Maß und Integral WS2018/19

Dozent: Prof. Dr. Rene Schilling

16. November 2018

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

1. Einleitung

messen: Längen, Flächen, Volumina, $\mathbb{N} \to$ zählen, Wahrscheinlichkeiten, Energie $\to$ Integrale, ...
Wenn man ein Integral hat: $\int_{t_0}^{t} F(t)\mathrm{d}t$, also wird das d$t$ durch ein Maß $\mu(\mathrm{d}t)$ ersetzt.
Wir messen Mengen:

$$\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty] \text{ mit } \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$$

Dabei ist:

- X eine beliebige Grundmenge
- $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$ die Potenzmenge von X
- $F \to \mu(F) \in [0, \infty]$

Konvention:

- Familien von Mengen: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \ldots, \mathcal{R}$
- Mengen: A, B, X
- Maße: $\mu, \lambda, \nu, \rho, \delta$

■ **Beispiel 1.1 (Flächenmessung)**

$$\begin{aligned} \mu(F) = g \cdot h &= \mu(F_1) + \mu(F_2) + \mu(F_3) \\ &= g' \cdot h + h' \cdot g'' + h'' \cdot g'' \\ &= \ldots \stackrel{!}{=} gh \end{aligned}$$

F_1, F_2, F_3 disjunkt bzw. nicht überlappend!
$\mu(F) = \mu(\Delta_1) + \mu(\Delta_2)$ mit $\mu(\Delta) = 0.5gh$
Allgemein für Dreiecke:
$\mu(\Delta) = 0.5gh \stackrel{!}{=} 0.5g'h'$ und das ganze ist wohldefiniert!

Dreiecke lassen allgemeine Flächenberechnung zu - Triangulierung!

$$F = \biguplus_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n \text{ (disjunkte Vereinigung } \Delta_i \cap \Delta_k = \emptyset \quad k \neq i)$$

2. Sigma-Algebren

Ziel: Charakterisierung der Definitionsgebiete von Maßen.

Definition 2.1 (σ-Algebra, messbar)
Eine σ-Algebra über einer beliebigen Grundmenge $X \neq \emptyset$ ist eine Familie von Mengen in $\mathcal{P}(X), \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$:

- (S1): $X \in \mathcal{A}$
- (S2): $A \in \mathcal{A} \to A^C = X \setminus A \in \mathcal{A}$
- (S3): $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt messbar .

Satz 2.2 (Eigenschaften einer σ-Algebra)
Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X.

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

(c) $(A_n)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

(d) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

(e) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

Beweis. (a) $\emptyset = X^C \in \mathcal{A}$

(b) $A_1 = A$, $A_2 = B$m $A_3 = A_4 = ... = \emptyset \Rightarrow A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

(c) $A_n \in \mathcal{A} \overset{S2}{\Rightarrow} A_n^C \in \mathcal{A} \overset{S3}{\Rightarrow} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^C \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^C\right)^C \in \mathcal{A}$

(d) wie (b)

(e) $A \setminus B = A \cap B^C \in \mathcal{A}$ □

Fazit: Auf einer σ-Algebra kann man alle üblichen Mengenoperationen abzählbar oft durchführen ohne $\mathcal{A}$ zu verlassen!

■ **Beispiel 2.3**
$X \neq \emptyset$ Menge, $A, B \subset X$

(a) $\mathcal{P}(X)$ ist eine σ-Algebra (größtmögliche)

(b) $\{\emptyset, X\}$ ist eine σ-Algebra (kleinstmögliche)

(c) $\{\emptyset, A, A^C, X\}$ ist eine σ-Algebra

(d) $\{\emptyset, B, X\}$ ist eine σ-Algebra, wenn $B = \emptyset$ oder $B = X$

(e) $\mathcal{A} = \{A \subset X \mid \#A \leq \#\mathbb{N} \text{ oder } \#A^C \leq \#\mathbb{N}\}$ ist eine σ-Algebra

3. Maße

Sei E eine beliebige nicht-leere Grundmenge.

Definition 3.1 (Maß)
Ein Maß μ ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

- (M_0) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra auf E
- (M_1) $\mu(\emptyset) = 0$
- (M_2) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ paarweise disjunkt $\Longleftarrow \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

Gilt für $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ nur $(M_1), (M_2)$, dann heißt μ Prämaß .

Für auf- und absteigende Folgen von Mengen schreiben wir auch

$$A_n \uparrow A \iff A_1 \subset A_2 \subset \ldots \text{ und } A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$
$$B_n \downarrow B \iff B_1 \subset B_2 \subset \ldots \text{ und } B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

Definition 3.2

- Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf E und μ ein Maß. Dann heißt $(E, \mathcal{A})$ Messraum und $(E, \mathcal{A}, \mu)$.
- Ein Maß mit $\mu(E) < \infty$ heißt endliches Maß und $(E, \mathcal{A}, \mu)$ endlicher Maßraum .
- Gilt $\mu(E) = 1$, dann sprechen wir von einem Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) und Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum).
- Gibt es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, sodass $A_n \uparrow E$ und $\mu(A_n) < \infty$, dann heißen μ und $(E, \mathcal{A}, \mu)$ σ-endlich .

Satz 3.3 (Eigenschaften von Maßen)
Es sei μ ein Maß auf $(E, \mathcal{A})$ und $A, B, A_n, B_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$.

1. $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (additiv)
2. $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (monoton)
3. $A \subset B$ & $\mu(A) < \infty \Longrightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
4. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ (stark additiv)
5. $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ (subadditiv)
6. $A_n \uparrow A \Longrightarrow \mu(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ (stetig von unten)
7. $B_n \downarrow B$ & $\mu(B_1) < \infty \Longrightarrow \mu(B_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$ (stetig von oben)
8. $\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ (σ-additiv)

Beweis. Wird noch ergänzt später! □

▶ **Bemerkung 3.4**
Die Aussagen von Satz 3.3 gelten auf für Prämaße, wenn das zu Grunge leigende Mengensystem groß genug ist. Genauer braucht man dafür:

- a)-e) Stabilität unter endlichen vielen Wiederholungen von $\cup, \cap, \setminus$
- f) $A_{n+1} \setminus A_n, \bigcup_n^\infty A_n \in \mathcal{A}$
- g) $B_1 \setminus B_n, B_n \setminus B_{n+1}, \bigcap_n^\infty B_n, B_1 \setminus \bigcap_n^\infty \in \mathcal{A}$
- h) $\bigcup_n^m A_n, \bigcup_n^\infty A_n \in \mathcal{A}$

■ **Beispiel 3.5**

1. (Dirac-Maß). Es sei $(E, \mathcal{A})$ ein beliebiger Messraum und $x \in E$ fest. Dann ist

$$\delta_x : \mathcal{A} \to [0,1] \text{ mit } \delta_x(A) := \begin{cases} 0 & x \notin A, \\ 1 & x \in A \end{cases}$$

   ist ein W-Maß, das Dirac-Maß (auch δ-Funktion , Einheitsmasse)

2. Es sei $E = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}$ wie in Beispiel 2.3 e) (d.h. $A \in \mathcal{A} \iff A$ oder A^C abzählbar). Dann ist

$$\gamma(A) := \begin{cases} 0 & A \text{ ist abzählbar,} \\ 1 & A^C \text{abzählbar} \end{cases}$$

   mit $A \in \mathcal{A}$ und γ ist ein W-Maß.

3. gibt noch mehr, werden später ergänzt!

4. Eindeutigkeit von Maßen

5. Integration positiver Funktionen

6. Messbare Abbildungen

7. Messbare Funktionen

8. Integration positiver Funktionen

Anhang