Analysis 1. Semester (WS2017/18)

Dozent: Prof. Dr. Friedemann Schuricht
Kursassistenz: Moritz Schönherr

Stand: 22. Januar 2018

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Grundlagen der Mathematik

Mathematik besitzt eine Sonderrolle unter den Wissenschaften, da

- Resultate nicht empirisch gezeigt werden müssen
- Resultate nicht durch Experimente widerlegt werden können

Literatur

- Forster: Analysis 1 + 2, Vieweg
- Königsberger: Analysis 1 + 2, Springer
- Hildebrandt: Analysis 1 + 2, Springer
- Walter: Analysis 1 + 2, Springer
- Escher/Amann: Analysis 1 + 2, Birkhäuser
- Ebbinghaus: Einfühung in die Mengenlehre, BI-Wissenschaftsverlag
- Teubner-Taschenbuch der Mathematik, Teubner 1996
- Springer-Taschenbuch der Mathematik, Springer 2012

Kapitel 1

Grundbegriffe aus Mengelehre und Logik

Mengenlehre: Universalität von Aussagen
Logik: Regeln des Folgerns, wahre/falsche Aussagen

Definition 1.1 (Definition Aussage)
Sachverhalt, dem man entweder den Wahrheitswert "wahröder "falschßuordnen kann, aber nichts anders.

Beispiel

5 ist eine Quadratzahl $\rightarrow$ falsch (Aussage)

Die Elbe fließt durch Dresden $\rightarrow$ wahr (Aussage)

Mathematik ist rot $\rightarrow$??? (keine Aussage)

Definition 1.2 (Menge)
Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten der Anschauung oder des Denkens, welche die Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen.
(Cantor, 1877)

Beispiel

$M_1 :=$ Menge aller Städte in Deutschland

$M_2 := \{1; 2; 3\}$

Für ein Objekt m und eine Menge M gilt stets $m \in M$ oder $m \notin M$
Für die Mengen M und N gilt $M = N$, falls dieselben Elemente enthalten sind $\{1; 2; 3\} = \{3; 2; 1\} = \{1; 2; 2; 3\}$
- $N \subseteq M$, falls $n \in M$ für jedes $n \in N$
- $N \subset M$, falls zusätzlich $M \neq N$

Definition 1.3 (Aussageform)
Sachverhalt mit Variablen, der durch geeignete Ersetzung der Variablen zur Aussage wird.

Beispiel
- $A(X) :=$ Die Elbe fließt durch X
- $B(X; Y; Z) := X + Y = Z$
- aber $A(Dresden), B(2; 3; 4)$ sind Aussagen, $A(Mathematik)$ ist keine Aussage
- $A(X)$ ist eine Aussage fü jedes $X \in M_1 \rightarrow$ Generalisierung von Aussagen durch Mengen

Bildung und Verknüpfung von Aussagen

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \iff B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Beispiel 1.4
- $\neg$(3 ist gerade) $\rightarrow$ w
- (4 ist gerade) $\wedge$ (4 ist Primzahl) $\rightarrow$ f
- (3 ist gerade) $\vee$ (3 ist Primzahl) $\rightarrow$ w
- (3 ist gerade) $\Rightarrow$ (Mond ist Würfel) $\rightarrow$ w
- (Die Sonne ist heiß) $\Rightarrow$ (es gibt Primzahlen) $\rightarrow$ w

Auschließendes oder: (entweder A oder B) wird realisiert durch $\neg(A \iff B)$.
Aussageform $A(X)$ sei für jedes $X \in M$ Aussage: neue Aussage mittels Quantoren

- $\forall$: "für alle"
- $\exists$: ës existiert"

Beispiel 1.5
$\forall n \in \mathbb{N} : n$ ist gerade $\rightarrow$ f
$\exists n \in \mathbb{N} : n$ ist gerade $\rightarrow$ w

Definition 1.6 (Tautologie bzw. Kontraduktion/Widerspruch)
Zusammengesetzte Aussage, die unabhängig vom Wahrheitsgehalt der Teilaussagen stest wahr bzw. falsch ist.

Beispiel 1.7
- Tautologie (immer wahr): $(A) \vee (\neg A), \neg(A \wedge (\neg A)), (A \wedge B) \Rightarrow A$
- Widerspruch (immer falsch): $A \wedge (\neg A), A \iff \neg A$
- besondere Tautologie: $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Satz 1.8 (Morgansche Regeln)
Folgende Aussagen sind Tautologien:
- $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$

Bildung von Mengen

Seien M und N Mengen
- Aufzählung der Elemente: $\{1; 2; 3\}$
- mittels Eigenschaften: $\{X \in M \mid A(X)\}$
- $\emptyset :=$ Menge, die keine Elemente enthält
  - leere Menge ist immer Teilmenge jeder Menge M
  - **Warnung:** $\{\emptyset\} \neq \emptyset$
- Verknüpfung von Mengen wie bei Aussagen

Definition 1.9 (Mengensystem)
Ein Mengensystem $\mathcal{M}$ ist eine Menge, bestehend aus anderen Mengen.
- $\bigcup M := \{X \mid \exists M \in \mathcal{M} : X \in M\}$ (Vereinigung aller Mengen in $\mathcal{M}$)
- $\bigcap M := \{X \mid \forall M \in \mathcal{M} : X \in M\}$ (Durchschnitt aller Mengen in $\mathcal{M}$)

Definition 1.10 (Potenzmenge)
Die Potenzmenge $\mathcal{P}$ enthält alle Teilmengen einer Menge M.
$\mathcal{P}(X) := \{\tilde{M} \mid \tilde{M} \subset M\}$

Beispiel:
- $M_3 := \{1; 3; 5\}$
  $\rightarrow \mathcal{P}(M_3) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1; 3\}, \{1; 5\}, \{3; 5\}, \{1; 3; 5\}\}$

Satz (de Morgansche Regeln für Mengen):
- $(\bigcup_{N \in \mathcal{N}} N)^C = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N^C$
- $(\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N)^C = \bigcup_{N \in \mathcal{N}} N^C$

Definition 1.11 (Kartesisches Produkt)
$M \times N := \{m, n \mid m \in M \wedge n \in N\}$
(m, n) heißt geordnetes Paar (Reihenfolge wichtig!)
allgemeiner: $M_1 \times ... \times M_k := \{(m_1, ..., m_k) \mid m_j \in M_j, j = 1, .., k\}$
$M^k := M \times ... \times M := \{(m_1, ..., m_k) \mid m_j \in M_j, j = 1, .., k\}$

Satz 1.12 (Auswahlaxiom)
Sei $\mathcal{M}$ ein Mengensystem nichtleerer paarweise disjunkter Mengen M.

- Es existiert eine Auswahlmenge $\tilde{M}$, die mit jedem $M \in \mathcal{M}$ genau 1 Element gemeinsam hat.
- beachte: Die Auswahl ist nicht konstruktiv!

