \underbrace{\mathrm{Ker}(f^1)}_{=\mathrm{span}_K(e_1)} \subset \mathrm{Ker}(f^2) = \ldots = K^2$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subset \mathrm{Ker}(f^1) = \mathrm{Ker}(f^2) = \ldots = K^2$

Lemma 6.3
Seien $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$. Wenn f und g kommutieren, d.h. $f \circ g = g \circ f$, so sind die UVR $\mathrm{Ker}(g)$ und $\mathrm{Im}(g)$ f invariant.

Beweis. Ist $x \in \mathrm{Ker}(f)$, so ist $g(f(x)) = f(g(x)) = f(0) = 0$, also $f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$. Für $g(x) \in \mathrm{Im}(g)$ ist $f(g(x)) = g(f(x)) \in \mathrm{Im}(g)$. □

Satz 6.4 (Lemma von Fitting)
Seien $V_i = \mathrm{Ker}(f^i)$, $W_i = \mathrm{Im}(f^i)$, $d = \min\{i : V_i = V_{i+1}\}$. Dann sind

$$\begin{aligned} \{0\} &= V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_d = V_{d+1} = \ldots \\ V &= W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \ldots \supsetneq W_d = W_{d+1} = \ldots \end{aligned}$$

Folgen f-invarianter UVR und $V = V_d \oplus W_d$.

Beweis. Da f^i und f^j für beliebige i, j kommutieren, sind V_i und V_j nach Lemma 6.3 f-invariant für jedes i. Aus $\dim_K(V_i) + \dim_K(W_i) = n$ folgt $d = \min\{i : W_i = W_{i+1}\}$, insbesondere ist $\mathrm{Im}(f^d) = \mathrm{Im}(f^{d+1}) = f(\mathrm{Im}(f^d))$, somit $W_{d+i} = \mathrm{Im}(f^{d+i}) = W_d$ für $i \geq 0$, also auch $V_d = V_{d+i}$ für alle $i \geq 0$.
Insbesondere ist $f^d|_{W_d} : W_d \to W_{2d} = W_d$ surjektiv, also auch injektiv, also $V_d \cap W_d = \{0\}$. Aus der Dimensionsformel II.4.12 folgt dann $\dim_K(V_d + W_d) = \dim_K(V_d) + \dim_K(W_d) = \dim_K(V)$. Folglich ist $V_d + W_d = V$ und $V_d \cap W_d = \{0\}$, also $V = V_d \oplus W_d$. □

Definition 6.5 (nilpotent)
Ein $f \in \mathrm{End}_K(V)$ heißt nilpotent, wenn $f^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Analog heißt $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ nilpotent, wenn $A^k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Das kleinste k mit $f^k = 0$ bzw. A^k heißt die Nilpotenzklasse von f bzw. A.

Lemma 6.6
Ist f nilpotent, so gibt es eine Basis B von V, für die $M_B(f)$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis. Induktion nach $n = \dim_K(V)$.
$n = 1$: $f^k = 0 \Rightarrow f = 0$
$n > 1$: Sei k die Nilpotenzklasse von f und $U = \mathrm{Ker}(f^{k-1})$. Dann ist $U \subset V$. Da $f^k = f^{k-1} \circ f$ ist $f(V) \subset U$, insbesondere $f|_U \in \mathrm{End}_K(U)$. Da $f|_U$ nilpotent ist, gibt es nach I.H. eine Basis B_0 von U, für die $M_B(f|_U)$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Ergänze B_0 zu einer Basis B von V. Da $f(V) \subset U$ ist dann auch

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_0}(f|_U) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine strikte obere Dreiecksmatrix. □

Satz 6.7
Für $f \in \mathrm{End}_K(V)$ sind äquivalent:

1) f ist nilpotent
2) $f^n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$
3) $P_f(t) = t^r$ für ein $r \leq n$
4) $\chi_f(t) = t^n$
5) Es gibt eine Basis B von V, mit

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis.

