# Lineare Algebra SS2018

Dozent: Prof. Dr. Arno Fehm

6. Juli 2018

# *Inhaltsverzeichnis*

## Kapitel I

# *Endomorphismen*

In diesem Kapitel seien $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-VR und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus.

Das Ziel dieses Kapitels ist, die Geometrie von $f$ besser zu verstehen und Basen zu finden, für die $M_B(f)$ eine besonders einfache oder kanonische Form hat.

## 1. Eigenwerte

▶ **Bemerkung 1.1**
Wir erinnern uns daran, dass $\mathrm{End}_K(V) = \mathrm{Hom}_K(V, V)$ sowohl einen $K$-VR als auch einen Ring bildet. Bei der Wahl einer Basis $B$ von $V$ wird $f \in \mathrm{End}_K(V)$ durch die Matrix $M_B(f) = M_B^B(f)$ beschrieben.

■ **Beispiel 1.2**
$K = \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}), f = f_A \in \mathrm{End}_K(K^2)$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ mit $B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ist $M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**Definition 1.3 (Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum)**
Sind $0 \neq x \in V$ und $\lambda \in K$ mit $f(x) = \lambda x$ so nennt man $\lambda$ einen Eigenwert von $f$ und $x$ einen Eigenvektor von $f$ zum Eigenwert $\lambda$. Der Eigenraum zu $\lambda \in K$ ist $\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$.

▶ **Bemerkung 1.4**
Für jedes $\lambda \in K$ ist $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$ ein UVR von $V$, da

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(f, \lambda) &= \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\} \\ &= \{x \in V \mid f(x) - \lambda \cdot \mathrm{id}_V(x) = 0\} \\ &= \{x \in V \mid (f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(x) = 0\} \\ &= \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \end{aligned}$$

und $f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V \in \mathrm{End}_K(V)$.

▶ **Bemerkung 1.5**

Achtung! Der Nullvektor ist nach Definition kein Eigenvektor, aber $\lambda = 0$ kann ein Eigenwert sein, nämlich genau dann, wenn $f \notin \mathrm{Aut}_K(V)$, siehe Übung. Die Menge der Eigenvektoren zu $\lambda$ ist also $\mathrm{Eig}(f,\lambda)\backslash\{0\}$ und $\lambda$ ist genau dann ein Eigenwert von $f$, wenn $\mathrm{Eig}(f,\lambda) \neq \{0\}$.

■ **Beispiel 1.6**

Ist $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ und $f = f_A \in \mathrm{End}_K(K^n)$, so sind $\lambda_1, ..., \lambda_n$ EW von $f$ und jedes $e_i$ ist ein EV zum EW $\lambda_i$.

**Satz 1.7**

Sei $B$ eine Basis von $V$. Genau dann ist $M_B(f)$ eine Diagonalmatrix, wenn $B$ aus EV von $f$ besteht.

*Beweis.* Ist $B = (x_1, ...x_n)$ eine Basis aus EV zu EW $\lambda_1, ...., \lambda_n$, so ist $M_B(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ und umgekehrt. □

■ **Beispiel 1.8**

Sei $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ und $f_\alpha \in \mathrm{End}_K(\mathbb{R}^2)$ die Drehung um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{E}}(f_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Für $\alpha = 0$ hat $f_\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ nur den EW 1.
Für $\alpha = \pi$ hat $f_\alpha = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ nur den EW -1.
Für $\alpha \neq 0, \pi$ hat $f_\alpha$ keine EW.

**Lemma 1.9**

Sind $\lambda_1, ..., \lambda_n$ paarweise verschiedene EW von $f$ und ist $x_i$ ein EV zu $\lambda_i$ für $i = 1, ..., m$, so ist $(x_1, ..., x_m)$ linear unabhängig.

*Beweis.* Induktion nach $m$

$\underline{m = 1}$: klar, denn $x_1 \neq 0$

$\underline{m - 1 \to m}$: Sei $\sum_{i=1}^m \mu_i x_i = 0$ mit $\mu_1, ..., \mu_m \in K$.

$$\begin{aligned} 0 &= (f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \left( \sum_{i=1}^m \mu_i x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \mu_i (f(x_i) - \lambda_m \cdot x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i (\lambda_i - \lambda_m) \cdot x_i \end{aligned}$$

Nach IB ist $\mu_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0$ für $i = 1, ..., m-1$, da $\lambda_i \neq \lambda_m$ für $i \neq m$ also $\mu_i = 0$ für $i = 1, ..., m-1$. Damit ist auch $\mu_m = 0$. Folglich ist $(x_1, ..., x_m)$ linear unabhängig. □

**Satz 1.10**
Sind $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$ paarweise verschieden, so ist

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Eig}(f, \lambda_i) = \bigoplus_{i=0}^{m} \mathrm{Eig}(f, \lambda_i).$$

*Beweis.* Seien $x_i, y_i \in \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ für $i = 1, ..., m$. Ist $\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i$, so ist $\sum_{i=1}^m \underbrace{x_i - y_i}_{z_i} = 0$.
o. E. seien $z_i \neq 0$ für $i = 1, ..., r$ und $z_i = 0$ für $i = r+1, ..., m$. Wäre $r > 0$, so wären $(z_1, ..., z_r)$ linear abhängig, aber $z_i = x_i - y_i \in \mathrm{Eig}(f, \lambda_i) \backslash \{0\}$, im Widerspruch zu Lemma 1.9. Somit ist $x_i = y_i$ für alle $i$ und folglich ist die Summe $\sum \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ direkt. □

**Definition 1.11 (EW und EV für Matrizen)**
Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Man definiert Eigenwerte, Eigenvektoren, etc von $A$ als Eigenwerte, Eigenvektoren von $f_A \in \mathrm{End}_K(K^n)$.

**Satz 1.12**
Sei $B$ eine Basis von $V$ und $\lambda \in K$. Genau dann ist $\lambda$ ein EW von $f$, wenn $\lambda$ ein EW von $A = M_B(f)$ ist. Insbesondere haben ähnliche Matrizen die selben EW.

*Beweis.* Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "\Phi_B"'] & K^n \arrow[d, "\Phi_B"] \\ V \arrow[r, "f"'] & V \end{tikzcd}$$

denn $f_A(x) = \lambda x \iff (\Phi_B \circ f_A)(x) = \Phi_B(\lambda x) \iff f(\Phi_B(x)) = \lambda \Phi_B(x)$.
Ähnliche Matrizen beschreiben den selben Endomorphismus bezüglich verschiedener Basen, vgl. IV.4.1 □

# 2. Das charakteristische Polynom

**Satz 2.1**
Sei $\lambda \in K$. Genau dann ist $\lambda$ ein EW von $f$, wenn $\det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f) = 0$.

*Beweis.* Da $\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \mathrm{Ker}(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f)$ ist $\lambda$ genau dann ein EW von $f$, wenn $\dim_K(\mathrm{Ker}(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f)) > 0$, also wenn $\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f \notin \mathrm{Aut}_K(V)$. Nach IV.4.6 bedeutet dies, dass $\det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f) = 0$ □

**Definition 2.2 (charakteristisches Polynom)**
Das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ist die Determinante der Matrix $t \cdot \mathbb{1}_n - A \in \mathrm{Mat}_n(K[t])$.

$$\chi_A(t) = \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A) \in K[t]$$

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ist $\chi_f(t) = \chi_{M_B(f)}(t)$, wobei $B$ eine Basis von $V$ ist.

**Satz 2.3**
Sind $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit $A \sim B$, so ist $\chi_A = \chi_B$. Insbesondere ist $\chi_f$ wohldefiniert.

*Beweis.* Ist $B = SAS^{-1}$ mit $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, so ist $t \cdot \mathbb{1}_n - B = S(t \cdot \mathbb{1}_n - A)S^{-1}$, also $t \cdot \mathbb{1}_n - B \sim t \cdot \mathbb{1}_n - A$ und ähnliche Matrizen haben die selben Determinante (IV.4.4).
Sind $B, B'$ Basen von $V$, so sind $M_B(f) \sim M_{B'}(f)$, also $\chi_{M_B(f)} = \chi_{M_{B'}(f)}$ □

**Lemma 2.4**
Für $\lambda \in K$ ist $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f)$.

*Beweis.* Sei $B$ eine Basis von $V$ und $A = M_B(f) = (a_{ij})_{i,j}$. Dann ist $M_B(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f) = \lambda \cdot \mathbb{1}_n - A$. Aus IV.2.8 und I.6.8 folgt $\det(t \cdot \mathbb{1}_n - A)(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)$. Folglich ist

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \chi_A(\lambda) \\ &= \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A)(\lambda) \\ &= \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) \\ &= \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f) \end{aligned}$$

□

**Satz 2.5**
Sei $\dim_K(V) = n$ und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann ist $\chi_f(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i$ ein Polynom vom Grad $n$ mit

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 1 \\ \alpha_{n-1} &= -\mathrm{tr}(f) \\ \alpha_0 &= (-1)^n \cdot \det(f) \end{aligned}$$

Die Nullstellen von $\chi_f$ sind genau die EW von $f$.

*Beweis.* Sei $B$ eine Basis von $V$ und $A = M_B(f) = (a_{ij})_{i,j}$. Wir erinnern uns daran, dass $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Es ist $\chi_f(t) = \det(t - \cdot 1_n - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n (t\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)})$.
Der Summand für $\underline{\sigma = \mathrm{id}}$ ist $\prod_{i=1}^n (t - a_{ii}) = t^n + \sum_{i=1}^n (-a_{ii}) t^{n-1} + ... + \prod_{i=1}^n (-a_{ii})$
Für $\underline{\sigma \neq \mathrm{id}}$ ist $\sigma(i) \neq i$ für mindestens zwei $i$, der entsprechende Summand hat also Grad höchstens $n-2$. Somit haben $\alpha_n$ und $\alpha_{n-1}$ die oben behauptete Form, und $\alpha_0 = \chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \cdot \det(f)$.
Die Aussage über die Nullstellen von $\chi_f$ folgt aus Satz 2.1 und Lemma 2.4. □

**Folgerung 2.6**
Ist $\dim_K(V) = n$, so hat $f$ höchstens $n$ Eigenwerte.

*Beweis.* Satz 2.5 und I.6.10 □

**Definition 2.7 (normiertes Polynom)**
Ein Polynom $0 \neq P \in K[t]$ mit Leitkoeffizient 1 heißt normiert .

**Beispiel 2.8**

1. Ist $A = (a_{ij})_{i,j}$ eine obere Dreiecksmatrix, so ist $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^n (t - a_{ii})$, vgl. IV.2.9.c
   Insbesondere ist $\chi_{1_n}(t) = (t-1)^n$, $\chi_0(t) = t^n$
2. Für eine Blockmatrix $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ mit quadratischen Matrizen $A_1, A_2$ ist $\chi_A = \chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2}$ vgl. IV.2.9.e
3. Für

$$\begin{pmatrix} 0 & ... & ... & ... & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & 1 & 0 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \quad c_0, ..., c_{n-1} \in K$$

   ist $\chi_A(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$
   Man nennt diese Matrix die Begleitmatrix zum normierten Polynom $P = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$ und schreibt $M_P := A$

# 3. Diagonalisierbarkeit

**Definition 3.1 (diagonalisierbar)**
Man nennt $f$ diagonalisierbar , wenn $V$ eine Basis $B$ besitzt, für die $M_B(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

**Lemma 3.2**
Genau dann ist $f$ diagonalisierbar, wenn

$$V = \sum_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$$

.