Kapitel 2

Aufbau einer mathematischen Theorie

Axiome $\rightarrow$ Beweise $\rightarrow$ Sätze (”neue”wahre Aussagen)
$\rightarrow$ ergibt Ansammlung (Menge) wahrer Aussagen

Formulierung mathematischer Aussagen

- typische Form eines mathematischen Satzes: ”Wenn A gilt, dann gilt auch B.”
- formal: $A \Rightarrow B$ bzw. $A(X) \Rightarrow B(X)$ ist stets wahr (insbesondere falls A wahr ist)

Beispiel

- $X \in \mathbb{N}$ und ist durch 4 teilbar $\Rightarrow X$ ist durch 2 teilbar
- beachte: Implikation auch wahr, falls $X = 5$ oder $X = 6$, dieser Fall ist aber uninteressant
- genauer meint man sogar $A \wedge C \Rightarrow B$, wobei C aus allen bekannten wahren Aussagen besteht
- man sagt: B ist **notwendig** für A, da A nur wahr sein kann, wenn B wahr ist
- man sagt: A ist **hinreichend** für B, da B stets wahr ist, wenn A wahr ist

Mathematische Beweise

- **direkter Beweis:** finde Zwischenaussagen $A_1, ..., A_k$, sodass für A auch wahr:
  $(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge ... \wedge (A_k \Rightarrow B)$
- Beispiel: Zeige $x > 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$
  $(x > 2) \Rightarrow (x - 2 > 0) \wedge (x - 1 > 0) \Rightarrow (x - 2) \cdot (x - 1) \Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$
- **indirekter Beweis:** auf Grundlage der Tautologie $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$ führt man direkten Beweis $\neg B \Rightarrow \neg A$ (das heißt angenommen B falsch, dann auch A falsch)
- praktisch formuliert man das auch so: $(A \wedge \neg B) \Rightarrow ... \Rightarrow (A \wedge \neg A)$
- Beispiel: Zeige $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ sei wahr
  $\neg B \Rightarrow (x - 2) \cdot (x - 1) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow \neg A$

2.1 Relationen und Funktionen

Definition 2.1 (Relation)
Seien M und N Mengen. Dann ist jede Teilmenge R von $M \times N$ eine Relation.
$(x, y) \in R$ heißt: x und y stehen in Relation zueinander

Beispiel
M ist die Menge aller Menschen. Die Liebesbeziehung x liebt y sieht als geordnetes Paar geschrieben so aus: (x, y). Das heißt die Menge der Liebespaare ist das: $L := \{(x, y) \mid x \textit{ liebt } y\}$. Und es gilt: $L \subset M \times M$.

Die Relation $R \subset M \times N$ heißt **Ordnungsrelation** (kurz. Ordnung) auf M, falls für alle $a, b, c \in M$ gilt:

- $(a, a) \in R$ (reflexiv)
- $(a, b), (b, a) \in R$ (antisymetrisch)
- $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ (transitiv)
- z.B. $R = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(Y) \times \mathcal{P}(Y) \mid X \subset Y\}$

Eine Ordnungsrelation heißt **Totalordnung**, wenn zusätzlich gilt: $(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$

Beispiel
Seien m, n und o natürliche Zahlen, dann ist $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$ eine Totalordnung, da

- $m \leq m$ (reflexiv)
- $(m \leq n \wedge n \leq m) \Rightarrow m = n$ (antisymetrisch)
- $(m \leq n \wedge n \leq o) \Rightarrow m \leq o$ (transitiv)
- $m \leq n \vee n \leq m$ (total)

Eine Relation auf M heißt **Äquivalenzrelation**, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt:

- $(a, a) \in R$ (reflexiv)
- $(a, b), (b, a) \in R$ (symetrisch)
- $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ (transitiv)

Obwohl Ordnungs- und Äquivalenzrelation die gleichen Eigenschaften haben, haben sie unterschiedliche Zwecke: Ordnungsrelationen ordnen Elemente in einer Menge (z.B. das Zeichen $\leq$ ordnet die Menge der natürlichen Zahlen), während Äquivalenzrelationen eine Menge in disjunkte Teilmengen (Äquivalenzklassen) ohne Rest aufteilen.

Wenn R eine Ordnung auf M ist, so wird häufig geschrieben:
$a \leq b$ bzw. $a \geq b$ falls $(a, b) \in \mathbb{R}$
$a < b$ bzw. $a > b$ falls zusätzlich $a \neq b$

Definition 2.2 (Abbildung/Funktion)
Eine Funktion F von M nach N (kurz: $F : M \rightarrow N$), ist eine Vorschrift, die jedem Argument/Urbild $m \in M$ genau einen Wert/Bild $F(m) \in N$ zuordnet.
$D(F) := M$ heißt Definitionsbereich/Urbildmenge
N heißt Zielbild
$F(M') := \{n \in N \mid n = F(m)$ für ein $m \in M'\}$ ist Bild von $M' \subset M$
$F^{-1}(N') := \{m \in M \mid n = F(m)$ für ein $N'\}$ ist Urbild von $N' \subset N$
$R(F) := F(M)$ heißt Wertebereich/Bildmenge
$graph(F) := \{(m, n) \in M \times N \mid n = F(m)\}$ heißt Graph von F
$F_{|M'}$ ist Einschränkung von F auf $M' \subset M$

Unterschied Zielmenge und Wertebereich: $f(x) = \sin(x)$:
Zielmenge: $\mathbb{R}$
Wertebereich: $[-1; 1]$

Funktionen F und G sind gleich, wenn

- $D(F) = D(G)$
- $F(m) = G(m) \quad \forall m \in D(F)$

Manchmal wird auch die vereinfachende Schreibweise benutzt:
- $F : M \to N$, obwohl $D(F) \subsetneq M$ (z.B. $\tan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Probleme bei $\frac{\pi}{2}$)
- gelegentlich spricht man auch von "Funktion $F(m)$ßtatt Funktion F

Lemma 2.3 (Komposition/Verknüpfung)
Die Funktionen $F : M \to N$ und $G : N \to P$ sind verknüpft, wenn
$F \circ G : M \to P$ mit $(F \circ G)(m) := G(F(m))$

Eigenschaften von Funktionen:

- injektiv: Zuordnung ist eineindeutig $\to F(m_1) = F(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$
- Beispiel: x^2 ist nicht injektiv, da $F(2) = F(-2) = 4$
- surjektiv: $F(M) = N \quad \forall n \in N \; \exists m \in M : F(m) = n$
- Beispiel: $\sin(x)$ ist nicht surjektiv, da es kein x für $y = 27$ gibt
- bijektiv: injektiv und surjektiv

Für bijektive Abbildung $F : M \mapsto N$ ist Umkehrabbildung/inverse Abbildung $F^{-1} : N \mapsto M$ definiert durch: $F^{-1}(n) = m \iff F(m) = n$
Hinweis: Die Notation $F^{-1}(N')$ für Urbild bedeutet nicht, dass die inverse Abbildung F^{-1} existiert.

Satz 2.4
Sei $F : M \to N$ surjektiv. Dann existiert die Abbildung $G : N \to M$, sodass $F \circ G = id_N$ (d.h. $F(G(n)) = n \quad \forall n \in N$)

Definition 2.5 (Rechenoperation/Verknüpfung)
Eine Rechenoperation auf einer Menge M ist die Abbildung $* : M \times M \to M$ d.h. $(m, n) \in M$ wird das Ergbnis $m * n \in M$ zugeordnet.

Eigenschaften von Rechenoperationen:
- hat neutrales Element $e \in M : m * e = m$
- ist kommutativ $m * n = n * m$
- ist assotiativ $k * (m * n) = (k * m) * n$
- hat ein inverses Element $m' \in M$ zu $m \in M : m * m' = e$

e ist stets eindeutig, m' ist eindeutig, wenn die Operation $*$ assoziativ ist.

Beispiele:
- Addition $+$: $(m, n) \mapsto m + n$ Summe, neutrales Element heißt Nullelement, inverses Element $-m$
- Multiplikation $\cdot$: $(m, n) \mapsto m \cdot n$ Produkt, neutrales Element Eins, inverses Element m^{-1}

Addition und Multiplikation sind distributiv, falls $k(m + n) = k \cdot m + k \cdot n$

Definition 2.6 (Körper)
Eine Menge M ist ein Körper K, wenn man auf K eine Addition und eine Multiplikation mit folgenden Eigenschaften durchführen kann:
- es gibt neutrale Elemente 0 und $1 \in K$

- Addition und Multiplikation sind jeweils kommutativ und assoziativ
- Addition und Multiplikation sind distributiv
- es gibt Inverse $-k$ und $k^{-1} \in K$
  $\rightarrow$ die reellen Zahlen sind ein solcher Körper

Eine Menge M habe die Ordnung "$\leq$" und diese erlaubt die Addition und Multiplikation, wenn
- $a \leq b \iff a + c \leq b + c$
- $a \leq b \iff a \cdot c \leq b \cdot c \quad c > 0$
  $\rightarrow$ Man kann die Gleichungen in gewohnter Weise umformen.

Ein Körper K heißt angeordnet, wenn er eine Totalordnung besitzt, die mit Addition und Multiplikation verträglich ist.