- 1) $\Rightarrow$ 5): Lemma 6.6
- 5) $\Rightarrow$ 4): Beispiel 2.8
- 4) $\Rightarrow$ 3): Nach Folgerung 5.10 ist $P_f | \chi_f = t^n$, also $t^n = P_f(t)Q(t)$ mit $Q \in K[t]$. Schreibe $P_f(t) = t^a \cdot P_1(t), Q(t) = t^b \cdot Q_1(t)$ mit $a, b \in \mathbb{N}$, $P_1, Q_1 \in K[t]$, $P_1(0) \neq 0$, $Q_1(0) \neq 0$
$\overset{\text{Lemma } 3.8}{\Rightarrow} t^{n-(a+b)} = P_1(t)Q_1(t)$ und $(P_1Q_1)(0) \neq 0$
$\Rightarrow n - (a+b) = 0 \Rightarrow P_1 = 1$, somit $P_f(t) = t^a$
- 3) $\Rightarrow$ 2): $t^r = 0$, $r \leq n \Rightarrow f^n = 0$
- 2) $\Rightarrow$ 1): nach Definition □

Folgerung 6.8
Die Nilpotenzklasse eines nilpotenten Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ist höchstens $\dim_K(V)$.

Folgerung 6.9
Ist $d := \min\{i \mid \mathrm{Ker}(f^i) = \mathrm{Ker}(f^{i+1})\}$, so ist $d \leq \dim_K(\mathrm{Ker}(f)) = \mu_a(f, 0)$.

Beweis. Sei $V_d = \mathrm{Ker}(f^d)$, $W_d = \mathrm{Im}(f^d)$, $k = \dim_K(V_d)$. Da $V = V_d \oplus W_d$ ist $\chi_f = \chi_{f|_{V_d}} \cdot \chi_{f|_{W_d}}$. Da $f|_{V_d}$ nilpotent ist, ist $\chi_{f|_{V_d}} = t$ nach Satz 6.7. Da $f|_{W_d}$ injektiv ist, ist $\chi_{f|_{W_d}}(0) \neq 0$. Somit ist $\mu_a(f,0) = \mu(\chi_f, 0) \overset{Lemma\ 3.6}{=} k$. Da $\dim_K(\mathrm{Ker}(f^d)) > ... > \dim_K(\mathrm{Ker}(f)) > 0$ ist $k = \dim_K(\mathrm{Ker}(f^d)) \geq d$, falls $d > 0$, sonst klar. □

▶ Bemerkung 6.10

Die Bedeutung nilpotenter Endomorphismen beim Finden geeigneter Basen ergibt sich aus der folgenden Beobachtung:
Ist A eine obere Dreiecksmatrix, so ist $A = D + N$, wobei D eine Diagonalmatrix ist und N eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Anders gesagt: Jeder trigonalisierbare Endomorphismus ist Summe aus einem diagonalisierbaren und einem nilpotenten Endomorphismus.

Definition 6.11 (Jordan-Matrix)

Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Jordan-Matrix

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_k(K)$$

weiter setzen wir für $\lambda \in K$ $J_k(\lambda) := \lambda \mathbb{1} + J_k$.

Lemma 6.12

Die Jordan-Matrix J_k ist nilpotent von Nilpotenzklasse k.

Beweis. Es ist $(J_k)^r = (\delta_{i+r,j})_{i,j}$ für $r \geq 1$. □

Satz 6.13

Ist f nilpotent von Nilpotenzklasse k, so gibt es eindeutig bestimmte $r_1, .., r_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\sum_{d=1}^{k} dr_d - n$ und eine Basis B von V mit

$$M_B(f) = \mathrm{diag}(\underbrace{J_k, ..., J_k}_{r_k \text{ viele}}, ..., \underbrace{J_1, ..., J_1}_{r_1 \text{ viele}})$$

Beweis. Sei $U_i = \mathrm{Ker}(f^i)$. Nach Satz 6.4 haben wir eine Folge $\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset ... \subset U_k = V$ mit $f(U_i) \subseteq U_{i-1}$ für alle $i > 0$.
Wir konstruieren eine Zerlegung $V = \bigoplus_{d=1}^{k} W_d$ mit $U_i = U_{i-1} \oplus W_i$, $f(W_i) \subseteq W_{i-1}$, $f|_{W_d}$ injektiv für $i > 1$.