*Beweis.* ($\Rightarrow$): Ist $B$ eine Basis aus EV von $f$ (vgl. Satz 1.7), so ist $B \leq \bigcup\limits_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$, also $V = \operatorname{span}_K(\bigcup\limits_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda)) = \sum_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$.
($\Leftarrow$): Ist $V = \sum_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$, so gibt es $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit $V = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{Eig}(f, \lambda_i)$. Wir wählen Basen $B_i$ von $\operatorname{Eig}(f, \lambda_i)$. Dann ist $\bigcup\limits_{i=1}^{r} B_i$ ein endliches Erzeugendensystem von $V$, enthält also eine Basis von $V$ (II.3.6). Diese besteht aus EV von $f$. □

**Satz 3.3**
Ist $\dim_K(V) = n$, so hat $f$ höchstens $n$ Eigenwerte. Hat $f$ genau $n$ Eigenwerte, so ist $f$ diagonalisierbar.

*Beweis.* Ist $\lambda$ ein EW von $f$, so ist $\dim_K(\operatorname{Eig}(f, \lambda)) \geq 1$. Sind also $\lambda_1, ..., \lambda_n$ paarweise verschiedene EW von $f$, so ist

$$\begin{aligned} n = \dim_K(V) &\geq \dim_K\left(\sum_{i=1}^{m} \operatorname{Eig}(f, \lambda_i)\right) \\ &\overset{\text{Satz 1.10}}{=} \dim_K\left(\bigoplus_{i=0}^{m} \operatorname{Eig}(f, \lambda_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \dim_K(\operatorname{Eig}(f, \lambda_i)) \\ &\geq m \end{aligned}$$

Ist zudem $m = n$, so muss

$$\begin{aligned} \dim_K(V) = \dim_K(\sum_{i=1}^{m} \operatorname{Eig}(f, \lambda_i)) &\text{ sein, also} \\ V = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Eig}(f, \lambda_i) \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2 ist $f$ genau dann diagonalisierbar. □

**Definition 3.4 ($a$ teilt $b$)**
Sei $R$ ein kommutativer Ring mit seien $a, b \in R$. Man sagt, $a$ teilt $b$ (in Zeichen $a|b$), wenn es $x \in R$ mit $b = ax$ gibt.

**Definition 3.5 (Vielfachheit)**
Für $0 \neq P \in K[t]$ und $\lambda \in K$ nennt man $\mu(P,\lambda) = \max\{r \in \mathbb{N}_{>0} \mid (t-r)^r | P\}$ die Vielfachheit der Nullstelle $\lambda$ von $P$.

**Lemma 3.6**
Genau dann ist $\mu(P,\lambda) \geq 1$, wenn $\lambda$ eine Nullstelle von $P$ ist.

*Beweis.* ($\Rightarrow$): $t-\lambda|P \Rightarrow P(t) = (t-\lambda)\cdot Q(t)$ mit $Q(t) \in K[t] \Rightarrow P(\lambda) = 0 \cdot Q(\lambda) = 0$.
($\Leftarrow$): $P(\lambda) = 0 \overset{I.6.9}{=} t-\lambda|P(t) \Rightarrow \mu(P,\lambda) \geq 1$. □

**Lemma 3.7**
Ist $P(t) = (t-\lambda)^r \cdot Q(t)$ mit $Q(t) \in K[t]$ und $Q(\lambda) \neq 0$, so ist $\mu(P,\lambda) = r$

*Beweis.* Offensichtlich ist $\mu(P,\lambda) \geq r$. Wäre $\mu(P,\lambda) \geq r+l$, so $(t-\lambda)^{r+l}|P(t)$ also $(t-\lambda)^r \cdot Q(t) = (t-\lambda)^{r+l} \cdot R(t)$ mit $R(t) \in K[t]$, folglich $t-\lambda|Q(t)$, insbesondere $Q(\lambda) = 0$.
(Denn wir dürfen kürzen: $R$ ist nullteilerfrei, genau so wie $K[t]$).
$(t-\lambda)^r(Q(t)-(t-\lambda)R(t)) = 0 \Rightarrow Q(t) = (t-\lambda)R(t)$. □

**Lemma 3.8**
Sind $P,Q,R \in K[t]$ mit $PQ = PR$, und ist $P \neq 0$, so ist $Q = R$.

*Beweis.* $PQ = PR \Rightarrow P(Q-R) = 0 \overset{K[t] \text{ nullteilerfrei}}{\Rightarrow} Q-R = 0$, d.h. $Q = R$. □

**Lemma 3.9**
Es ist $\sum_{\lambda\in K} \mu(P,\lambda) \leq \deg(P)$, mit Gleichheit genau dann, wenn $P$ in Linearfaktoren zerfällt.

*Beweis.* Schreibe $P(t) = \prod_{\lambda\in K}(t-\lambda)^{r_\lambda} \cdot Q(t)$, wobei $Q(t) \in K[t]$ keine Nullstellen mehr besitzt. Nach Lemma 3.7 ist $\mu(P,\lambda) = r_\lambda$ für alle $\lambda$ und somit $\deg(P) = \sum_{\lambda\in K} r_\lambda + \deg(Q) \geq \sum_{\lambda\in K}\mu(P,\lambda)$ mit Gleichheit genau dann,wenn $\deg(Q) = 0$, also $Q = c \in K$, d.h. genau dann, wenn $P(t) = c \cdot \prod_{\lambda\in K}(t-\lambda)^{r_\lambda}$. □

**Lemma 3.10**
Für $\lambda \in K$ ist

$$\dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda)) \geq \mu(x_f,\lambda)$$

*Beweis.* Ergänze eine Basis $B$ von $\mathrm{Eig}(f,\lambda)$ zu einer Basis $B$ von $V$. Dann ist

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda\mathbb{1}_s & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix $A' \in \mathrm{Mat}_{n-s}(K)$, also $\chi_f(t) = \chi_A(t) \overset{\text{Beispiel 2.8}}{=} \chi_{\lambda\mathbb{1}} \cdot \chi_{A'}(t) = (t-\lambda)^s \cdot \chi_{A'}(t)$ und somit $\dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda)) = s \leq \mu(x_f,\lambda)$. □

**Satz 3.11**
Genau dann ist $f$ diagonalisierbar, wenn $\chi_f$ in Linearfaktoren zerfällt und $\dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda)) = \mu(x_f,\lambda)$ für alle $\lambda \in K$.

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}
\dim_K(\sum_{\lambda\in K}\mathrm{Eig}(f,\lambda)) &\overset{\text{Satz 1.10}}{=} \dim_K(\bigoplus_{\lambda\in K}\mathrm{Eig}(f,\lambda)) \\
&\overset{\text{II.4.12}}{=} \sum_{\lambda\in K}\dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda)) \\
&\overset{\text{Lemma 3.10}}{\leq} \sum_{\lambda\in K}\mu(\chi_f,\lambda) && (1)\\
&\leq \deg(\chi_f) && (2)\\
&= n
\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2 ist $f$ genau dann diagonalisierbar, wenn $\dim_K(\sum_{\lambda\in K}\mathrm{Eig}(f,\lambda)) = n$, also wenn bei (1) und (2) Gleichheit herrscht. Gleichheit bei (1) bedeutet $\dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda)) = \mu(\chi_f,\lambda)$ für alle $\lambda \in K$, und Gleichheit bei (2) bedeutet nach Lemma 3.9, dass $\chi_f$ in Linearfaktoren zerfällt. □

**Definition 3.12 (algebraische und geometrische Vielfachheit)**
Man nennt $\mu_a(f,\lambda) = \mu(\chi_f,\lambda)$ die <u>algebraische Vielfachheit</u> und $\mu_g(f,\lambda) = \dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda))$ die <u>geometrische Vielfachheit</u> des Eigenwertes $\lambda$ von $f$.

▶ **Bemerkung 3.13**
Wieder nennt man $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ diagonalisierbar, wenn $f_A \in \mathrm{End}_K(K^n)$ diagonalisierbar ist, also wenn $A \sim D$ für eine Diagonalmatrix $D$.

# 4. Trigonalisierbarkeit

**Definition 4.1**
Man nennt $f$ trigonalisierbar, wenn $V$ eine Basis $B$ besitzt, für die $M_B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

■ **Beispiel 4.2**
Ist $f$ diagonalisierbar, so ist $f$ auch trigonalisierbar.

**Lemma 4.3**
Ist $f$ trigonalisierbar, so zerfällt $\chi_f$ in Linearfaktoren.

*Beweis.* Klar aus Beispiel 2.8 und Satz 2.3. □

**Definition 4.4 (invariant)**
Ein Untervektorraum $W \leq V$ ist $f$-invariant, wenn $f(W) \leq W$.

▶ **Bemerkung 4.5**
Ist $W$ ein $f$-invarianter UVR von $V$, so ist $f|_W \in \mathrm{End}_K(W)$.

■ **Beispiel 4.6**

1. $V$ hat stets die $f$-invarianten UVR $W = \{0\}$ und $W = V$.
2. Jeder UVR $W \leq \mathrm{Eig}(f, \lambda)$ ist $f$-invariant.
3. Ist $B = (x_1, ..., x_n)$ eine Basis von $V$, für die $M_B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, so sind alle UVR $W_i = \mathrm{span}_K(x_1, ..., x_i)$ $f$-invariant.
4. Sei $V = W \oplus U$, $B_1 = (x_1, ..., x_r)$ Basis von $W$, $B_2(x_{r+1}, ..., x_n)$ Basis von $U$ und $B = (x_1, ..., x_n)$. Ist $W$ $f$-invariant, so ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(f|_W) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Sind $W$ und $U$ $f$-invariant, so ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(f|_W) & 0 \\ 0 & M_{B_2}(f|_U) \end{pmatrix}$$

**Lemma 4.7**
Ist $W \subset V$ ein $f$-invarianter UVR, so gilt $\chi_{f|_W} | \chi_f$. Hat $W$ ein lineares Komplement $U$, dass auch $f$-invariant ist, so $\chi_f = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{f|_U}$.