Isomorphismus bezüglich einer Struktur ist die bijektive Abbildung $I : M_1 \mapsto M_2$, die die vorhandene Struktur auf M_1 und M_2 erhält, z.B.
- Ordnung $\leq_1$ auf M_1, falls $a \leq_1 b \iff I(a) \leq_2 I(b)$
- Abbildung $F_i : M_i \rightarrow M_i$, falls $I(F_1(a)) = F_2(I(a))$
- Rechenoperation $*_i : M_i \times M_i \rightarrow M_i$, falls $I(a *_1 b) = I(a) *_2 I(b)$
- spezielles Element $a_i \in M_i$, falls $I(a_1) = a_2$

Ës gibt 2 verschiedene Arten von reellen Zahlen, meine und Prof. Schurichts. Wenn wir einen Isomorphismus finden, dann bedeutet das, dass unsere Zahlen strukturell die selben sind."

Beispiele: $M_1 = \mathbb{N}$ und $M_2 = \{\text{gerade Zahlen}\}$, jeweils mit Addition, Multiplikation und Ordnung
$\rightarrow I : M_2 \rightarrow M_2$ mit $I(k) = 2k \quad \forall k \in \mathbb{N}$
$\rightarrow$ Isomorphismus, der die Addition, Ordnung und die Null, aber nicht die Multiplikation erhält

Bemerkungen zum Fundament der Mathematik

Forderungen an eine mathematische Theorie:
- widerspruchsfrei: Satz und Negation nicht gleichzeitig herleitbar
- vollständig: alle Aussagen innerhalb der Theorie sind als wahr oder falsch beweisbar

zwei Unvollständigkeitssätze:
- jedes System ist nicht gleichzeitig widerspruchsfrei und vollständig
- in einem System kann man nicht die eigene Widerspruchsfreiheit zeigen

Teil II

Zahlenbereiche

Kapitel 3

Natürliche Zahlen

$\mathbb{N}$ sei diejenige Menge, die die **Peano-Axiome** erfüllt, das heißt

- $\mathbb{N}$ sei induktiv, d.h. es existiert ein Nullelement und eine injektive Abbildung $\mathbb{N} to \mathbb{N}$ mit $\nu(n) \neq 0 \quad \forall n$
- Falls $N \subset \mathbb{N}$ induktiv in $\mathbb{N}$ (0, $\nu(n) \in N$ falls $n \in N \Rightarrow N = \mathbb{N}$

$\rightarrow \mathbb{N}$ ist die kleinste induktive Menge

Nach der Mengenlehre ZF (Zermelo-Fraenkel) existiert eine solche Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Mit den üblichen Symbolen hat man:

- $0 := \emptyset$
- $1 := \nu(0) := \{\emptyset\}$
- $2 := \nu(1) := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $3 := \nu(2) := \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Damit ergibt sich in gewohnter Weise $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; ...\}$

anschauliche Notation $\nu(n) = n + 1$ (beachte: noch keine Addition definiert!)

Theorem 3.1 *Falls $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}'$ die Peano-Axiome erfüllen, sind sie isomorph bezüglich Nachfolgerbildung und Nullelement. Das heißt alle solche $\mathbb{N}'$ sind strukturell gleich und können mit obigem $\mathbb{N}$ identifiziert werden.*

Satz 3.2 (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei $\{A_n \mid n \in N\}$ eine Menge von Aussagen A_n mit der Eigenschaft:

1. IA: A_0 ist wahr
2. IS: $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \Rightarrow A_{n+1}$

A_n ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$

Lemma 3.3
Es gilt:
1. $\nu(n) \cup \{0\} = \mathbb{N}$
2. $\nu(n) \neq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Satz 3.4
(rekursive Definition/Rekursion) Sei B eine Menge und $b \in B$. Sei F eine Abbildung mit $F : B \times \mathbb{N} \mapsto B$. Dann liefert nach Vorschrift: $f(0) := b$ und $f(n+1) = F(f(n), n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ genau eine Abbildung $f : \mathbb{N} \mapsto B$. Das heißt eine solche Abbildung exstiert und ist eindeutig.

Rechenoperationen:
- Definition Addition '+': $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ durch $n + 0 := n$, $n + \nu(m) := \nu(n + m) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$
- Definition Multiplikation '$\cdot$': $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ durch $n \cdot 0 := 0$, $n \cdot \nu(m) := n \cdot m + n \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ sind beide Definitionen rekursiv und eindeutig definiert.
$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $n + 1 = n + \nu(0) = \nu(n + 0) = \nu(n)$

Satz 3.5
Addition und Multiplikation haben folgende Eigenschaften:
- es existiert jeweils ein neutrales Element
- kommutativ
- assoziativ
- distributiv

Es gilt $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$:
- $m \neq 0 \Rightarrow m + n \neq 0$
- $m \cdot n = 0 \Rightarrow n = 0$ oder $m = 0$
- $m + k = n + k \Rightarrow m = n$ (Kürzungsregel der Addition)
- $m \cdot k = n \cdot k \Rightarrow m = n$ (Kürzungsregel der Multiplikation)

Ordnung auf $\mathbb{N}$: Relation $R := \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n\}$
wobei $m \leq n \iff n = m + k$ für ein $k \in \mathbb{N}$

Satz 3.6
Es gilt auf $\mathbb{N}$:
- $m \leq n \Rightarrow \exists! k \in \mathbb{N} : n = m + k$, nenne $n - m := k$ (Differenz)
- Relation R (bzw. $\leq$) ist eine Totalordnung auf $\mathbb{N}$
- Ordnung $\leq$ ist verträglich mit der Addition und Multiplikation

Beweis

Sei $n = m + k = m + k' \Rightarrow k = k'$

Sei $n = n + 0 \Rightarrow n \leq n \Rightarrow$ reflexiv
sei $k \leq m, m \leq n \Rightarrow \exists l, j : m = k + l, n = m + j = (k + l) + j = k + (l + j) \Rightarrow k \leq n \Rightarrow$ transitiv
sei nun $m \leq nundn \leq m \Rightarrow n = m + j = n + l + j \Rightarrow 0 = l + j \Rightarrow j = 0 \Rightarrow n = m \Rightarrow$ antisymmetrisch
Totalordnung, d.h. $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \leq n$ oder $n \leq m$
IA: $m = 0$ wegen $0 = n + 0$ folgt $0 \leq n \forall n$
IS: gelte $m \leq n$ oder $n \leq m$ mit festem m und $\forall n \in \mathbb{N}$, dann
falls $n \leq m \Rightarrow n \leq m + 1$
falls $m < n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = m + (k + 1) = (m+)1 + k \Rightarrow m + 1 \leq n$
$m \leq n$ oder $n \leq m$ gilt für $m + 1$ und $\forall n \in \mathbb{N}$, also $\forall n, m \in \mathbb{N}$

sei $m \leq n \Rightarrow \exists j : n = m + j \Rightarrow n + k = m + j + k \Rightarrow m + k \leq n + k$ ■

Kapitel 4

Ganze und rationale Zahlen

Frage: Existiert eine natürliche Zahl x mit $n = n' + x$ für ein gegebenes n und n'?
Antwort: Das geht nur falls $n \leq n'$, dann ist $x = n - n'$
Ziel: Zahlenbereichserweiterung, sodass die Gleichung immer lösbar ist. Ordne jedem Paar $(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine neue Zahl als Lösung zu. Gewisse Paare liefern die gleiche Lösung, z.B. $(6, 4), (5, 3), (7, 5)$. Diese müssen mittels Relation identifiziert werden.

