Lineare Algebra SS2018

Dozent: Prof. Dr. Arno Fehm

12. Juni 2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Endomorphismen

Kapitel II

Skalarprodukte

1. Quadriken

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Definition 1.1 (Quadrik)
Eine Quadrik ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t A x + 2b^t x + c = 0\}$$

mit $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch, $b^t \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$.

▶ **Bemerkung 1.2**

- $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0\}$ also Q ist die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms in $x_1, ..., x_n$
- Q bestimmt A, b, c nicht eindeutig, da $Q(A, b, c) = Q(\lambda A, \lambda b, \lambda c)$
- Man kann A, b, c so normieren, dass $c = 0$ oder $c = 1$

▶ **Bemerkung 1.3**
Seien A, b, c wie in Definition 1.1, so schreiben wir

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix}$$
$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0\}$. Wir schreiben (A, b) für

$$\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n,n+1}(\mathbb{R})$$

Es gilt $\mathrm{rk}(A) \leq \mathrm{rk}(\tilde{A})$.

▶ **Bemerkung 1.4 (Wiederholung)**
Seien V, W K-Vektorräume. $f : V \to W$ heißt affin, wenn $\exists g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit $f(v) = g(v) + w_0$ $\forall v \in V$. Ist f affin und bijektiv, so ist f^{-1} affin, d.h. $\mathrm{Aff}_K(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ affin und bijektiv}\}$. Im Fall von $V = \mathbb{R}^n$, $K = \mathbb{R}$ ist

$$\mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \{f = \tau_z \circ f_T \mid T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), z \in \mathbb{R}^n\}$$

mit $f_T(x) = Tx$ und $\tau_z(x) = x + z$.

Lemma 1.5
Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Quadrik, so ist $f(Q)$ eine Quadrik, für $f \in \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. $f = \tau_z \circ f_T$ mit $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{R}^n$. Schreibe $S = T^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\tilde{S} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es gilt $\tilde{S}\tilde{x} = \widetilde{Sx}$.

$$\begin{aligned} f_T(Q) &= \{Tx \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{x}^t \tilde{A}\tilde{x} = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid (\tilde{S}\tilde{y})^t \tilde{A}\tilde{S}\tilde{y} = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}^t \underbrace{\tilde{S}^t\tilde{A}\tilde{S}}_{\begin{pmatrix} S^tAS & S^tb \\ b^tS & c \end{pmatrix}} \tilde{y} = 0\} \end{aligned}$$

Jetzt für τ_z. Sei $U_z = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $U_z\tilde{x} = \tilde{\tau}_z(x)$. Man folgert analog, dass

$$\tau_z(Q) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}^t \underbrace{U_z^t\tilde{A}U_z}_{\begin{pmatrix} A & Az+b \\ z^tA+b & z^tAz+b^tz+z^tb+c \end{pmatrix}} \tilde{y} = 0\}$$ □

Definition 1.6 (Typen von Quadriken)
Sei Q gegeben durch (A, b, c) wie in Definition 1.1. Q heißt

- vom <u>kegeligen Typ</u>, wenn $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A, b) = \mathrm{rk}(\tilde{A})$
- eine <u>Mittelpunktsquadrik</u>, wenn $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A, b) < \mathrm{rk}(\tilde{A})$
- vom <u>parabolischen Typ</u>, wenn $\mathrm{rk}(A) < \mathrm{rk}(A, b)$

Lemma 1.7
Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Quadrik, $f \in \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$. Von dem Typ, von dem Q ist, ist auch $f(Q)$.

Beweis. $f = f_{S^{-1}}$, $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Da $\tilde{S}$ invertierbar ist, ist $\mathrm{rk}(\tilde{A}) = \mathrm{rk}(\tilde{S}^t\tilde{A}\tilde{S})$, analog auch $\mathrm{rk}(S^tAS) = \mathrm{rk}(A)$. $(S^tAS, S^tb) = S^t(A, b)\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rk}(S^tAS, S^tb) = \mathrm{rk}(A, b)$. Für $f = \tau_z$ analog. □

Definition 1.8 (Isometrie)
Eine <u>Isometrie</u> des $\mathbb{R}^n$ ist $f \in \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f(x) = Ax + b$$

mit $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist orthogonal.