*Beweis.* Ergänze eine Basis $B_0 = (x_1, ..., x_r)$ von $W$ zu einer Basis $B = (x_1, ..., x_n)$ von $V$. Sei $A = M_B(f)$,

$A_0 = M_{B_0}(f|_W)$. Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & * \\ 0 & C \end{pmatrix} \qquad C \in \mathrm{Mat}_{n-r}(K)$$

folglich $\chi_f = \chi_A = \chi_{A_0} \cdot \chi_C$, insbesondere $\chi_{f|_W} | \chi_f$.
Ist auch $U = \mathrm{span}_K(x_{r+1}, ..., x_n)$ $f$-invariant, so ist

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

und folglich $\chi_f = \chi_A = \chi_{A_0} \cdot \chi_C = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{f|_U}$. □

**Theorem 4.8**
Genau dann ist $f$ trigonalisierbar, wenn $\chi_f$ in Linearfaktoren zerfällt.

*Beweis.* ($\Rightarrow$): Lemma 4.3
($\Leftarrow$): Induktion nach $n = \dim_K(V)$.
$\underline{n = 1}$: trivial
$\underline{n - 1 \to n}$: Nach Annahme ist $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$. Sei $x_1$ ein EV zum EW $\lambda_1$. Dann ist $V_1 = K \cdot x_1$ ein $f$-invarianter UVR. Ergänze $B_1 = (x_1)$ zu einer Basis $B = (x_1, ..., x_n)$ von $V$ und setze $B_2 = (x_2, ..., x_n)$, $V_2 = \mathrm{span}_K(B_2)$. $\underline{n - 1 \to n}$: Nach Annahme ist $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$. Sei $x_1$ ein EV zum EW $\lambda_1$. Dann ist $V_1 = K \cdot x_1$ ein $f$-invarianter UVR. Ergänze $B_1 = (x_1)$ zu einer Basis $B = (x_1, ..., x_n)$ von $V$ und setze $B_2 = (x_2, ..., x_n)$, $V_2 = \mathrm{span}_K(B_2)$.

$$\Rightarrow M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \qquad A_2 \in \mathrm{Mat}_{n-1}(K)$$

$$\chi_f(t) = \chi_{\lambda_1 \mathbb{1}_1} \cdot \chi_{A_2} = (t - \lambda_1) \cdot \chi_{A_2}(t)$$

$$\overset{\text{Lemma 3.7}}{\Rightarrow} \chi_{A_2}(t) = \prod_{i=2}^n (t - \lambda_i)$$

Seien $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{End}_K(V)$ gegeben durch $M_B(\pi_1) = \mathrm{diag}(1, 0, ..., 0)$ und $M_B(\pi_2) = \mathrm{diag}(0, 1, ..., 1)$. Dann ist $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{id}_V$ und $f_i = \pi_1 \circ f$ ist $f = \mathrm{id}_V \circ f = f_1 + f_2$ und $f_2|_{V_2} \in \mathrm{End}_K(V_2)$. Nach Induktionshypothese ist $f_2|_{V_2}$ trigonalisierbar, da $M_B(f_2|_{V_2}) = A_2$, also $\chi_{f_2|_{V_2}} = \chi_{A_2}$. Dies bedeutet, es gibt also eine Basis $B_2' = (x_2', ..., x_n')$ von $V_2$, für die $M_{B_2'}(f_2|_{V_2})$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Somit ist für $B' = (x_1, x_2', ..., x_n')$ auch

$$\begin{aligned} M_{B'}(f) &= M_{B'}(f_1) + M_{B'}(f_2) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{B_2'}(f_2|_{V_2}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine obere Dreiecksmatrix. □

**Folgerung 4.9**
Ist $K$ algebraisch abgeschlossen, so ist jedes $f \in \mathrm{End}_K(V)$ trigonalisierbar.

*Beweis.* Ist $K$ algebraisch abgeschlossen, so zerfällt nach I.6.14 jedes Polynom über $K$ in Linearfaktoren, insbesondere also $\chi_f$. □

**Folgerung 4.10**
Ist $V$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-VR, so ist jedes $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ trigonalisierbar.

*Beweis.* Nach dem Fundamentalsatz der Algebra I.6.16 ist $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen. □

# 5. Das Minimalpolynom

**Definition 5.1**
Für ein Polynom $P(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i t^i \in K[t]$ definieren wir $P(f) = \sum_{i=0}^{m} c_i f^i \in \mathrm{End}_K(V)$, wobei $f^0 = \mathrm{id}_V$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, ... Für ein Polynom $P(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i t^i \in K[t]$ definieren wir $P(f) = \sum_{i=0}^{m} c_i f^i \in \mathrm{End}_K(V)$, wobei $f^0 = \mathrm{id}_V$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, ...

Analog definiert man $P(A)$ für $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

▶ **Bemerkung 5.2**
Die Abbildung $\begin{cases} K[t] \to \mathrm{End}_K(V) \\ P \mapsto P(f) \end{cases}$ ist ein Homomorphismus von $K$-VR und Ringen. Sein Kern ist das Ideal

$$\mathcal{I}_f := \{P \in K[t] \mid P(f) = 0\}$$

und sein Bild ist der kommutative Unterring

$$\begin{aligned} K[f] :&= \{P(f) \mid P \in K[t]\} \\ &= \mathrm{span}_K(f^0, f^1, f^2, ...) \end{aligned}$$

des (im Allgemeinen nicht kommutativen) Rings $\mathrm{End}_K(V)$.

Analog definiert man $\mathcal{I}_A$ und $K[A] \leq \mathrm{Mat}_n(K)$.

**Lemma 5.3**
$\mathcal{I}_f \neq \{0\}$

*Beweis.* Wäre $\mathcal{I}_f = \{0\}$, so wäre $K[t] \to \mathrm{End}_K(V)$ injektiv, aber $\dim_K(K[t]) = \infty > n^2 = \dim_K(\mathrm{End}_K(V))$, ein Widerspruch. □

**Satz 5.4**
Es gibt ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom $0 \neq P \in K[t]$ kleinsten Grades mit $P(f) = 0$. Dieses teilt jedes $Q \in K[t]$ mit $Q(f) = 0$.

*Beweis.* Nach Lemma 5.3 gibt es $0 \neq P \in K[t]$ mit $P(f) = 0$ von minimalem Grad $d$. Indem wir durch den Leitkoeffizienten von $P$ teilen, können wir annehmen, dass $P$ normiert ist.
Sei $Q \in \mathcal{I}_f$. Polynomdivision liefert $R, H \in K[t]$ mit $Q = P \cdot H + R$ und $\deg(R) < \deg(P) = d$. Es folgt $R(f) = \underbrace{Q(f)}_{=0} - \underbrace{P(f)}_{=0} \cdot H(f) = 0$. Aus der Minimalität von $d$ folgt $R = 0$ und somit $P|Q$.
Ist $Q$ zudem normiert vom Grad $d$, so ist $H = 1$, also $Q = P$, was die Eindeutigkeit zeigt. □

**Definition 5.5 (Minimalpolynom)**
Das eindeutig bestimmte normierte Polynom $0 \neq P \in K[t]$ kleinsten Grades mit $P(f) = 0$ nennt man das <u>Minimalpolynom</u> $P_f$ von $f$.

Analog definiert man das Minimalpolynom $P_A \in K[t]$ einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

■ **Beispiel 5.6**

1. $A = \mathbb{1}_n$, $\chi_A(t) = (t-1)^n$, $P_A(t) = t-1$

2. $A = 0$, $\chi_A(t) = t^n$, $P_A(t) = t$

3. Ist $A = \operatorname{diag}(a_1, ..., a_n)$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_r$, so ist $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^n (t-a_i) = \prod_{i=1}^n (t-\lambda_i)^{\mu_a(f_A,\lambda_i)}$, $P_A(t) = \prod_{i=1}^r (t-\lambda_i)$ und es folgt $\deg(P_A) \geq |\{a_1, ..., a_n\}| = r$.

**Definition 5.7 ($f$-zyklisch)**
Ein $f$-invarianter UVR $W \leq V$ heißt $f$-zyklisch , wenn es ein $x \in W$ mit $W = \operatorname{span}_K(x, f(x), f^2(x), ...)$ gibt.

**Lemma 5.8**
Sei $x \in V$ und $x_i = f(x)$. Es gibt ein kleinstes $k$ mit $x_k \in \operatorname{span}_K(x_0, x_1, ..., x_{k-1})$, und $W = \operatorname{span}_K(x_0, ..., x_{k-1})$ ein $f$-zyklischer UVR von $V$ mit Basis $B = (x_0, ..., x_{k-1})$ und $M_B(f|_W) = M_{\chi_{f|_W}}$.

*Beweis.* Da $\dim_K(V) = n$ ist $(x_0, ..., x_n)$ linear abhängig, es gibt also ein kleinstes $k$ mit $(x_0, ..., x_{k-1})$ linear unabhängig, aber $(x_0, ..., x_k)$ linear abhängig, folglich $x_k \in \operatorname{span}_K(x_0, ..., x_{k-1})$. Mit $x_k = f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$ ist dann Da $\dim_K(V) = n$ ist $(x_0, ..., x_n)$ linear abhängig, es gibt also ein kleinstes $k$ mit $(x_0, ..., x_{k-1})$ linear unabhängig, aber $(x_0, ..., x_k)$ linear abhängig, folglich $x_k \in \operatorname{span}_K(x_0, ..., x_{k-1})$. Mit $x_k = f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$ ist dann

$$M_B(f|_W) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -c_{k-1} \end{pmatrix}$$

somit $\chi_{f|_W} = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$, also $M_B(f|_W) = M_{\chi_{f|_W}}$. □

**Theorem 5.9 (Satz von Cayley-Hamiltion)**
Für $f \in \operatorname{End}_K(V)$ ist $\chi_f(f) = 0$.

*Beweis.* Sei $x \in V$. Definiere $x_i = f^i(x)$ und $W = \operatorname{span}_K(x_0, ..., x_{k-1})$ wie in Lemma 5.8. Sei $\chi_{f|_W} = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$, also $f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$. Wenden wir $\chi_{f|_W}(f) \in \operatorname{End}_K(V)$ auf $x$ an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi_{f|_W}(f)(x) &= \left(f^k + \sum_{i=1}^{k-1} c_i f^i\right)(x) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} -c_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} c_i x_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aus $\chi_{f|_W} | \chi_f$ (Beispiel 4.6) folgt somit $\chi_f(f)(x) = 0$, denn ist $\chi_f = Q \cdot \chi_{f|_W}$ mit $Q \in K[t]$, so ist $\chi_f(f) =$

$Q(f) \circ \chi_{f|_W}(f)$, also $\chi_f(f)(x) = Q(f)(\underbrace{\chi_{f|_W}(f)(x)}_{=0}) = 0$. Da $x \in V$ beliebig war, folgt $\chi_f(f) = 0 \in \mathrm{End}_K(V)$. □

**Folgerung 5.10**
Es gilt $P_f | \chi_f$. Insbesondere ist $\deg(P_f) \leq n$.

*Beweis.* Theorem 5.9 + Satz 5.4 □

**▶ Bemerkung 5.11**
Ist $B$ eine Basis von $V$ und $A = M_B(f)$, so ist $P_A = P_f$. Insbesondere ist $P_A = P_B$ für $A \sim B$. Als Spezialfall von Theorem 5.9 erhält man $\chi_A(A) = 0$ und $P_A | \chi_A$.

**▶ Bemerkung 5.12**
Der naheliegende "Beweis" $\underbrace{\chi_A}_{\in \mathrm{Mat}_n(K)} = \det(t\mathbb{1}_n - A)(A) = \det(A\mathbb{1}_n - A) = \det(0) = \underbrace{0}_{\in K}$ ist falsch!