$\mathbb{Q} := \{(n_1, n_1'), (n_2, n_2') \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid n_1 + n_2' = n_1' + n_2\}$

Definition 4.1
$\mathbb{Q}$ ist die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Beispiel
$(5, 3) \sim (6, 4) \sim (7, 5)$ bzw. $(5 - 3) \sim (6 - 4) \sim (7 - 5)$
$(3, 6) \sim (5, 8)$ bzw. $(3 - 6) \sim (5 - 8)$

Beweis
offenbar $((n, n'), (n, n')) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ reflexiv
falls $((n_1, n_1'), (n_2, n_2')) \in \mathbb{Q} \Rightarrow (n_2, n_2'), (n_1, n_1')) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ symmetrisch
sei $((n_1, n_1'), (n_2, n_2')) \in \mathbb{Q}$ und $((n_2, n_2'), (n_3, n_3')) \in \mathbb{Q} \Rightarrow n_1 + n_2' = n_1' + n_2, n_2 + n_3' = n_2' + n_3 \Rightarrow n_1 + n_3' = n_1' + n_3 \Rightarrow ((n_1, n_1'), (n_3, n_3')) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ transitiv. ■

setze $\overline{\mathbb{Z}} := \{[(n, n')] \mid n, n' \in \mathbb{N}\}$ Menge der ganzen Zahlen, [ganze Zahl]
Kurzschreibweise: $\overline{m} := [(m, m')]$ oder $\overline{n} := [(n, n')]$

Satz 4.2
Sei $[(n, n')] \in \overline{\mathbb{Z}}$. Dann existiert eindeutig $n* \in \mathbb{N}$ mit $(n*, 0) \in [(n, n')]$, falls $n \geq n'$ bzw. $(0, n*) \in [(n, n')]$ falls $n < n'$.

Beweis
$n \geq n' \Rightarrow \exists! n* \in \mathbb{N} : n = n' + n* \Rightarrow (n*, 0) \sim (n, n')$
$n < n' \Rightarrow \exists! n* \in \mathbb{N} : n + n* = n' \Rightarrow (0, n*) \sim (n, n')$ ■

Frage: Was hat $\overline{\mathbb{Z}}$ mit $\mathbb{Z}$ zu tun?
Antwort: identifiziere $(n, 0)$ bzw. $(n - 0)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und identifiziere $(0, n)$ bzw. $(0 - n)$ mit Symbol $-n$

$\Rightarrow$ ganze Zahlen kann man eindeutig den Elementen folgender Mengen zuordnen: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{(-n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Rechenoperationen auf $\overline{\mathbb{Z}}$:

- Addition: $\overline{m} + \overline{n} = [(m, m')] + [(n, n')] = [(m + n, m' + n')]$
- Multiplikation: $\overline{m} \cdot \overline{n} = [(m, m')] \cdot [(n, n')] = [(mn + m'n', mn' + m'n)]$

Satz 4.3
Addition und Multiplikation sind eindeutig definiert, d.h. unabhängig von Repräsentant bezüglich $\mathbb{Q}$

Beweis
Sei $(m_1, m_1') \sim (m_2, m_2'), (n_1, n_1') \sim (n_2, n_2')$
$\Rightarrow m_1 + m_2' = m_1' + m_2, n_1 + n_2' = n_1' + n_2$
$\Rightarrow m_1 + n_1 + m_2' + n_2' = m_1' + n_1' + m_2 + n_2$
$\Rightarrow (m_1, m_1') + (n_1, n_1') \sim (m_2, m_2') + (n_2, n_2')$ ■

Satz 4.4
Für Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ gilt $\forall\, \overline{m}, \overline{n} \in \overline{\mathbb{Z}}$:

1. es existiert eine neutrales Element: $0 := [(0, 0)]$, $1 := [(1, 0)]$
2. jeweils kommutativ, assoziativ und gemeinsam distributiv
3. $-\overline{n} := [(n', n)] \in \mathbb{Z}$ ist invers bezüglich der Addition zu $[(n, n')] = \overline{n}$
4. $(-1) \cdot \overline{n} = -\overline{n}$
5. $\overline{m} \cdot \overline{n} = 0 \iff \overline{m} = 0 \vee \overline{n} = 0$

Beweis

1) offenbar $\overline{n} + 0 = 0 + \overline{n} = \overline{n}$ und $\overline{n} \cdot 1 = 1 \cdot \overline{n} = \overline{n}$
2) Fleißarbeit $\rightarrow$ SeSt
3) offenbar $\overline{n} + (-\overline{n}) = (-\overline{n}) + \overline{n} = [(n + n', m + m')] = 0$
4) $(-1) \cdot \overline{n} = [(0, 1)] \cdot [n, n'] = [n', n] = -\overline{n}$
5) ÜA ■

Satz 4.5
Für $\overline{m}, \overline{n} \in \mathbb{Z}$ hat die Gleichung $\overline{m} = \overline{n} + \overline{x}$ die Lösung $\overline{x} = \overline{m} + (-\overline{n})$.

Ordnung auf $\overline{\mathbb{Z}}$: betrachte Relation $R := \{(\overline{m}, \overline{n}) \in \overline{\mathbb{Z}} \times \overline{\mathbb{Z}} \mid \overline{m} \leq \overline{n}\}$

Satz 4.6
R ist Totalordnung auf $\mathbb{Z}$ und verträglich mit Addition und Multiplikation

Ordnung verträglich mit Addition: $\overline{n} < 0 \iff 0 = \overline{n} + (-\overline{n}) < -\overline{n} = (-1) \cdot \overline{n}$

beachte: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{(-n) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

Satz 4.7
$\mathbb{Z}$ und $\overline{\mathbb{Z}}$ sind isomorph bezüglich Addition, Multiplikation und Ordnung.

Beweis
betrachte Abbildung $I : \mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Z}}$ mit $I(k) := [(k, 0)]$ und $I(-k) := [(0, k)] \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ÜA ■

Notation: verwende stets $\mathbb{Z}$, schreibe $m, n, ...$ statt $\overline{m}, \overline{n}, ...$ für ganze Zahlen in $\mathbb{Z}$

Frage: Existiert eine ganze Zahl mit $n = n' \cdot x$ für $n, n' \in \mathbb{Z}, n' \neq 0$
Antwort: im Allgemeinen nicht **Ziel:** Zahlbereichserweiterung analog zu $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
ordne jedem Paar $(n, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ neue Zahl x zu
schreibe (n, n') auch als $\frac{n}{n'}$ oder $n : n'$
identifiziere Paare wie z.B. $\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}$ durch Relation
$\mathbb{Q} := (\frac{n_1}{n_2'}, \frac{n_2}{n_2'}) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}) \mid n_1 n_2' = n_1' n_2$
$\Rightarrow \mathbb{Q}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$

setze $\mathbb{Q} := [\frac{n}{n'}] \mid (n, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$ Menge der rationalen Zahlen
beachte: unendlich viele Symbole $\frac{n}{n'}$ für gleiche Zahl $[\frac{n}{n'}]$
wir schreiben später $\frac{n}{n'}$ für die Zahl $[\frac{n}{n'}]$
offenbar gilt die Kürzungsregel: $[\frac{n}{n'}] = [\frac{kn}{kn'}] \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$

Rechenoperationen auf $\mathbb{Q}$:

- Addition: $[\frac{m}{m'}] + [\frac{n}{n'}] := [\frac{mn' + m'n}{m'n'}]$
- Multiplikation: $[\frac{m}{m'}] \cdot [\frac{n}{n'}] := [\frac{mn}{m'n'}]$

Satz 4.8
Mit Addition und Multiplikation ist $\mathbb{Q}$ ein Körper mit
neutralen Elementen: $0 = [\frac{0_\mathbb{Z}}{1_\mathbb{Z}}] = [\frac{0_\mathbb{Z}}{n_\mathbb{Z}}], 1 := [\frac{1_\mathbb{Z}}{1_\mathbb{Z}}] = [\frac{n}{n}] \neq 0$
inversen Elementen: $-[\frac{n}{n'}] = [\frac{-n}{n}], [\frac{n}{n'}]^{-1} = [\frac{n'}{n}]$

Ordnung auf $\mathbb{Q}$: für $[\frac{n}{n'}] \in \mathbb{Q}$ kann man stets $n' > 0$ annehmen
Realtion: $R := \{([\frac{m}{m'}], [\frac{n}{n'}]) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid mn' \leq m'n, m', n' > 0\}$ gibt Ordnung $\leq$

Satz 4.9
$\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper (d.h. $\leq$ ist eine Totalordnung undv erträglich mit Addition und Multiplikation).