▶ **Bemerkung 1.9**
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine Isometrie genau dann, wenn $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Theorem 1.10 (Klassifikation bis auf Isometrien)
Sei Q eine Quadrik. Es gibt eine Isometrie $f \in \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ mit $f(Q)$, die eine der folgenden Formen annimmt:

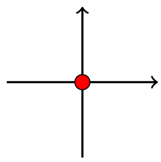
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \sum_{i=k+1}^{n} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = 0 \right\} \quad k \geq r - k$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \sum_{i=k+1}^{n} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = 1 \right\}$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \sum_{i=k+1}^{n} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - 2x_{r+1} = 0 \right\} \quad k \geq r - k, r < n$

mit $a_1, ..., a_r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $0 \leq k \leq r \leq n$

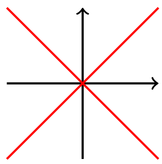
Beweis.

■ **Beispiel 1.11**
$Q \subseteq \mathbb{R}^2$

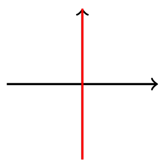
- _ $k = 2, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 0 \right\}$



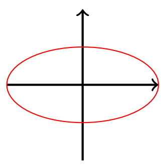
  _ $k = 1, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 0 \right\}$



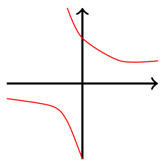
  _ $k = 1, r = 1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 = 0 \right\}$



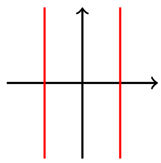
- _ $k = 2, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1 \right\}$



- $k=1, r=2: \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1\right\}$

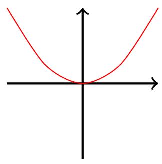


- $k=1, r=1: \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 = 1\right\}$



- $k=0, r=2: \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1\right\} = \emptyset$
- $k=0, r=1: \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1\right\} = \emptyset$

• – $k=1, r=1: \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - 2x_2 = 0\right\}$



▶ Bemerkung 1.12

- Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Quadrik, $U \subseteq V$ affiner Untervektorraum, so ist $Q \cap U$ eine Quadrik in dem Sinne, dass $\exists f$ Isometrie : $f(U) = \mathbb{R}^k$ und $f(Q \cap U)$ ist eine Quadrik.
- Ebene Quadriken sind im wesentlichen Kegelschnitte, $Q' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$, außer 2c und 2d in Beispiel 1.11

Folgerung 1.13
Sei Q eine Quadrik, dann existiert eine lineare affine Abbildung f mit: $f(Q)$ ist vom Typ 1, 2 oder 3.

▶ Bemerkung 1.14
$\mathbb{R}^n$ und “Punkte im Unendlichen“ $\to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}^n)$, der <u>projektive Raum</u>

Kapitel III

Dualität

1. Das Lemma von Zorn

Sei K ein Körper und U, V, W seien K-Vektorräume. Zudem sei X eine Menge.

Definition 1.1 (Relation)
Eine Relation ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$. Man schreibt $(x, x') \in R$ als xRx'. R heißt

- reflexiv, wenn $\forall x \in X\colon xRx$
- transitiv, wenn $\forall x, y, z \in X\colon xRy$ und $yRz \Rightarrow xRz$
- symmetrisch, wenn $\forall x, y \in X\colon xRy \Rightarrow yRx$
- antisymmetrisch, wenn $\forall x, y \in X\colon xRy$ und $yRx \Rightarrow y = x$
- total, wenn $\forall x, y \in X\colon (x, y) \notin R \Rightarrow (y, x) \in R$

Definition 1.2 (Äquivalenzrelation)
Eine Äquivalenzrelation ist eine reflexive, transitive und symmetrische Relation.

Definition 1.3 (Halbordnung)
Eine Halbordnung ist eine reflexiv, transitive und antisymmetrische Relation. Eine totale Halbordnung heißt Totalordnung oder lineare Ordnung

■ **Beispiel 1.4**

- Die natürliche Ordnung auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$.
- Teilbarkeit ist eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$, aber Teilbarkeit ist keine Halbordnung auf $\mathbb{Z}$, da $1|-1$ und $-1|1$, aber $1 \neq -1$!
- $\mathcal{P}(X)$ ist die Potenzmenge. "$\subseteq$" ist eine Halbordnung auf $\mathcal{P}$, aber für $|X| > 1$ ist "$\subseteq$" keine Totalordnung.
- Sei $(X, \leq)$ eine Halbordnung, sei $Y \subseteq X$, so ist $(Y, \subseteq|_Y)$ eine Halbordnung.