# 6. Nilpotente Endomorphismen

▶ **Bemerkung 6.1**
Für $f \in \mathrm{End}_K(V)$ sind

- $f\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subseteq \mathrm{Ker}(f^1) \subseteq \mathrm{Ker}(f^2) \subseteq ...$
- $V = \mathrm{Im}(f^0) \supseteq \mathrm{Im}(f^1) \supseteq \mathrm{Im}(f^2) \supseteq ...$

Folgen von UVR von $V$. Nach der Kern-Bild-Formel III.7.13 ist

$$\dim_K(\mathrm{Ker}(f^i)) + \dim_K(\mathrm{Im}(f^i)) = \dim_K(V) \quad \forall i$$

Da $\dim_K(V) = n < \infty$ gibt es ein $d$ mit $\mathrm{Ker}(f^d) = \mathrm{Ker}(f^{d+i})$ und $\mathrm{Im}(f^d) = \mathrm{Im}(f^{d+i})$ für jedes $i \geq 0$.

■ **Beispiel 6.2**
$f = f_A$, $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) = \mathrm{Ker}(f^1) = ...$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subset \mathrm{Ker}(f^1) = \mathrm{Ker}(f^2) = ... = \mathrm{span}_K(e_2)$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subset \underbrace{\mathrm{Ker}(f^1)}_{=\mathrm{span}_K(e_1)} \subset \mathrm{Ker}(f^2) = ... = K^2$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subset \mathrm{Ker}(f^1) = \mathrm{Ker}(f^2) = ... = K^2$

**Lemma 6.3**
Seien $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$. Wenn $f$ und $g$ kommutieren, d.h. $f \circ g = g \circ f$, so sind die UVR $\mathrm{Ker}(g)$ und $\mathrm{Im}(g)$ $f$ invariant.

*Beweis.* Ist $x \in \mathrm{Ker}(f)$, so ist $g(f(x)) = f(g(x)) = f(0) = 0$, also $f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$. Für $g(x) \in \mathrm{Im}(g)$ ist $f(g(x)) = g(f(x)) \in \mathrm{Im}(g)$. □

**Satz 6.4 (Lemma von Fitting)**
Seien $V_i = \mathrm{Ker}(f^i)$, $W_i = \mathrm{Im}(f^i)$, $d = \min\{i : V_i = V_{i+1}\}$. Dann sind

$$\begin{aligned} \{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq ... \subsetneq V_d = V_{d+1} = ... \\ V = W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq ... \supsetneq W_d = W_{d+1} = ... \end{aligned}$$

Folgen $f$-invarianter UVR und $V = V_d \oplus W_d$.

*Beweis.* Da $f^i$ und $f^j$ für beliebige $i, j$ kommutieren, sind $V_i$ und $V_j$ nach Lemma 6.3 $f$-invariant für jedes $i$. Aus $\dim_K(V_i) + \dim_K(W_i) = n$ folgt $d = \min\{i : W_i = W_{i+1}\}$, insbesondere ist $\mathrm{Im}(f^d) = \mathrm{Im}(f^{d+1}) = f(\mathrm{Im}(f^d))$, somit $W_{d+i} = \mathrm{Im}(f^{d+i}) = W_d$ für $i \geq 0$, also auch $V_d = V_{d+i}$ für alle $i \geq 0$.
Insbesondere ist $f^d|_{W_d} : W_d \to W_{2d} = W_d$ surjektiv, also auch injektiv, also $V_d \cap W_d = \{0\}$. Aus der Dimensionsformel II.4.12 folgt dann $\dim_K(V_d + W_d) = \dim_K(V_d) + \dim_K(W_d) = \dim_K(V)$. Folglich ist $V_d + W_d = V$ und $V_d \cap W_d = \{0\}$, also $V = V_d \oplus W_d$. □

**Definition 6.5 (nilpotent)**
Ein $f \in \mathrm{End}_K(V)$ heißt nilpotent , wenn $f^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Analog heißt $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ nilpotent, wenn $A^k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Das kleinste $k$ mit $f^k = 0$ bzw. $A^k$ heißt die Nilpotenzklasse von $f$ bzw. $A$.

**Lemma 6.6**
Ist $f$ nilpotent, so gibt es eine Basis $B$ von $V$, für die $M_B(f)$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

*Beweis.* Induktion nach $n = \dim_K(V)$.
$n = 1$: $f^k = 0 \Rightarrow f = 0$
$n > 1$: Sei $k$ die Nilpotenzklasse von $f$ und $U = \mathrm{Ker}(f^{k-1})$. Dann ist $U \subset V$. Da $f^k = f^{k-1} \circ f$ ist $f(V) \subset U$, insbesondere $f|_U \in \mathrm{End}_K(U)$. Da $f|_U$ nilpotent ist, gibt es nach I.H. eine Basis $B_0$ von $U$, für die $M_B(f|_U)$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Ergänze $B_0$ zu einer Basis $B$ von $V$. Da $f(V) \subset U$ ist dann auch

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_0}(f|_U) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine strikte obere Dreiecksmatrix. □

**Satz 6.7**
Für $f \in \mathrm{End}_K(V)$ sind äquivalent:

1) $f$ ist nilpotent
2) $f^n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$
3) $P_f(t) = t^r$ für ein $r \leq n$
4) $\chi_f(t) = t^n$
5) Es gibt eine Basis $B$ von $V$, mit

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

*Beweis.*

- 1) $\Rightarrow$ 5): Lemma 6.6
- 5) $\Rightarrow$ 4): Beispiel 2.8
- 4) $\Rightarrow$ 3): Nach Folgerung 5.10 ist $P_f | \chi_f = t^n$, also $t^n = P_f(t)Q(t)$ mit $Q \in K[t]$. Schreibe $P_f(t) = t^a \cdot P_1(t), Q(t) = t^b \cdot Q_1(t)$ mit $a, b \in \mathbb{N}$, $P_1, Q_1 \in K[t]$, $P_1(0) \neq 0$, $Q_1(0) \neq 0$
  $\overset{3.8}{\Rightarrow} t^{n-(a+b)} = P_1(t)Q_1(t)$ und $(P_1 Q_1)(0) \neq 0$
  $\Rightarrow n - (a+b) = 0 \Rightarrow P_1 = 1$, somit $P_f(t) = t^a$
- 3) $\Rightarrow$ 2): $t^r = 0$, $r \leq n \Rightarrow f^n = 0$
- 2) $\Rightarrow$ 1): nach Definition □

**Folgerung 6.8**
Die Nilpotenzklasse eines nilpotenten Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ist höchstens $\dim_K(V)$.

**Folgerung 6.9**
Ist $d := \min\{i \mid \mathrm{Ker}(f^i) = \mathrm{Ker}(f^{i+1})\}$, so ist $d \leq \dim_K(\mathrm{Ker}(f)) = \mu_a(f, 0)$.

*Beweis.* Sei $V_d = \mathrm{Ker}(f^d)$, $W_d = \mathrm{Im}(f^d)$, $k = \dim_K(V_d)$. Da $V = V_d \oplus W_d$ ist $\chi_f = \chi_{f|_{V_d}} \cdot \chi_{f|_{W_d}}$. Da $f|_{V_d}$ nilpotent ist, ist $\chi_{f|_{V_d}} = t$ nach Satz 6.7. Da $f|_{W_d}$ injektiv ist, ist $\chi_{f|_{W_d}}(0) \neq 0$. Somit ist $\mu_a(f, 0) = \mu(\chi_f, 0) \overset{3.6}{=} k$. Da $\dim_K(\mathrm{Ker}(f^d)) > ... > \dim_K(\mathrm{Ker}(f)) > 0$ ist $k = \dim_K(\mathrm{Ker}(f^d)) \geq d$, falls $d > 0$, sonst klar. □

**▶ Bemerkung 6.10**
Die Bedeutung nilpotenter Endomorphismen beim Finden geeigneter Basen ergibt sich aus der folgenden Beobachtung:
Ist $A$ eine obere Dreiecksmatrix, so ist $A = D + N$, wobei $D$ eine Diagonalmatrix ist und $N$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Anders gesagt: Jeder trigonalisierbare Endomorphismus ist Summe aus einem diagonalisierbaren und einem nilpotenten Endomorphismus.

**Definition 6.11 (Jordan-Matrix)**
Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die <u>Jordan-Matrix</u>

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_k(K)$$

weiter setzen wir für $\lambda \in K$ $J_k(\lambda) := \lambda \mathbb{1} + J_k$.

**Lemma 6.12**
Die Jordan-Matrix $J_k$ ist nilpotent von Nilpotenzklasse $k$.

*Beweis.* Es ist $(J_k)^r = (\delta_{i+r,j})_{i,j}$ für $r \geq 1$. □

**Satz 6.13**
Ist $f$ nilpotent von Nilpotenzklasse $k$, so gibt es eindeutig bestimmte $r_1, .., r_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\sum\limits_{d=1}^{k} dr_d = n$ und eine Basis $B$ von $V$ mit

$$M_B(f) = \mathrm{diag}(\underbrace{J_k, ..., J_k}_{r_k \text{ viele}}, ..., \underbrace{J_1, ..., J_1}_{r_1 \text{ viele}})$$

*Beweis.* Sei $U_i = \mathrm{Ker}(f^i)$. Nach Satz 6.4 haben wir eine Folge $\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset ... \subset U_k = V$ mit $f(U_i) \subseteq U_{i-1}$ für alle $i > 0$.
Wir konstruieren eine Zerlegung $V = \bigoplus\limits_{d=1}^{k} W_d$ mit $U_i = U_{i-1} \oplus W_i$, $f(W_i) \subseteq W_{i-1}$, $f|_{W_d}$ injektiv für $i > 1$.

$$\begin{aligned}
V &= U_k \\
V &= U_{k-1} \oplus W_k \\
V &= U_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k \\
&\vdots \\
V &= U_0 \oplus W_1 \oplus ... \oplus W_k
\end{aligned}$$

Wähle $W_k$ mit $V = U_k = U_{k-1} \oplus W_k$. Ist $k > 1$, so ist $W_k \cap \mathrm{Ker}(f) \subseteq W_k \cap U_{k-1} = \{0\}$, also $f|_{W_k}$ ist injektiv. Des weiteren ist $f(W_k) \subseteq U_{k-1}$ und aus $W_k \cap U_{k-1} = \{0\}$ folgt $f(W_k) \cap U_{k-2} = \{0\}$. Wir können deshalb $W_{k-1}$ mit $U_{k-1} = U_{k-2} \oplus W_{k-1}$ und $f(W_k) \subseteq W_{k-1}$ wählen. Somit ist $V = U_{k-1} \oplus W_k = U_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k$. Wir setzen dies fort und erhalten $V = U_0 \oplus W_1 \oplus ... \oplus W_k$ mit $f(W_i) \subseteq W_{i-1}$ und $f|_{W_i}$ injektiv für $i > 1$, wobei $U_0 = \{0\}$ und $W_1 = \mathrm{Ker}(f)$.
Sie $r_d = \dim_K(W_d) - \dim_K(W_{d+1})$, wobei wir $W_{k+1} = \{0\}$. Wähle nun eine Basis $(x_{k,1}, ..., x_{k,r_k})$ von $W_k$. Ist $k > 1$, so ist $f|_{W_k}$ injektiv und wir können $(f(x_{k,1}), ..., f(x_{k,r_k}))$ durch Elemente $x_{k-1,1}, ..., x_{k-1,r_{k-1}}$ zu einer Basis von $W_{k-1}$ ergänzen, und so weiter.
Da $V = \bigoplus\limits_{d=1}^{k} W_d$ ist

$$B = \{f^i(x_{d,j}) \mid d = 1, ..., k, j = 1, ..., r_d, i = 0, ..., d-1\}$$

eine Basis von $V$, die bei geeigneter Anordnung das Gewünschte leistet.
Es bleibt zu zeigen, dass $r_1, ..., r_k$ eindeutig bestimmt sind. Ist $B_0$ eine Basis, für die $M_{B_0}(f)$ in der gewünschten Form ist, so ist

$$\begin{aligned}
\dim_K(U_1) &= \sum_{d=1}^{k} r_d \\
\dim_K(U_2) &= \sum_{d=2}^{k} r_d + \sum_{d=1}^{k} r_d \\
&\vdots \\
\dim_K(U_k) &= \sum_{d=k}^{k} r_d + ... + \sum_{d=1}^{k} r_d
\end{aligned}$$

woraus man sieht, dass $r_1, ..., r_k$ durch $U_1, ..., U_k$, also durch $f$ eindeutig bestimmt. $\square$