Notation: schreibe vereinfacht nur noch $\frac{n}{n'}$ für die Zahl $[\frac{n}{n'}] \in \mathbb{Q}$ und verwende auch Symbole $p, q, ...$ für Elemente aus $\mathbb{Q}$

Gleichung $p \cdot x = q$ hat stets eindeutige Lösung: $x = q \cdot p^{-1}$ $(p, q \in \mathbb{Q}, p \neq 0)$

Frage: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$? **Antwort:** Sei $\mathbb{Z}_\mathbb{Q} := \frac{n}{1} \in \mathbb{Q} \mid n\mathbb{Z}, I : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\mathbb{Q}$ mit $I(n) = \frac{n}{1}$
$\Rightarrow I$ ist Isomorphismus bezüglich Addition, Multiplikation und Ordnung.
In diesem Sinn: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Folgerung 4.10
Körper $\mathbb{Q}$ ist archimedisch angeordnet, d.h. für alle $q \in \mathbb{Q} \exists n \in \mathbb{N} : q <_\mathbb{Q} n$.

Beweis
Sei $q = [\frac{k}{k'}]$ mit $k' > 0$
$n := 0$ falls $k < 0 \Rightarrow q = [\frac{k}{k'}] < [\frac{0}{k'}] = 0 = n$
$n := k + 1$ falls $k \geq 0 \Rightarrow q = [\frac{k}{k'}] < [\frac{k+1}{k'}] = n$ $\blacksquare$

Kapitel 5

Reelle Zahlen

Frage: Frage: algebraische Gleichung $a_0 + a_1 x + \cdots + a_x^k = 0$ ($a_j \in \mathbb{Z}$)
i.A nur für $k = 1$ lösbar (d.h. lin. Gl.)

Beispiel 5.1
$x^2 - 2 = 0$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$. Angenommen es existiert eine Lösung $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, o.B.d.A. höchstens eine der Zahlen m, n gerade $\Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m$ gerade $\overset{m=2k}{\Rightarrow} 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow n$ gerade $\Rightarrow \lightning$. ■

Offenbar $1,4^2 < 2 < 1,5^2$, $1,41^2 < 2 < 1,42^2$, ..., falls es $\sqrt{2}$ gibt, kann diese in $\mathbb{Q}$ beliebig genau approximiert werden. Es folgt, dass $\mathbb{Q}$ anscheinend „Lücken“ hat. **Fläche auf dem Einheitskreis** kann durch rationale Zahlen beliebig genau approximiert werden. Falls „Flächenzahl“ π existiert, ist das **nicht** Lösung einer algebraischen Gleichung (Lindemann 1882).

Ziel: Konstruktion eines angeordneten Körpers, der diese Lücken füllt.

5.1 Struktur von archimedisch angeordneten Körper (allg.)

$\mathbb{K}$ sei ein (bel.) Körper mit bel. Elementen $0, 1$ bzw. $0_K, 1_K$.

Satz 5.2
Sei $\mathbb{K}$ Körper. Dann gilt $\forall a, b \in \mathbb{K}$:
1) $0, 1, (-a), b^{-1}$ sind eindeutig bestimmt
2) $(-0) = 0$, $1^{-1} = 1$
3) $-(-a) = a$, $(b^{-1})^{-1} = b$ $(b \neq 0)$
4) $-(a + b) = (-a) + (-b)$, $(a^{-1}b^{-1}) = (a^{-1}b^{-1})$ $(a, \neq 0)$
5) $-a = (-1) \cdot a$, $(-a)(-b) = ab$, $a \cdot 0 = 0$
6) $ab = 0 \iff a = 0$ oder $b = 0$
7) $a + x = b$ hat eindeutige Lösung $x = b + (-a) =: b - a$ Differenz
   $ax = b$ hat eindeutige Lösung $x = a^{-1}b := \frac{b}{a}$ Quotient

Beweis
1) vgl. lin. Algebra
2) betrachte $0 + 0 = 0$ bzw. $1 \cdot 1 = 1$
3) $(-a) + a = 0 \overset{komm}{\Rightarrow} a = -(-a)$ Rest analog
4) $a + b = ((-a) + (-b)) \Rightarrow$ Behauptung, Addition und Multiplikation analog

5) $a \cdot 0 = 0$ vgl. lin. Algebra
$1a + (-1)a = 0 \Leftrightarrow (1-1)a = 0 \Rightarrow (-1)a = -1$, $(-a)(-b) = (-1)(-a)b \overset{3,5}{=} ab$
6) $(\Leftarrow)$: nach 5)
$(\Rightarrow)$ sei $a \neq 0$ (sonst klar) $\Rightarrow 0 = a^{-1} \cdot 0 \overset{ab=0}{=} a^{-1}ab = b \Rightarrow$ Beh.
7) $a + x = b \Leftrightarrow x = (-a) + a \neq x = (-a) + b$, für $ax = b$ analog ■

Setze für alle $a, \ldots a_k \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

Vielfache $n \cdot a$ (kein Produkt in $\mathbb{K}$!)

Potenzen $a^n = \prod_{k=1}^{n} a_k$für $n \in N_{\geq 1}$ damit $(-n)a := n(-a)$, $0_{\mathbb{N}}a = 0_{\mathbb{N}}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$
$a^{-n} = (a^{-}1)^n$, $a^{0_{\mathbb{N}}} := 1_{\mathbb{K}}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, a \neq 0$
beachte : $0^0 = (0_{\mathbb{N}})^{0_{\mathbb{N}}}$ *nicht* definiert!

Rechenregeln $\forall\, a, b \in \mathbb{K}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ (sofern Potenz definiert)

Kapitel 6

Komplexe Zahlen (kurzer Überblick)

Problem: $x^2 = -1$ keine Lösung in $\mathbb{R} \Rightarrow$ Körpererweiterung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$
Betrachte Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
mit Addition und Multiplikation:
$(x, x^{'}) + (y, y^{'}) = (x + y, x^{'} + y^{'})$
$(x, x^{'}) \cdot (y, y^{'}) = (xy - x^{'}y^{'}, xy^{'} + x^{'}y)$
$\mathbb{C}$ ist ein Körper mit (vgl. lin Algebra):

$0_{\mathbb{K}} = (0, 0)$, $1_{\mathbb{K}} = (1, 0)$, $-(x, y) = (-x, -y)$ and $(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$
mit imaginärer Einheit $\iota = (0, 1)$
$z = x + \iota y$ statt $z = (x, y)$ mit $x := \mathrm{Re}(z)$ Realteil von z, $y := \mathrm{Im}(z)$ Imaginärteil von z
komplexe Zahl $z = x + \iota y$ wird mit reeller Zahl $x \in \mathbb{R}$ identifiziert
offenbar $\iota^2 = (-1, 0) = -1$, d.h. $z = \iota \in \mathbb{C}$ und löst die Gleichung $z^2 = -1$ (nicht eindeutig, auch $(-\iota)^2 = -1$)
Betrag $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ (ist Betrag/Länge des Vektors (x, y))
es gilt:

a) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \mathrm{Im}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2\iota}$
b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
c) $|z| = 0 \iff z = 0$
d) $|\overline{z}| = |z|$
e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
f) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecks-Ungleichung: Mikoswski-Ungleichung)

Beweis
SeSt ■

Teil III

Metrische Räume und Konvergenz

Konvergenz: grundlegender Begriff in Analysis

Kapitel 7

Grundlegen Ungleichungen

Satz 7.1 (Geometrisches und arithmetisches Mittel)
Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$
$\Rightarrow \underset{\text{geoemtrisches Mittel}}{\sqrt[n]{x_1, \ldots, x_n}} = \underset{\text{arithmetisches Mittel}}{\frac{x_1, \ldots, x_n}{n}}$
Gleichheit gdw $x_1 = \cdots = x_n$.