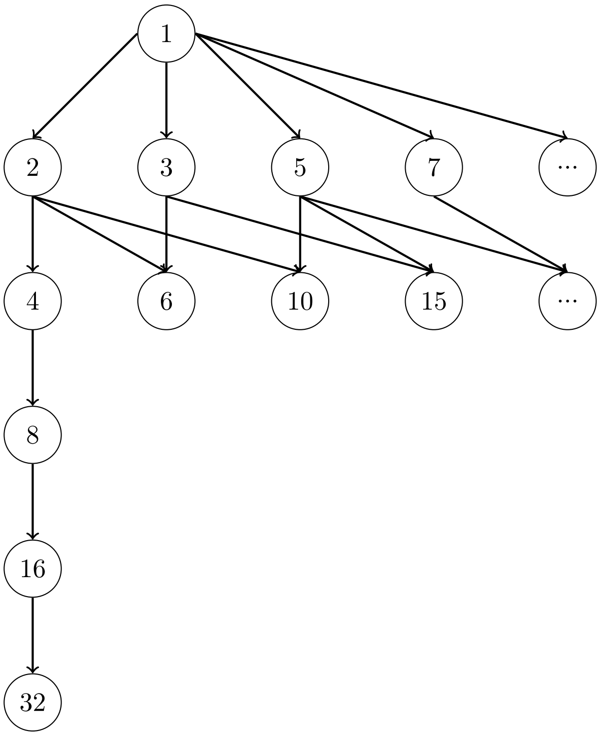
Definition 1.5 (Kette)
Sei $(X, \leq)$ eine Halbordnung, $Y \subseteq X$. Y heißt Kette, wenn $(Y, \leq|_Y)$ total ist.

$x \in Y$ heißt ein minimales Element von Y, wenn $\forall x' \in Y\colon x < x'$.

$x \in Y$ heißt untere Schranke von Y, wenn $\forall y \in Y\colon y \geq x$.

$x \in Y$ heißt kleinstes Element von Y, wenn x untere Schranke von Y ist.

Analog: maximales Element, obere Schranke, größtes Element.



$Y = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Kette

▶ **Bemerkung 1.6**

- Hat Y ein kleinstes Element, so ist dies eindeutig bestimmt. Ein kleinstes Element ist minimal.
- Jede endliche Halbordnung hat minimale Elemente. Jede endliche Totalordnung hat ein kleinstes Element. Analog für maximale Elemente und größtes Element.

■ **Beispiel 1.7**

$(\mathbb{N}, \leq)$ hat als kleinstes Element die 1, aber kein größtes Element oder maximale Elemente.

■ **Beispiel 1.8**

$V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{X}$ die Menge der Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$. $(\mathcal{X}, \leq)$ ist eine Halbordnung auf $Y \subseteq X$ mit $Y = \{U \in \mathcal{X} \mid \dim_{\mathbb{R}}(U) \leq 2\}$.

- Y hat ein kleinstes Element: $\{0\}$.
- Es gibt unendlich viele maximale Elemente in Y, nämlich die Untervektorräume von V, die die Dimension 2 haben. Es gibt also kein größtes Element.
- V ist die obere Schranke von Y.

Theorem 1.9 (Das Lemma von Zorn)
Sei $(X, \leq)$ eine Halbordnung, die nicht leer ist. Wenn jede Kette eine obere Schranke hat, dann hat X ein maximales Element.

Beweis. Dieses Theorem ist äquivalent zum Auswahlaxiom. ☹ □

■

Folgerung 1.10
Zu jeder Familie (x_i), nicht leer, gibt es eine Auswahlfunktion, das heißt eine Abbildung:

$$f : I \to \bigcup X_i \text{ mit } f(i) \in X_i \quad \forall i$$

Kapitel IV

Moduln

Anhang

Anhang A: Listen

A.1. Liste der Theoreme

A.2. Liste der benannten Sätze

Index