■ **Beispiel 6.14**
Sei $f = f_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, A^3 = 0$$

$\Rightarrow k = 3, U_0 = \{0\}, U_1 = \mathbb{R}e_1, U_2 = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2, U_3 = V$.
Wähle $W_3$ mit $V = U_3 = U_2 \oplus W_3$, z.B. $W_3 = \mathbb{R}e_3$.
Wähle $W_2$ mit $U_2 = U_1 \oplus W_2$ und $f(W_3) \subseteq W_2$, also

$$W_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setze $W_1 = U_1 = \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}e_1 \Rightarrow$ Basis $B = (f^2(e_3), f(e_3), e_3)$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

# 7. Die Jordan-Normalform

**Definition 7.1 (Hauptraum)**
Der Hauptraum von $f$ zum EW $\lambda$ der Vielfachheit $r = \mu_a(f,\lambda)$ ist

$$\mathrm{Hau}(f,\lambda) = \mathrm{Ker}\left((f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^r\right)$$

**Lemma 7.2**
$\mathrm{Hau}(f,\lambda)$ ist ein $f$-invarianter UVR der Dimension $\dim_K(\mathrm{Hau}(f,\lambda)) = \mu_a(f,\lambda)$, auf dem $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ nilpotent ist und $\chi_{f|_{\mathrm{Hau}(f,\lambda)}} = (t-\lambda)^{\mu_a(f,\lambda)}$

*Beweis.* $f$ kommutiert sowohl mit $f$ als auch mit $\mathrm{id}_V$, somit auch mit $(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^r$. Die $f$-Invarianz von $U = \mathrm{Hau}(f,\lambda)$ folgt aus Lemma 6.3. Nach Folgerung 6.9 ist $\dim_K(U) = \mu_a(f - \lambda\,\mathrm{id}_V, 0)$ und da $\chi_f(t) = \chi_{f-\lambda\,\mathrm{id}_V}(t-\lambda)$ ist $\mu_a(f,\lambda) = \mu(\chi_f,\lambda) = \mu_a(f - \lambda\,\mathrm{id}_V, 0)$. Da $f - \lambda\,\mathrm{id}_V|_U$ nilpotent ist $\chi_{f-\lambda\,\mathrm{id}_V|_U}(t) = t^r$, somit $\chi_{f|_U}(t) = (t-\lambda)^r$. □

**Satz 7.3 (Hauptraumzerlegung)**
Ist $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t-\lambda_i)^{r_i}$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$ paarweise verschieden und $r_1, ..., r_m \in \mathbb{N}$, so ist $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ mit $V_i = \mathrm{Hau}(f,\lambda_i)$ eine Zerlegung in $f$-invariante UVR und für jedes $i$ ist $\chi_{f|_{V_i}}(t) = (t-\lambda_i)^{r_i}$.

*Beweis.* Induktion nach $m$.
$m=1$: $r_1 = n \overset{7.2}{\Rightarrow} V = V_1$.
$m-1 \to m$: Nach Satz 6.4 ist $V = V_1 \oplus W_1$ mit $W_1 = \mathrm{Im}((f - \lambda_i\,\mathrm{id}_V)^r)$ eine Zerlegung in $f$-invariante UVR mit $\dim_K(V_1) = r_1$, $\dim_K(W_1) = n - r_1$. Somit ist $\chi_f = \chi_{f|_{V_1}} \cdot \chi_{f|_{W_1}}$ und $\chi_{f|_{V_1}} \overset{7.2}{=} (t-\lambda_1)^{r_1}$ also $\chi_{f|_{W_1}} = \prod_{i=2}^m (t-\lambda_i)^{r_i}$. Nach I.H. ist also $W_1 = \bigoplus_{i=2}^m \mathrm{Hau}(f|_{W_1},\lambda_i)$. Es ist für $i \geq 2$ $\mathrm{Hau}(f|_{W_1},\lambda_i) \subseteq \mathrm{Hau}(f,\lambda_i) = V_i$ und da $\dim_K(\mathrm{Hau}(f|_{W_1},\lambda_i)) = r_i = \dim_K(\mathrm{Hau}(f,\lambda_i))$ gilt Gleichheit. Damit ist

$$\begin{aligned} V &= V_1 \oplus W_1 \\ &= V_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^m \mathrm{Hau}(f|_{W_1},\lambda_i) \\ &= V_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^m V_i \\ &= \bigoplus_{i=1}^m V_i \end{aligned}$$

□

■ **Beispiel 7.4**
$f = f_A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \\ & 1 & 4 \\ & & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

$\chi_A(t) = (t-1)^2(t-2) \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \underbrace{\mathrm{Hau}(f,1)}_{\dim=2} \oplus \underbrace{\mathrm{Hau}(f,2)}_{\dim 1}$
$\mathrm{Hau}(f,1) = \mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^2) = L((A-\mathbb{1})^2, 0)$
$\mathrm{Hau}(f,2) = \mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{id}) = \mathrm{Eig}(f,2) = L(A-2\mathbb{1},0)$

$$A-\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \\ & -1 & 4 \\ & & 0 \end{pmatrix}, (A-\mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & & 12 \\ & 0 & 4 \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \mathrm{Hau}(f,1) = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$$

$$A-2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & \\ & -1 & 4 \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \mathrm{Hau}(f,2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 1 \end{pmatrix} & \\ & 2 \end{pmatrix}$$

**Theorem 7.5 (Jordan-Normalform)**
Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom $\chi_f$ in Linearfaktoren zerfällt. Dann gibt es $r \in \mathbb{N}$, $\mu_1, ..., \mu_r \in K$ und $k_1, ..., k_r \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^r k_i = \dim_K(V)$ und eine Basis $B$ von $V$ mit

$$M_B(f) = \mathrm{diag}(J_{k_1}(\mu_1), ..., J_{k_r}(\mu_r))$$

Die Paare $(\mu_1, k_1), ..., (\mu_r, k_r)$ heißen die JORDAN-Invarianten von $f$ und sind bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Schreibe $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t-\lambda_i)^{r_i}$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$ paarweise verschieden, $r_i \in \mathbb{N}$. Sei $V_i = \mathrm{Hau}(f, \lambda_i)$. Nach Satz 7.3 ist $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ eine Zerlegung in $f$-invariante UVR. Für jedes $i$ wenden wir Satz 6.13 auf $(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_V)|_{V_i}$ an und erhalten eine Basis $B_i$ von $V_i$ und $k_{i,1} \geq ... \geq k_{i,s_i}$ mit

$$M_B((f-\lambda_i\,\mathrm{id})|_{V_i}) = \mathrm{diag}(J_{k_{i,1}}, ..., J_{k_{i,s_i}})$$

Es folgt $M_{B_i}(f|_{V_i}) = M_{B_i}(\lambda_i\,\mathrm{id}_{V_i}) + M_{B_i}((f-\lambda_i\,\mathrm{id}_V)|_{V_i})$. Ist nun $B$ die Vereinigung der $B_i$, so hat $M_B(f)$ die gewünschte Form. Die Eindeutigkeit der JORDAN-Invarianten folgt aus der Eindeutigkeit der $k_{i,j}$ in Lemma 6.3.□

▶ **Bemerkung 7.6**

Ist $K$ algebraisch abgeschlossen, so haben wir nun eine (bis auf Permutationen) eindeutige Normalform für Endomorphismen $f \in \mathrm{End}_K(V)$ gefunden. Aus ihr lassen sich viele Eigenschaften des Endomorphismus leicht ablesen.

**Folgerung 7.7**

Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ trigonalisierbar mit $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t-\lambda_i)^{\mu_a(f,\lambda_i)}$, $P_f(t) = \prod_{i=1}^m (t-\lambda_i)^{d_i}$ und JORDAN-Invarianten $(\mu_1, k_1), ..., (\mu_r, k_r)$. Mit $J_i = \{j \mid \mu_j = \lambda_i\}$ ist dann

$$\mu_g(f, \lambda_i) = |J_i|$$
$$\mu_a(f, \lambda_i) = \sum_{j \in J_i} k_j$$
$$d_i = \max\{k_j \mid j \in J_i\}$$

*Beweis.*
- $\mu_a$: klar, da $\chi_f(t) = \prod_{j=1}^r (t-\mu_j)^{k_j} = \prod_{i=1}^m (t-\lambda_i)^{\mu_a(f,\lambda_i)}$
- $\mu_g$: lese Basis von $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ aus JORDAN-NF: Jeder Block $J_{k_j}(\lambda_i)$ liefert ein Element der Basis.
- $d_i$: folgt, da $J_{k_j}$ nilpotent von Nilpotenzklasse $k_j$ ist (Lemma 6.12). □

**Folgerung 7.8**

Genau dann ist $f$ diagonalisierbar, wenn

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \underset{i}{\lambda})^{r_i} \quad \lambda_1, ..., \lambda_m \in K \text{ paarweise verscheiden und}$$
$$P_f(t) = \prod_{i=1}^m m(t-\lambda_i)$$

*Beweis.* Genau dann ist $f$ diagonalisierbar, wenn $f$ trigonalisierbar ist und die JORDAN-NF die Diagonalmatrix ist (Eindeutigkeit der JNF), also $k_j = 1$ für alle $j$. Nach Folgerung 7.7 ist dies äquivalent dazu, dass $d_i = 1$ für alle $i$, also $P_f = \prod_{i=1}^m (t-\lambda_i)$. □

▶ **Bemerkung 7.9**

Wider definiert man die JORDAN-Invarianten, etc. von einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ als die JORDAN-Invarianten von $f_A \in \mathrm{End}_K(K^n)$.

**Folgerung 7.10**

Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ trigonalisierbar. Genau dann ist $A \sim B$, wenn $A$ und $B$ die gleichen JORDAN-Invarianten haben.

*Beweis.* Existenz und Eindeutigkeit der JORDAN-Normalform. □

## Kapitel II

# *Skalarprodukte*

In diesem ganzen Kapitel seien

- $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$
- $n \in \mathbb{N}$
- $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-VR

## 1. Das Standardskalarprodukt

Sei zunächst $K = \mathbb{R}$.