Beweis
Zeige zunächst mit vollständiger Induktion

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n, \text{ mit } x_1 = \cdots = x_n \tag{7.1}$$

- (IA) $n = 1$ klar
- (IS) (7.1) gelte für n, zeige (7.1) für $n+1$ d.h. $\prod_{i=1}^{n+1} = 1$, falls alle $x_i = 1 \Rightarrow$ Behauptung Sonst oBdA $x_n < 1$, $x_{n+1} > 1$:

mit $y_n := x_n x_{n+1}$ gilt $x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot y_n = 1$

$$\Rightarrow x_1 + \dots + x_{n+1} = \underbrace{x_1 + \dots + x_{n-1}}_{\geq \text{(IV)}} + y_n - y_n + x_n + x_{n+1}$$

$$\geq n + \underbrace{(x_{n+1} - 1)}_{>n} \underbrace{(1 - x_n)}_{>n}$$

$$\Rightarrow (7.1) \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{vollständige Induktion}$$

allgemein sei nun $g := \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{g} = 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{g} \geq n \Rightarrow \text{ Behauptung} \qquad \text{Satz 7.1}$$

Aussage über Gleichheit nach nochmaliger Durchsicht.

■

Satz 7.2 (allg. Bernoulli-Ungleichung)
Seien $\alpha, x \in \mathbb{R}$. Dann

$$1)\ (1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \ \forall x > -1, \alpha > 1$$
$$2)\ (1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \ \forall x \geq -1, 0 < \alpha < 1$$

Beweis

2) Sei $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_{<1}$, d.h. $m \leq n$

$$\Rightarrow (1+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1+x)^m \cdot 1^{n-m}} \qquad \text{Definition}$$
$$\leq \frac{m(1+x) + (n-m) \cdot 1}{n}$$
$$= \frac{n + mx}{n} = 1 + \frac{m}{n} x, \text{ für } \alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \text{ Behauptung}$$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ angenommen $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$ ($x \neq 0$ sonst klar!)

$$\Rightarrow \exists \in \mathbb{Q}_{<1} \begin{cases} x > 0 & \alpha < q < \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \\ x < 0 & \alpha < q \end{cases} \qquad \text{Satz 5.8}$$

$$\Rightarrow 1 + qx < (1+x)^\alpha \leq (1+x)^q \Rightarrow \lightning \Rightarrow \text{ Behauptung} \qquad \text{Satz 5.20}$$

1) Sei $1 + \alpha x \geq 0$, sonst klar

$$\Rightarrow \alpha x \geq -1 \overset{2)}{\Rightarrow} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \text{mit 2)}$$
$$\geq 1 + \frac{1}{\alpha} \alpha x = 1 + x$$
$$\Rightarrow \text{ Behauptung und Gleichheit ist Selbststudium.}$$

Satz 7.3 (Young'sche Ungleichung)
Sei $p, q \in \mathbb{R}, p, q > 1$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ $\forall a, b \geq 0$ (Gleichheit gdw $a^p = b^q$)
Spezialfall($p = q = 2$): $ab \geq \frac{a^2 + b^2}{2}$ gilt $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (folgt direkt $0 \leq (a-b)^2$)

Beweis

Sei $a, b > 0$ (sonst klar!)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \Big(\frac{b^q}{a^p}\Big)^{\frac{p}{q}} = \Big(1 + \big(\frac{b^q}{a^p} - 1\big)\Big)^{\frac{p}{q}} \\
&\leq 1 + \frac{1}{q}\Big(\frac{b^q}{a^p} - 1\Big) && \text{Bernoulli-Ungleichung} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{q}\frac{b^q}{a^p} - \frac{1}{q} \\
&\Rightarrow a^p \frac{b^{\frac{p}{q}}}{a} = a^{p(1-\frac{1}{q})} b = ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} && \cdot a^p
\end{aligned}$$

■

Satz 7.4 (Höldersche Ungleichung)
Sei $p, q \in \mathbb{R};\ p, q > 0$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \big(\sum_{i=1}^n |x_i|\big)^{\frac{1}{p}} \big(\sum_{i=1}^n |y_i|\big)^{\frac{1}{p}}\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Bemerkung

1) Ungleichung gilt auch für $x_i, y_i \in \mathbb{C}$ (nur Beträge gehen ein)
2) für $p = q = 2$ heißt Ungleichung Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Gleichheit gdw $\exists x \in \mathbb{R} x_i = \alpha y_i$ oder $y_i = \alpha x_i\ \forall i$)

Beweis
Faktoren rechts seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ d.h.

$$\mathcal{X}^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{1}{p}}, \mathcal{Y}^p = \sum_{i=1}^n |y_i|^{\frac{1}{q}}, \text{ falls } \mathcal{X} = 0$$

$$\Rightarrow x_i = 0\ \forall i \Rightarrow \text{ Behauptung, analog für } \mathcal{Y} = 0$$

Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y} > 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{|x_i y_i|}{\mathcal{X}\mathcal{Y}} \leq \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\mathcal{X}^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\mathcal{Y}^p} \forall i && \text{Satz 7.3} \\
&\Rightarrow \frac{1}{\mathcal{X}\mathcal{Y}} \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \frac{1}{p}\frac{\mathcal{X}^p}{\mathcal{X}^p} + \frac{1}{q}\frac{\mathcal{Y}^p}{\mathcal{Y}^p} = 1 \Rightarrow \text{ Behauptung} && \cdot \mathcal{X}\mathcal{Y}
\end{aligned}$$

■

Satz 7.5 (Minkowski-Ungleichung)
Sei $p \in \mathbb{R}, p \geq 1 \Rightarrow \big(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} \leq \big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} + \big(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} \forall x, y \in \mathbb{R}$

Bemerkung

1) Ungleichung gilt auch für $x_i, y_i \in \mathbb{C}$ (vgl. Beweis)
2) ist Δ-Ungleichung für p-Normen (vgl. später)

Beweis
$p = 1$ Beh. folgt aus Δ-Ungleichung $|x_i + y_i| \overset{Satz 5.5}{\leq} |x_i| + |y_i| \forall i$
$p > 1$ sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $z_i := |x_i + y_i|^{p-1} \forall i$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^p &= \sum_{i=1}^{n} |z_i|^q && q = \frac{p}{p-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} | + x_i + y_i| \cdot |z_i|^q \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i| && \Delta\text{-Ungleichung} \\
&\leq \big(\mathcal{X} + \mathcal{Y}\big)\big(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^q\big)^{\frac{1}{p}} && \text{Hölder-Ungleichung} \\
&= \big(\mathcal{X} + \mathcal{Y}\big)\mathcal{S}^{\frac{p}{q}} \\
&\Rightarrow \text{ Behauptung} && p = \frac{p}{q} + 1
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Kapitel 8

Metrische und normierte Räume

8.1 Metrische Räume

Definition (Metrik)
Sei X Menge und Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt <u>Metrik</u> auf X falls $\forall x, y, z \in X$
a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
b) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Δ-Ungleichung)
(X, d) heißt metrischer Raum.

Man hat $d(x, y) = 0 \forall x, y \in X$, dann

$$\begin{aligned} 0 = d(x, x) &= d(x, y) + d(y, x) && \text{a), c)} \\ &= 2d(x, y) \forall x, y && \text{b)} \end{aligned}$$

nach b), c)

$$|d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, y) \forall x, y, z \in X \tag{8.1}$$

Beispiel 8.1 (Standardmetrik)
$d(x, y) := |x - y|$ ist Metrik auf $X = \mathbb{R}$ bzw. $X = \mathbb{C}$

Eig. a), b), c) klar

$$\begin{aligned} \text{c) } |x - z| &|(x + y) - (x - z)| \\ &\leq |x + y| + |y + z| && \Delta\text{-Ungleichung für } \mathbb{R}, \mathbb{C}\text{-Betrag} \end{aligned}$$

Beispiel 8.2 (diskrete Metrik)
Diskrete Metrik auf beliebiger Menge X.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{x = y} \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

ist offenbar eine Metrik.