$$\begin{aligned} V &= U_k \\ V &= U_{k-1} \oplus W_k \\ V &= U_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k \\ &\vdots \\ V &= U_0 \oplus W_1 \oplus ... \oplus W_k \end{aligned}$$

Wähle W_k mit $V = U_k = U_{k-1} \oplus W_k$. Ist $k > 1$, so ist $W_k \cap \mathrm{Ker}(f) \subseteq W_k \cap U_{k-1} = \{0\}$, also $f|_{W_k}$ ist injektiv. Des weiteren ist $f(W_k) \subseteq U_{k-1}$ und aus $W_k \cap U_{k-1} = \{0\}$ folgt $f(W_k) \cap U_{k-2} = \{0\}$. Wir können deshalb W_{k-1} mit $U_{k-1} = U_{k-2} \oplus W_{k-1}$ und $f(W_k) \subseteq W_{k-1}$ wählen. Somit ist $V = U_{k-1} \oplus W_k = U_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k$. Wir setzen dies fort und erhalten $V = U_0 \oplus W_1 \oplus ... \oplus W_k$ mit $f(W_i) \subseteq W_{i-1}$ und $f|_{W_i}$ injektiv für $i > 1$, wobei $U_0 = \{0\}$ und $W_1 = \mathrm{Ker}(f)$.

Sie $r_d = \dim_K(W_d) - \dim_K(W_{d+1})$, wobei wir $W_{k+1} = \{0\}$. Wähle nun eine Basis $(x_{k,1}, ..., x_{k,r_k})$ von W_k. Ist $k > 1$, so ist $f|_{W_k}$ injektiv und wir können $(f(x_{k,1}), ..., f(x_{k,r_k}))$ durch Elemente $x_{k-1,1}, ..., x_{k-1,r_{k-1}}$ zu einer Basis von W_{k-1} ergänzen, und so weiter.
Da $V = \bigoplus_{d=1}^{k} W_d$ ist

$$B = \{f^i(x_{d,j}) \mid d = 1, ..., k, j = 1, ..., r_d, i = 0, ..., d-1\}$$

eine Basis von V, die bei geeigneter Anordnung das Gewünschte leistet.
Es bleibt zu zeigen, dass $r_1, ..., r_k$ eindeutig bestimmt sind. Ist B_0 eine Basis, für die $M_{B_0}(f)$ in der gewünschten Form ist, so ist

$$\begin{aligned}
\dim_K(U_1) &= \sum_{d=1}^{k} r_d \\
\dim_K(U_2) &= \sum_{d=2}^{k} r_d + \sum_{d=1}^{k} r_d \\
&\vdots \\
\dim_K(U_k) &= \sum_{d=k}^{k} r_d + ... + \sum_{d=1}^{k} r_d
\end{aligned}$$

woraus man sieht, dass $r_1, ..., r_k$ durch $U_1, ..., U_k$, also durch f eindeutig bestimmt. □

■ **Beispiel 6.14**
Sei $f = f_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, A^3 = 0$$

$\Rightarrow k = 3, U_0 = \{0\}, U_1 = \mathbb{R}e_1, U_2 = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2, U_3 = V.$
Wähle W_3 mit $V = U_3 = U_2 \oplus W_3$, z.B. $W_3 = \mathbb{R}e_3$.
Wähle W_2 mit $U_2 = U_1 \oplus W_2$ und $f(W_3) \subseteq W_2$, also

$$W_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setze $W_1 = U_1 = \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}e_1 \Rightarrow$ Basis $B = (f^2(e_3), f(e_3), e_3)$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Kapitel II

Skalarprodukte

Kapitel III

Dualität

Kapitel IV

Moduln

Anhang

Anhang A: Listen

A.1. Liste der Theoreme

A.2. Liste der benannten Sätze