**Definition 1.1 (Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}$)**
Auf den Standardraum $V = \mathbb{R}^n$ definiert man das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}$ $\langle . \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\langle x, y \rangle = x^t y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

**Satz 1.2**
Das Standardskalarprodukt erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist:

$$\begin{aligned} \langle x + x', y \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle &= = \lambda \langle x, y \rangle \\ \langle x, y + y' \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

- Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\langle x, y \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

*Beweis.*
- klar
- klar
- $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq x_j^2$ für jedes $j \Rightarrow \langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle > 0$ falls $x_j \neq 0$ für ein $j$. $\square$

**Definition 1.3 (euklidische Norm in $\mathbb{R}$)**
Auf $K = \mathbb{R}^n$ definiert man euklidische Norm in $\mathbb{R}$ $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

**Satz 1.4 (Ungleichung von Cauchy-Schwarz)**
Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Gleichheit genau dann, wenn $x$ und $y$ linear abhängig sind.

*Beweis.* siehe Analysis, siehe VI.§3 □

**Satz 1.5**
Die euklidische Norm erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

*Beweis.*
- Satz 1.2
- Satz 1.2
- $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \overset{1.4}{\Rightarrow} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ □

Sei nun $K = \mathbb{C}$.

**Definition 1.6 (komplexe Konjugation, Absolutbetrag)**
Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definiert man $\overline{z} = x - iy$ heißt komplexe Konjugation .. Man definiert den Absolutbetrag von $z$ als

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Für $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$ sehen wir

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$$

**Satz 1.7**
Komplexe Konjugation ist ein Ringautomorphismus von $\mathbb{C}$ mit Fixkörper

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = \overline{z}\} = \mathbb{R}$$

*Beweis.* siehe LAAG1 H47 □

**Folgerung 1.8**
Für $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{A^t} = \overline{A}^t$, $\overline{S^{-1}} = \overline{S}^{-1}$

*Beweis.* Satz 1.7, einfache Übung □

**Definition 1.9 (Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}$)**
Auf $K = \mathbb{C}^n$ definiert man das Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}$ $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ durch

$$\langle x, y \rangle = x^t \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$$

**Satz 1.10**
Das komplexe Standardskalarprodukt erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für $x, x', y, y' \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist:

$$\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$$
$$\langle \lambda x, y \rangle == \lambda \langle x, y \rangle$$
$$\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$$
$$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$$

- Für $x, y \in \mathbb{C}^n$ ist $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- Für $x \in \mathbb{C}^n$ ist $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

*Beweis.*
- klar
- klar
- $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ □

**Definition 1.11 (euklidische Norm in $\mathbb{C}$)**
Auf $V = \mathbb{C}$ definiert man die euklidische Norm in $\mathbb{C}$ $\| \cdot \| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

▶ **Bemerkung 1.12**
Schränkt man das komplexe Skalarprodukt auf den $\mathbb{R}^n$ ein, so erhält man das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$. Wir werden ab jetzt die beiden Fälle $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ parallel behandeln. Wenn nicht anders angegeben, werden wir die Begriffe für den komplexen Fall benutzen, aber auch den reellen Fall einschließen.

# 2. Bilinearformen und Sesquilinearformen

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

**Definition 2.1 (Bilinearform, Sesquilinearform)**
Eine Bilinearform ($K = \mathbb{R}$) bzw. Sesquilinearform ($K = \mathbb{C}$) ist eine Abbildung $s : V \times V \to K$ für die gilt:

- Für $x, x', y \in V$ ist $s(x + x', y) = s(x, y) + s(x', y)$
- Für $x, y, y' \in V$ ist $s(x, y + y') = s(x, y) + s(x, y')$
- Für $x, y \in V$, $\lambda \in K$ ist $s(\lambda x, y) = \lambda s(x, y)$
- Für $x, y \in V$, $\lambda \in K$ ist $s(x, \lambda y) = \overline{\lambda} s(x, y)$

▶ **Bemerkung 2.2**
Im Fall $K = \mathbb{R}$ ist $\lambda = \overline{\lambda}$. Wir werden der Einfachheit halber auch in diesem Fall von Sesquilinearformen sprechen, vgl. Bemerkung 1.12

■ **Beispiel 2.3**
Für $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ist $s_A : K^n \times K^n \to K^n$ gegeben durch

$$s_A(x, y) = x^t A \overline{y} = x^t \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{y}_j \right)_i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_j$$

eine Sesquilinearform auf $V = K^n$.

**Definition 2.4**
Sei $s$ eine Sesquilinearform auf $V$ und $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von $V$. Die darstellende Matrix von $s$ bzgl. $B$ ist

$$M_B(s) = (s(v_i, v_j))_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(K)$$

■ **Beispiel 2.5**
Die darstellende Matrix des Standardskalarprodukts $s = s_{\mathbb{1}_n}$ auf den Standardraum $V = K^n$ bzgl. der Standardbasis $\mathcal{E}$ ist

$$M_{\mathcal{E}}(s) = \mathbb{1}_n$$

**Lemma 2.6**
Seien $v, w \in V$. Mit $x = \Phi_B^{-1}(v)$, $y = \Phi_B^{-1}(w)$ und $A = M_B(s)$ ist $s(v, w) = x^t A \overline{y} = s_A(x, y)$.

*Beweis.* Achtung: $v_i$ beschreibt das $i$-te Element der Basis $B$!
$s(v, w) = s(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i \overline{y} s(v, v_j) = x^t A \overline{y}$ □

**Satz 2.7**
ISei $B$ eine Basis von $V$. Die Abbildung $s \mapsto M_B(s)$ ist eine Bijektion zwischen den Sesquilinearformen auf $V$ und $\mathrm{Mat}_n(K)$.

*Beweis.*
- injektiv: Lemma 2.6
- surjektiv: Für $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ wird durch $s(v,w) = \Phi_B^{-1}(v)^t \cdot A \cdot \overline{\Phi_B^{-1}(w)}$ eine Sesquilinearform auf $V$ mit $M_B(s) = (s(v_i, w_j))_{i,j} = (e_i^t A \overline{e_j})_{i,j} = (e_i A e_j)_{i,j} = A$ definiert. □

**Satz 2.8 (Transformationsformel)**
Seien $B$ und $B'$ Basen von $V$ und $s$ eine Sesquilinearform auf $V$. Dann gilt:

$$M_{B'}(s) = (T_B^{B'})^t \cdot M_B(s) \cdot \overline{T_B^{B'}}$$

*Beweis.* Seien $v, w \in V$. Definiere $A = M_B(s)$, $A' = M_{B'}(s)$, $T = T_B^{B'}$ und $x, y, x', y' \in K^n$ mit $v = \Phi_B(x) = \Phi_B(x')$, $w = \Phi_B(y) = \Phi_B(y')$. Dann ist $x = Tx'$, $y = Ty'$ und somit

$$\begin{aligned}(x')^t A' \overline{y'} &\overset{2.6}{=} s(v,w) \\ &\overset{2.6}{=} x^t A \overline{y} \\ &= (Tx')^t A \overline{Ty'} \\ &= (x')^t T^t A \overline{T} \overline{y'}\end{aligned}$$

Da $v, w \in V$ und somit $x', y' \in K$ beliebig waren, folgt $A = T^t A \overline{T}$. □

■ **Beispiel 2.9**
Sei $s$ das Standardskalarprodukt auf dem $K^n$ und $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis des $K^n$. Dann ist

$$M_B(s) = (T_{\mathcal{E}}^B)^t \cdot M_{\mathcal{E}}(s) \cdot \overline{T_{\mathcal{E}}^B} = B^t \cdot \mathbb{1}_n \cdot \overline{B} = B^t B$$

wobei $B = (b_1, ..., b_n) \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

**Satz 2.10**
Sei $s$ eine Sesquilinearform auf $V$. Dann sind äquivalent:

- Es gibt $0 \neq v \in V$ mit $s(v,w) = 0$ für alle $w \in V$.
- Es gibt $0 \neq w \in V$ mit $s(v,w) = 0$ für alle $v \in V$.
- Es gibt eine Basis $B$ von $V$ mit $\det(M_B(s)) = 0$.
- Für jede Basis $B$ von $V$ gilt $\det(M_B(s)) = 0$.

*Beweis.* Sei $B$ eine Basis von $V$, $v = \Phi_B(x)$ und $A = M_B(s)$. Genau dann ist die (semilineare) Abbildung $w \mapsto s(v,w)$ die Nullabbildung, wenn $x^t A \overline{y} = 0$ für alle $y \in K^n$, also wenn $0 = x^t A$, d.h. $A^t x = 0$. Somit ist (1) genau dann erfüllt, wenn $A^t$ nicht invertierbar ist, also wenn $0 = \det(A^t) = \det(A)$. Damit (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) gezeigt und (2) $\iff$ (4) zeigt man analog. □

**Definition 2.11 (ausgeartet)**
Eine Sesquilinearform $s$ auf $V$ heißt ausgeartet , wenn eine der äquivalenten Bedingungen aus Satz 2.10 erfüllt ist, sonst nicht-ausgeartet.

**Definition 2.12 (symmetrisch, hermitesch)**
Eine Sesquilinearform $s$ auf $V$ heißt symmetrisch , wenn bzw. hermitesch , wenn

$$s(x,y) = \overline{s(y,x)} \quad \text{für alle } x, y \in V$$

Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt symmetrisch bzw. hermitesch, wenn $A = A^* = \overline{A}^t = \overline{A^t}$.

**Satz 2.13**
Sei $s$ eine Sesquilinearform auf $V$ und $B$ eine Basis von $V$. Genau dann ist $s$ hermitesch, wenn $M_B(s)$ dies ist.

*Beweis.* ($\Rightarrow$): klar aus Definition von $M_B(s)$.
($\Leftarrow$): $x = \Phi_B^{-1}$, $y = \Phi_B^{-1}(w)$, $\overline{s(v,w)} = \overline{s(v,w)^t} = \overline{(x^t A\overline{y})^t} = y^t \overline{A^t}\,\overline{x} = s(w,v)$ □

**Satz 2.14**
Für $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ ist $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$, $(A^*)^* = A$ und $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$.

*Beweis.* Folgerung 1.8, III.1.14, III.1.15 □

# 3. Euklidische und unitäre Vektorräume

**Lemma 3.1**
Sei $s$ eine hermitesche Sesquilinearform auf $V$. Dann ist $s(x,x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in V$.

*Beweis.* Da $s$ hermitesch ist, ist $s(x,x) = \overline{s(x,x)}$, also $s(x,x) \in \mathbb{R}$. □

**Definition 3.2 (quadratische Form)**
Sei $s$ eine hermitesche Sesquilinearform auf $V$. Die quadratische Form zu $s$ ist die Abbildung

$$q_s : \begin{cases} V \to \mathbb{R} \\ x \mapsto s(x,x) \end{cases}$$

▶ **Bemerkung 3.3**
Die quadratische Form $q_s$ erfüllt das $q_s(\lambda x) = |\lambda|^2 \cdot q_s(x)$ für alle $x \in V$, $\lambda \in K$. Im Fall $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)^t$, $s = s_A$, $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ist $q_s(x) = s_A(x,x) = x^t A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ein "quadratisches Polynom in den Variablen $x_1, ..., x_n$".