Beispiel 8.3 (induzierte Metrik)
Sei (X, d) metrischer Raum, $Y \subset X$
$\Rightarrow (Y, d)$ ist metrischer Raum mit *induzierter Metrik* $\tilde{d}(x, y) := d(x, y) \forall x, y \in Y$

8.2 Normierte Räume

wichtiger Spezialfall: normierte Vektorraum(VR)

Definition (Norm)
Sei X Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.
Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ heißt *Norm* auf X falls $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
a) $\|x\| = \Leftrightarrow x = 0$
b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (Homogenität)
c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Δ-Ungleichung)
$(X, \|\cdot\|)$ heißt *normierter Raum*.

$$\begin{aligned} &\text{Metrik} \leftarrow \text{Norm} \\ &\text{Abbildung} \not\rightarrow \text{VR, Abstand } x, 0 \\ &\text{man hat } \|x\| \leq 0 \forall x \in X, \text{ denn } 0 = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\| \qquad \text{a), c), b)} \end{aligned}$$

Analog Satz 5.5 folgt

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \forall x, y \in X \tag{8.2}$$

$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *Halbraum* falls nur b), c) gelten analog Beispiel 8.1 folgt.

Satz 8.4
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, dann X metrischer Raum mit Metrik $d(x, y) := \|x - y\| \forall x, y \in X$.

Beispiel 8.5
$X = \mathbb{R}^n$ ist Vektorraum über $\mathbb{R}$, Elemente in $\mathbb{R}^n$
$x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$,
man hat unter anderem folgende Normen auf $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} p\text{-Norm} : |x|_p &:= \left(\sum_{i=0}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < \infty) \\ \text{Maximum-Norm} : |x|_p &:= \max\{|x_i| \mid i = 1, \ldots n\} \\ \text{a), b) jeweils klar, c) für } &\begin{cases} |\cdot|_p & \text{ist Minkowski-Ungleichung} \\ |\cdot|_\infty & \text{wegen } \ |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \forall i \end{cases} \end{aligned}$$

Standardnorm in $\mathbb{R}^n$: $|\cdot| = |\cdot|_{p=2}$ heißt *eukldische Norm*.

Definition (Skalarprodukt)
$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n$ heißt *Skalarprodukt* (inneres Produkt) von $x, y \in \mathbb{R}^n$ offenbar $\langle x, y \rangle = |x|_2 \forall x \in$ *comp* nur für euklidische Räume gibt es Skalarprodukt (nur für euklische Norm!).
Man hat $|\langle x, y \rangle| \leq |x|_2 \cdot |y|_2 \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ Cauchy-Schwarsche Ungleichung (CSU), denn

$$\begin{aligned} |\langle x, z \rangle| = |\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| && \Delta\text{-Ungleichung in } \mathbb{R} \\ &\leq |x|_2 \cdot |y|_2 && \text{Hölder-Ungleichung mit } p = q = 2 \end{aligned}$$

Beispiel 8.6
$X = \mathbb{C}^n$ ist Vektorraum über $\mathbb{C}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, x_i \in \mathbb{C}$
analog zum Bsp. 8.5 sind $|\cdot|_p$ und $|\cdot|_\infty$ Normen auf $\mathbb{C}^n$
$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i \forall x_i, y_i \in \mathbb{C}$ heißt *Skalarprodukt* von $x, y \in \mathbb{C}^n$ (beachte $\langle x, y\rangle \in \mathbb{C}, \langle x, x\rangle = |x|^2$)
$\overset{\text{wie oben}}{\Rightarrow} |\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y| \forall x, y \in \mathbb{C}^n$

Definition (Orthogonalität)
$x, y \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ heißen *orthogonal* falls $\langle x, y\rangle = 0$

Beispiel 8.7
Sei M beliebige Menge, $f : M \to \mathbb{R}$
$\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in M\}$. Dann ist

$$\mathcal{B}(M) := \{f : M \to \mathbb{R} \mid \|f\| < \infty\}$$

Menge der beschränkte Funktionen auf M
$\mathcal{B}(M)$ ist Vektorraum auf $\mathbb{R}$

a) $((f + g)(x) = f(x) + g(x)$
b) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
c) Nullelement ist Nullfunktion $f(x) = 0 \forall x \in M$

$\|\cdot\|$ ist Norm auf $\mathcal{B}(M)$, denn a), b) klar

$$\begin{aligned}
\|f + g\| &:= \sup\{|f(x) + g(x)| \mid x \in M\} \\
&\leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| \mid x \in M\} && \Delta\text{-Ungleichung in } \mathbb{R} \\
&\leq \sup\{|f(x)| \mid x \in M\} + \sup\{|g(x)| \mid x \in M\} && \text{Übungsaufgabe} \\
&= \|f\| + \|g\|
\end{aligned}$$

Beispiel 8.8
$\|x\| := |x_1|$ auf $X = \mathbb{R}^n \to$ kein Nullvektor "nur" Halbnorm (später wichtige Halbnorm in Integraltheorie). Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ auf X heißen äquivalent falls

$$\exists \alpha, \beta > 0 \ \alpha|x|_1 \leq |x|_2 \leq \beta|x|_1 \qquad \forall x \in X$$

(Indizes entsprechen hier keinem p, sondern es sind hier nur beliebige unterschiedliche Normen gemeint.)

Beispiel 8.9

$$|x|_\infty \leq |x|_p \leq \sqrt[p]{n}|x|_\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ p \geq 1$$

$|\cdot|_\infty$ und $|\cdot|_\infty$ sind äquivalent $\forall p \geq 1$

Beweis

$$|x|_\infty = \left(\max\{|x_j|, | \dots\}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |x|_p$$

$$|x|_\infty \leq \left(n \cdot \max\{|x_j|, | \dots\}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{n}|x|_\infty$$

■

Folgerung 8.10
$|\cdot|_p,\ |\cdot|_q$ äquivalent auf $\mathbb{R}^n$ $\forall p, q \geq 1$ (siehe Aufgabe 45b))

8.3 Begriffe im metrischen Raum

Definition (Kugel im metrischen Raum)
Sei (X, d) metrischer Raum.

- $B_r(a) := \{a \in X \mid d(a, x) < r\}$ heißt offene Kugel um a mit Radius $r > 0$
- $B_r[a] := \overline{B}_r(a) = \{a \in X \mid d(a, x) \leq r\}$ heißt abgeschlossene *Kugel* um a mit Radius $r > 0$

Hinweis: muss keine übliche Kugel sein z.B. $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(0, x) < 1\}$ ist Quadrat $B_r(0)$.

Definition

- Menge $M \subset X$ *offen* falls $\forall x \in M\ \exists \epsilon > 0\ B_\epsilon(x) \subset M$
- Menge M offen falls $X \setminus M$ abgeschlossen
- $U \subset X$ Umgebung von $M \subset X$ falls $\exists V \subset X$ offen mit $M \subset V \subset U$
- $x \in M$ *innerer Punkt* von M falls $\exists \epsilon > 0\colon B_\epsilon(x) \subset M$
- $x \in M$ *äußerer Punkt* von M falls $\exists \epsilon > 0\colon B_\epsilon(x) \subset X \setminus M$
- $x \in X$ *Randpunkt* von M falls x weder innerer noch äußerer Punkt ist
- $\operatorname{int} M$:= Menge der *inneren* Punkte von M heißen inneres von M
- $\operatorname{ext} M$:= Menge der *äußeren* Punkte von M heißen äußeres von M
- ∂M := Menge der Randpunkte von M heißt *Rand* von M
- $\operatorname{cl} M := \overline{M} := \overline{\operatorname{int} M} \cup \partial M$ heißt Abschluss von M (closure)
- $M \subset X$ *beschränkt* falls $\exists a \in X, r > 0\ M \subset B_r(a)$
- $x \in X$ *Häufungskt (Hp)* von M falls $\forall \epsilon > 0$ enhält $B_\epsilon(x)$ *unendlich viele* Elemente aus M
- $x \in M$ *isolierter* Punkt von M falls x kein Hp von M

Beispiel 8.11

a) Sei $X = \mathbb{R}$ mit $d(x, y) = |x - y|$
   - $(a, b), (-\infty, a)$ offen
   - $[a, b], (-\infty, b]$ abgeschlossen
   - $[a, b)$ weder abgeschlossen noch offen, aber beschränkt

   Es gilt:
   - $\operatorname{int}(a, b) = \operatorname{int}[a, b] = (a, b)$

- $\operatorname{ext}(a, b) = \operatorname{ext}[a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$
- $\partial(a, b) = \partial[a, b] = \{a, b\}$
- $\operatorname{cl}(a, b) = \operatorname{cl}[a, b] = [a, b]$