**Satz 3.4 (Polarisierung)**
Sei $s$ ein hermitesche Sesquilinearform auf $V$. Dann gilt für $x, y \in V$:

$$s(x,y) = \frac{1}{2}(q_s(x+y) - q_s(x) - q_s(y)) \quad K = \mathbb{R}$$
$$s(x,y) = \frac{1}{4}(q_s(x+y) - q_s(x-y) + iq_s(x+iy) - iq_s(x-iy)) \quad K = \mathbb{C}$$

*Beweis.* Im Fall $K = \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} q_s(x+y) - q_s(x) - q_s(y) &= s(x+y, x+y) - s(x,x) - s(y,y) \\ &= s(x,x) + s(x,y) + s(y,x) + s(y,y) - s(x,x) - s(y,y) \\ &= s(x,y) + s(y,x) - 2s(x,y) \end{aligned}$$

Im Fall $K = \mathbb{C}$: ÜA □

**Definition 3.5 ((semi)definit, euklidischer VR, unitärer VR)**
Sei $s$ eine hermitesche Sesquilinearform auf $V$. Ist $s(x,x) \geq 0$ für alle $x \in V$, so heißt $s$ positiv semidefinit . Ist $s(x,x) > 0$ für alle $0 \neq x \in V$, so heißt $s$ positiv definit (oder ein Skalarprodukt).

Eine hermitesche Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt positiv (semi)definit, wenn $s_A$ dies ist.

Einen endlichdimensionalen $K$-VR zusammen mit positiv definiten hermiteschen Sesquilinearformen nennt man einen euklidischen bzw. unitären VR (oder auch Prähilbertraum). Wenn nicht anderes angegeben, notieren wir die Sesquilinearform mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

■ **Beispiel 3.6**
Der Standardraum $V = K^n$ zusammen mit dem Standardskalarprodukt ist ein euklidischer bzw. unitärer VR.

■ **Beispiel 3.7**
Ist $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$, so ist $s_A$ genau dann positiv definit, wenn $\lambda_i > 0$ für alle $i$, und positiv semidefinit, wenn $\lambda_i \geq 0$ für alle $i$.

**Satz 3.8**
Ist $V$ ein unitärer VR und $U \subseteq V$ ein UVR, so ist $U$ mit der Einschränkung des Skalarprodukts wieder ein unitärer VR.

*Beweis.* klar, die Einschränkung ist wieder positiv definit. □

**Definition 3.9**
Ist $V$ ein unitärer VR, so definiert man die Norm von $x \in V$ als

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

**Satz 3.10**
Die Norm eines unitären VR erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für $x \in V$ ist $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- Für $x \in V$ und $\lambda \in K$ ist $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- Für $x, y \in V$ ist $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

*Beweis.*
- Das Skalarprodukt ist positiv definit.
- klar
- Wie im Fall im $\mathbb{R}^n$ □

**Satz 3.11**
Ist $V$ ein unitärer VR, so gilt für $x, y \in V$:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn $x$ und $y$ linear abhängig sind.

*Beweis.* Für $y = 0$ ist die Aussage klar.
Sei also $y \neq 0$. Für $\lambda, \mu \in K$ ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y\rangle \\ &= \lambda\overline{\lambda} \cdot \langle x, x\rangle + \mu\overline{\mu} \cdot \langle y, y\rangle + \lambda\overline{\mu} \cdot \langle x, y\rangle + \mu\overline{\lambda} \cdot \langle y, x\rangle \end{aligned}$$

Setzt man $\lambda = \overline{\lambda} = \langle y, y\rangle > 0$ und $\mu = -\langle x, y\rangle$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda \cdot \|x\|^2\|y\|^2 + \mu\overline{\mu}\lambda - \lambda\mu\overline{\mu} - \langle x, y\rangle\,\overline{\lambda}\,\langle y, x\rangle \\ &= \lambda(\|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2) \end{aligned}$$

Teilen durch $\lambda$ und Wurzelziehen liefert die Ungleichung. Gilt dort Gleichheit, so ist $\|\lambda x + \mu y\| = 0$ folglich (da $\lambda \neq 0$) sind dann $x, y$ linear unabhängig. Ist $x = \alpha y$ mit $\alpha \in K$, so ist $|\langle x, y\rangle| = |\alpha| \cdot \|y\|^2 = \|x\| \cdot \|y\|$ □

# 4. Orthogonalität

Sei $V$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum.

**Definition 4.1 (orthogonal, orthogonales Komplement)**
Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen orthogonal , in Zeichen $x \perp y$, wenn $\langle x, y\rangle = 0$. Zwei Mengen $X, Y \subseteq V$ sind orthogonal, in Zeichen $X \perp Y$, wenn $x \perp y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

Für $U \subseteq V$ bezeichnet

$$U^{\perp} = \{x \in V \mid x \perp u \text{ für alle } u \in U\}$$

das orthogonale Komplement zu $U$.

**Lemma 4.2**
Für $x, y \in V$ ist

- $x \perp y \iff y \perp x$
- $x \perp 0$
- $x \perp x \iff x = 0$

*Beweis.* klar □

**Satz 4.3**
Für $U \subseteq V$ ist $U^{\perp}$ ein Untervektorraum von $V$ mit $U \perp U^{\perp}$ und $U \cap U^{\perp} \subseteq \{0\}$.

*Beweis.* Linearität des Skalarprodukts im ersten Argument liefert, dass $U^{\perp}$ ein Untervektorraum ist. Die Aussage $U^{\perp} \perp U$ ist trivial, $U \perp U^{\perp}$ folgt dann aus Lemma 4.2. Ist $u \in U \cap U^{\perp}$, so ist insbesondere $u \perp u$, also $u = 0$ nach Lemma 4.2. □

**Definition 4.4 (orthonormal)**
Eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ von Elementen von $V$ ist orthogonal, wenn $x_i \perp x_j$ für alle $i \neq j$, und orthonormal , wenn zusätzlich $\|x_i\| = 1$ für alle $i$. Eine orthogonale Basis nennt man eine Orthogonalbasis, eine orthonormale Basis nennt man eine Orthonormalbasis.

▶ **Bemerkung 4.5**
Eine Basis $B$ ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn die darstellende Matrix des Skalarprodukts bezüglich $B$ die Einheitsmatrix ist. (Beispiel: Standardbasis des Standardraum bezüglich des Standardskalarprodukts)

**Lemma 4.6**
Ist die Familie $(x_i)_{i\in I}$ orthogonal und $x_i \neq 0$ für alle $i \in I$, so ist $(x_i)_{i\in I}$ linear unabhängig.

*Beweis.* Ist $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$, $\lambda_i \in K$, fast alle gleich 0, so ist $0 = \left\langle \sum_{i\in I} \lambda_i x_i, x_j \right\rangle = \sum_{i\in I} \lambda_i \langle x_i, x_j\rangle = \lambda_j \langle x_j, x_j\rangle$ Aus $x_j \neq 0$ folgt $\langle x_j, x_j\rangle > 0$ und somit $\lambda_j = 0$ für jedes $j \in I$. □

**Lemma 4.7**
Ist $(x_i)_{i\in I}$ orthogonal und $x_i \neq 0$ für alle $i$, so ist $(y_i)_{i\in I}$ mit

$$y_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i$$

orthonormal.

*Beweis.* Für alle $i$ ist $\langle y_i, y_i\rangle = \frac{1}{\|x_i\|^2}\langle x_i, x_i\rangle = 1$.
Für alle $i \neq j$ ist $\langle y_i, y_j\rangle = \frac{1}{\|x_i\|\cdot\|x_j\|}\langle x_i, x_j\rangle = 0$. □

**Satz 4.8**
Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $B = (x_1, ..., x_k)$ eine Orthonormalbasis von $U$. Es gibt genau einen Epimorphismus $\mathrm{pr}_U : V \to U$ mit $\mathrm{pr}_U|_U = \mathrm{id}_U$ und $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_U) \perp U$, insbesondere also $x - \mathrm{pr}_U \perp U$ für alle $x \in V$, genannt die orthogonale Projektion auf $U$, und dieser ist geben durch

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i\rangle x_i \tag{1}$$

*Beweis.* Sei zunächst $pr_U$ durch (1) gegeben. Die Linearität von $\mathrm{pr}_U$ folgt aus (S1) und (S3). Für $u = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in U$ ist $\langle u, x_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, x_j\right\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle x_i, x_j\rangle = \lambda_j$, woraus $\mathrm{pr}_U(u) = u$. Somit ist $\mathrm{pr}_U|_U = \mathrm{id}_U$, und insbesondere ist $pr_U$ surjektiv. Ist $\mathrm{pr}_U(x) = 0$, so ist $\langle x, x_i\rangle = 0$ für alle $i$., woraus mit (S2) und (S4) sofort $x \perp U$ folgt. Somit ist $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_U) \perp U$.
Für $x \in V$ ist $\mathrm{pr}_U(x - \mathrm{pr}_U(x)) = \mathrm{pr}_U(x) - \mathrm{pr}_U(\mathrm{pr}_U(x)) = \mathrm{pr}_U(x) - \mathrm{pr}_U(x) = 0$, also $x - \mathrm{pr}_U(x) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_U) \subseteq U^\perp$.
Ist $f : V \to U$ ein weiterer Epimorphismus mit $f|_U = \mathrm{id}_U$ und $\mathrm{Ker}(f) \perp U$, so ist

$$\underbrace{\mathrm{pr}_U(x)}_{\in U} - \underbrace{f(x)}_{\in U} = \underbrace{\mathrm{pr}_U(x) - x}_{\in U^\perp} - \underbrace{f(x) - x}_{\in U^\perp} \in U \cap U^\perp = \{0\}$$

für jedes $x \in V$, somit $f = \mathrm{pr}_U$. □

**Theorem 4.9 (Gram-Schmidt-Verfahren)**
Ist $(x_1, ..., x_n)$ eine Basis von $V$ und $k \leq n$ mit $(x_1, ..., x_k)$ orthonormal, so gibt es eine Orthonormalbasis $(y_1, ..., y_n)$ von $V$ mit $y_i = x_i$ für $i = 1, ..., k$ und $\mathrm{span}_K(y_1, ..., y_l) = \mathrm{span}_K(x_1, ..., x_l)$ für $l = 1, ..., n$.