Speziell:

- $\mathbb{Q}$ weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$, da $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset, \operatorname{ext}\mathbb{Q} = \emptyset, \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R} \setminus \emptyset$ ist offen
- $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossen und nicht beschränkt
- $[0, 3]$ ist Umgebung von $[1, 2], B_r(a)$ ist Umgebung von a (eigentlich $\{a\}$)
- a ist Hp von $(a, b), [a, b]$ für $a < b$, aber nicht von $[a, a]$ aller $a \in \mathbb{R}$ sind Hp von $\mathbb{Q}$

b) für $X = \mathbb{R}$ mit diskreter Metrik: $x \in M \Rightarrow B_{\frac{1}{2}}(x)\{x\} \Rightarrow$ alle $M \subset \mathbb{R}$ offen und abgeschlossen

c) für $X = \mathbb{R}^n$ mit $|\cdot|$ vgl. Übungsaufgabe

Lemma 8.12
Sei (X, d) metrischer Raum. Dann

1) $B_r(a)$ offene Menge $\forall \epsilon > 0, a \in X$
2) $M \subset X$ beschränkt $\Rightarrow \forall a \in X \exists r > 0 \colon M \subset B_r(a)$

Beweis

1) Sei $b \in B_r(a), \epsilon := r - a - d(a, b) > 0$, dann gilt für beliebige $x \in B_\epsilon(b)$

$$\begin{aligned} d(a, x) &\leq d(a, b) + d(b, x) && \Delta\text{-Ungleichung mit } b \\ &< d(a, b) + r - d(a, b) \\ &= r \Rightarrow B_\epsilon(b) \subset B_\epsilon(a) \Rightarrow \text{ Behauptung} \end{aligned}$$

2) Sei $M \subset B_\rho(b), a \in X$ beliebig, $r := \rho + d(a, b), m \in M$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(m, a) &\leq d(m, b) + d(b, a) \\ &< \rho + d(b, a) = r \Rightarrow m \in B_r(a) \end{aligned}$$

■

Satz 8.13 (Offene Kugeln sind Topologie auf X)
Sei (X, d) metrische Raum, $\tau := \{U \subset X \mid \text{ offen}\}$. Dann

1) $X, \emptyset \in \tau$
2) $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$ falls $U_i \in \tau$ für $i = 1, \ldots, n$ (endlich viele)
3) $\bigcup_{U \in \tau'} U \in \tau$ falls $\tau' \subset \tau$ (beliebig viele)

Beweis

1) X offen, da stets $B_\epsilon(x) \subset X$, Definition "offen" wahr für $\emptyset$
2) Sei $X \in \bigcap_{i=0}^n U_i \Rightarrow \exists \epsilon_i > 0 \colon B_{\epsilon_i}(x) \subset U_i \forall i, \epsilon = \min\{\epsilon_1, \ldots \epsilon_n\}$
   $\Rightarrow B_\epsilon(x) \in \bigcap_{i=0}^n U_i \Rightarrow$ Behauptung
3) Sei $x \in \bigcup_{U \in \tau'} U \Rightarrow \exists \tilde{U} \in \tau' \colon x \in \tilde{U} \overset{\tilde{U} \text{ offen}}{\Rightarrow} \exists \epsilon > 0 \colon B_\epsilon(x) \subset \tilde{U} \in \bigcup_{U \in \tau'} U \Rightarrow$ Behauptung.

■

Hinweis: Durchschnitt beliebiger vieler offener Menge ist nicht offen!

Beispiel
$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) = [0,1]$

Komplementbildung im Satz 8.13 liefert:

Folgerung 8.14 (Abgeschlossene Kugeln sind Topologie auf X)
Sei (X, d) metrischer Raum und $\sigma := \{V \subset X \mid V \text{ abgeschlossen}\}$. Dann
1) $X, \emptyset \in \sigma$
2) $\bigcup_{i=1}^{n} U_i \in \sigma$ falls $U_i \in \sigma$ für $i = 1, \ldots, n$ (endlich viele)
3) $\bigcap_{U\in\sigma'} U \in \sigma$ falls $\sigma' \subset \sigma$ (beliebig viele)

Definition (Topologie)
Sei X Menge und τ Menge von Teilmengen von X (d.h. $\tau \in \mathcal{P}(X)$)
τ ist Topologie und (X, τ) topologischer Raum, falls 1), 2), 3) aus Satz 8.13 gelten.

Bemerkung
Menge $U \in \tau$ heißen dann offen (per Definition!). Folglich oben definierte offene Mengen in metrischen Räumen bilden ein Spezialfall für eine Topologie. Beachte! In metrischem Raum (X, d) ist $\tilde{\tau} = \{\emptyset, X\}$ stets eine Topologie für beliebige Menge X).

Satz 8.15
Seinen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ äquivalente Normen auf X und $U \subset X$. Dann
U offen bezüglich $\|\cdot\|_1 \Leftrightarrow U$ offen bezüglich $\|\cdot\|_2$.

Beweis
Übungsaufgabe. ■

Satz 8.16
Sei (X, d) metrischer Raum und $M \subset X$. Dann
1) $\operatorname{int} M, \operatorname{ext} M$ offen
2) $\partial M, \operatorname{int} M$ abgeschlossen
3) $M \leq \operatorname{int} M$ falls M offen,
$M = \operatorname{cl} M$ falls M abgeschlossen

Beweis
1) Seien $x \in \operatorname{int} M$, d.h. innere Punkte von $M \Rightarrow \exists \epsilon > 0\colon B_\epsilon(x) \subset M$, da $B_\epsilon(x)$ offene Menge, ist jedes $y \in B_\epsilon(x)$ eine Teilemenge von $\operatorname{int} M \Rightarrow B_\epsilon(x) \subset M \Rightarrow$ Behauptung (ext M analog)
2) $\partial X \setminus (\operatorname{int} M \cup \operatorname{ext} M)$ ist abgeschlossen, $\operatorname{cl} M = X \setminus \operatorname{ext} M$ abgeschlossen
3) M offen: es ist stets $\int M$ und da M offen $M \subset \operatorname{int} M \Rightarrow$ Behauptung $\Rightarrow X \setminus M = \operatorname{int}(X \setminus M) = \operatorname{ext} M = X \setminus \operatorname{cl} M \Rightarrow$ Behauptung. (M abgeschlossen analog)

■

Kapitel 9

Konvergenz

Sei (X, d) metrischer Raum.
Ab jetzt alles ohne Bweise, folgen später.

Definition 9.1 (konvergente Folge, Grenzwert)
Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (d.h. $a_n \in X$) heißt konvergent falls $a \in X$ existiert mit $\forall\epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $d(a_n, a) < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$. Dann heißt a Grenzwert (Limes).
Schreibe $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ bzw. $a_n \longrightarrow a$ für $n \longrightarrow \infty$ oder $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Sprich: "'Für jede Kugel um Grenzwert befinden sich ab einem gewissen Index fasst alle FOlgenglieder innerhalb der Kugel." Folge $\{a_n\}$ heißt divergent, falls sie nicht konvergent ist.

Folgerung 9.2
Für Folge $\{a_n\}$ gilt: $\forall > 0 \quad a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow$ jede Kugel $B_\epsilon(a)$ enthält fast alle Folgeglieder a_n, das heißt alle a_n bis auf endlich viele.

Beispiel (Konstante Folge)
Sei $\{a_n\} = \{a\}_{n\in\mathbb{N}}$ (das heißt $a_n = a \forall n$) $\Rightarrow d(a_n, a) = d(a, a) = 0 < \epsilon \forall\epsilon > 0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Beispiel
$\forall\epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n} = |\frac{1}{n} - 0| = d(\frac{1}{n}, 0) < \epsilon \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Kapitel 10

Vollständigkeit

Kapitel 11

Kompaktheit

Kapitel 12

Reihen

Teil IV

Funktionen und Stetigkeit

Kapitel 13

Funktionen