*Beweis.* Induktion nach $d = n - k$.
$d = 0$: nichts zu zeigen
$d - 1 \to d$: Für $i \neq k+1$ definiere $y_I = x_i$. Sei $U = \mathrm{span}_K(x_1, ..., x_k)$, $\tilde{x_{k+1}} = x_{k+1} - \mathrm{pr}_U(x_{k-1})$. Dann ist $\tilde{x_{k+1}} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_U) \subseteq U^\perp$ (vgl. Satz 4.8) und $\mathrm{span}_K(x_1, ..., x_k, \tilde{x_{k+1}}) = \mathrm{span}_K(x_1, ..., x_{k+1})$. Setze $y_{k+1} = \frac{1}{\|\tilde{x_{k+1}}\|}\tilde{x_{k+1}}$. Dann ist $(y_1, ..., y_n)$ eine Basis von $V$ mit $(y_1, ..., y_{k+1})$ orthonormal (vgl. Lemma 4.7). Nach Induktionshypothese gibt es eine Orthonormalbasis von $V$, die das Gewünschte leistet. □

**Folgerung 4.10**
Jeder endlichdimensionale euklidische bzw. unitäre Vektorraum $V$ besitzt eine Orthonormalbasis.

*Beweis.* Wähle irgendeine Basis von $V$ und wende Theorem 4.9 mit $k = 0$ an. □

**Folgerung 4.11**
Ist $U$ ein Untervektorraum von $V$, so ist $V = U \oplus U^\perp$ und $(U^\perp)^\perp = U$.

*Beweis.* Wähle eine Orthonormalbasis von $U$ (vgl. Folgerung 4.10), $B = (x_1, ..., x_k)$ und ergänze diese zu einer Orthonormalbasis $(x_1, ..., x_n)$ von $V$ (vgl. Theorem 4.9). Dann sind $x_{k+1}, ..., x_n \in U\ \perp$, da $U \cap U^\perp = \{0\}$ ist somit $V = U \oplus U^\perp$. Insbesondere ist $\dim_K(U^\perp) = n - \dim_K(U)$, woraus $\dim_K((U^\perp)^\perp) = \dim_K(U)$ folgt. Zusammen mit der trivialen Inklusion $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ folgt $U = (U^\perp)^\perp$. □

**Folgerung 4.12**
Ist $s$ eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform auf $V$ und $B$ eine Basis von $V$, so ist

$$\det(M_B(s)) \in \mathbb{R}_{>0}$$

*Beweis.* Wähle eine Orthonormalbasis $B'$ von $V$ bezüglich $s$. Dann ist $M_{B'}(s) = \mathbb{1}_n$, folglich

$$\begin{aligned}
\det(M_B(s)) &= \det\left((T^B_{B'})^t \cdot \mathbb{1}_n \cdot \overline{T^B_{B'}}\right) \\
&= \det\left((T^B_{B'})^t\right) \cdot \det\left(\overline{T^B_{B'}}\right) \\
&= \det\left(T^B_{B'}\right) \cdot \overline{\det\left(T^B_{B'}\right)} \\
&= |\det\left(T^B_{B'}\right)|^2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

□

# 5. Orthogonale und unitäre Endomorphismen

Sei $V$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$.

**Definition 5.1 (orthogonale, unitäre Endomorphismen)**
$f$ ist orthogonal bzw. unitär , wenn

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in V$$

**Satz 5.2**
Ist $f$ unitär, so gelten

- Für $x \in V$ ist $\|f(x)\| = \|x\|$.
- Sind $x, y \in V$ mit $x \perp y$, so ist $f(x) \perp f(y)$.
- Es ist $f \in \mathrm{Aut}_K(V)$ und auch $f^{-1}$ ist unitär.
- Das Bild einer Orthonormalbasis unter $f$ ist eine Orthonormalbasis.
- Ist $\lambda$ ein Eigenwert von $f$, so ist $|\lambda| = 1$.

*Beweis.*
- klar
- klar
- $f(x) = 0 \iff \|f(x)\| = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0$, also ist $f$ injektiv, somit $f \in \mathrm{Aut}_K(V)$ und

$$\left\langle f^{-1}(x), f^{-1}(y)\right\rangle \overset{f \text{ unitär}}{=} \left\langle f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))\right\rangle = \langle x, y\rangle$$

- Folgt aus 1, 2 und 3
- Ist $f(x) = \lambda x$, $x \neq 0$, so ist

$$\|x\| = \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \Rightarrow |\lambda| = 1$$

□

**Satz 5.3**
Ist $\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$, so ist $f$ unitär.

*Beweis.* Aus $\|f(x)\| = \|x\|$ folgt $\langle f(x), f(x)\rangle = \langle x, x\rangle$. Die Polarisierung (Satz 3.4) für $\langle f(x), f(y)\rangle$ und die Linearität von $f$ liefern $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Zum Beispiel im Fall $K = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\langle f(x), f(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\left\langle \underbrace{f(x) + f(y)}_{f(x+y)}, \underbrace{f(x) + f(y)}_{f(x+y)}\right\rangle - \langle f(x), f(x)\rangle - \langle f(y), f(y)\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\langle x + y, x + y\rangle - \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle\right) \\
&= \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

□

**Definition 5.4 (orthogonale, unitäre Matrizen)**
Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt orthogonal bzw. unitär , wenn

$$A^*A = \mathbb{1}_n$$

▶ **Bemerkung 5.5**
Offenbar ist $A$ genau dann unitär, wenn $A^*$ das Inverse zu $A$ ist. Die folgenden Bedingungen sind daher äquivalent dazu, dass $A$ unitär ist:

$$AA^* = \mathbb{1}_n, \overline{A}A^t = \mathbb{1}_n, A^t\overline{A} = \mathbb{1}_n, A^t = \overline{A^{-1}}$$

**Satz 5.6**
Sei $B$ eine Orthogonalbasis von $V$. Genau dann ist $f$ unitär, wenn $M_B(f)$ unitär ist.

*Beweis.* Sei $A = M_B(f)$, $v = \Phi_B(x)$, $\Phi_B(y)$. Dann ist $\langle v, w\rangle = x^t \underbrace{M_B(\langle\cdot,\cdot\rangle)}_{=\mathbb{1}} \cdot \overline{y} = x^t \cdot \overline{y}$. Somit ist $f$ genau dann unitär, wenn $(Ax)^t\overline{Ay} = x^t\overline{y}$ für alle $x, y \in K^n$, also wenn $A^t\overline{A} = \mathbb{1}$, d.h. $A$ unitär. □

**Satz 5.7**
Die folgenden Mengen bilden Untergruppen der $\mathrm{GL}_n(K)$.

- $\mathrm{O}_n = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal}\}$ die orthogonale Gruppe
- $\mathrm{SO}_n = \{A \in \mathrm{O}_n \mid \det(A) = 1\}$ die spezielle orthogonale Gruppe
- $\mathrm{U}_n = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ ist unitär}\}$ die unitäre Gruppe
- $\mathrm{SU}_n = \{A \in \mathrm{U}_n \mid \det(A) = 1\}$ die spezielle unitäre Gruppe

*Beweis.* z.B. für $\mathrm{U}_n$: Sind $A^{-1} = A^*$, $B^{-1} = B^*$, so ist $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^*A^* = (AB)^*$, $(A^{-1})^{-1} = A = (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ □

**Satz 5.8**
Genau dann ist $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ unitär, wenn die Spalten (oder die Zeilen) von $A$ eine Orthonormalbasis des $K^n$ bilden.

*Beweis.* Sei $s$ das Standardskalarprodukt und $B = (a_1, ..., a_n)$. Nach Bemerkung 4.5 ist $B$ genau dann eine Orthonormalbasis, wenn $M_B(s) = \mathbb{1}_n$, und $M_B(s) = A^t \cdot \mathbb{1}_n \cdot \overline{A}$, vgl. Beispiel 2.9 □

**Theorem 5.9**
Sei $K = \mathbb{C}$ und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Ist $f$ unitär, so besitzt $V$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f.

*Beweis.* Induktion über$n = \dim_K(V)$.
$n = 0$: klar
$n - 1 \to n$: Da $K$ algebraisch abgeschlossen ist, hat $\chi_f$ eine Nullstelle $\lambda$, es gibt also einen Eigenvektor $x_1$ von $f$ zum Eigenwert $\lambda$. Ohne Einschränkung nehmen wir $\|x\| = 1$ an. Sei $W = K \cdot x_1$. Nach Folgerung 4.11 ist dann

$V = W \oplus W^\perp$. Für $v \in W^\perp, w \in W$ ist

$$0 = \langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle = \overline{\lambda} \langle f(v), w \rangle$$

da $\lambda \neq 0$ ($f$ unitär) also $f(W^\perp) \perp W$. Somit ist $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$, d.h. $W^\perp$ ist $f$-invariant. Da auch $f|_{W^\perp}$ unitär ist, gibt es nach Induktionshypothese eine Orthonormalbasis $(x_1, ..., x_n)$ aus Eigenvektoren von $f|_{W^\perp}$. Da $V = W \oplus W^\perp$ und $W \perp W^\perp$ ist $(x_1, ..., x_n)$ eine Orthonormalbasis von $V$ aus Eigenvektoren von $f$. □

**Folgerung 5.10**
Jeder unitäre Endomorphismus eines unitären Vektorraums ist diagonalisierbar.

**Folgerung 5.11**
Zu jeder $A \in \mathrm{U}_n$ gibt es $S \in \mathrm{U}_n$ so, dass

$$S^* A S = S^{-1} A S = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

mit $|\lambda_i| = 1$ für $i = 1, ..., n$.

*Beweis.* Da $A$ unitär ist, ist $f_A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ unitär, nach Theorem 5.9 existiert also eine Orthonormalbasis $B$ des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von $A$. Die Transformationsmatrix $S = T_{\mathcal{E}}^B$ hat als Spalten die Elemente von $B$ und somit ist $S$ nach Satz 5.8 unitär. Nach Satz 5.2 ist $|\lambda| = 1$ für alle Eigenwerte von $f_A$. □

► **Bemerkung 5.12**
Dies (Theorem 5.9) gilt nicht im Fall $K = \mathbb{R}$. Man kann aber auch orthogonale Endomorphismen immer "fast diagonalisieren".

# 6. Selbstadjungierte Endomorphismen

Sei $V$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$.

**Definition 6.1 (selbstadjungiert)**
$f$ ist selbstadjungiert , wenn

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle \quad \forall x, y \in V$$

**Satz 6.2**
Sei $B$ eine Orthonormalbasis von $V$. Genau dann ist $f$ selbstadjungiert, wenn $M_B(f)$ hermitesch ist.

*Beweis.* Seien $A = M_B(f), v = \Phi_B(x), w = \Phi_B(y)$. Es ist

$$\begin{aligned}\langle f(v), w\rangle &= (Ax)^t\overline{y} = x^tA^t\overline{y}\\ \langle v, f(w)\rangle &= x^t\overline{Ay} = x^t\overline{A}\overline{y}\end{aligned}$$

Somit ist $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$ genau dann, wenn $A^t = \overline{A}$, d.h. $A = A^*$, also $A$ hermitesch. □

**Lemma 6.3**
Ist $f$ selbstadjungiert und $\lambda$ ein Eigenwert von $f$, so ist $\lambda \in \mathbb{R}$.

*Beweis.* Ist $0 \neq x \in V$ mit $f(x) = \lambda x$, so ist

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle f(x), x\rangle = \langle x, f(x)\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle$$

und mit $\langle x, x\rangle \neq 0$ folgt $\lambda = \overline{\lambda}$, also $\lambda \in \mathbb{R}$. □

**Satz 6.4**
Ist $f$ selbstadjungiert, so ist $\chi_f \in \mathbb{R}[t]$ und $\chi_f$ zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren.

*Beweis.* Sei $B$ eine Orthonormalbasis von $V$. Nach Satz 6.2 ist $A = M_B(f) \in \mathrm{Mat}_n(K) \subseteq \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ hermitesch. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, ist $\chi_f(t)\prod_{i=1}^n(t-\lambda_i)$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$. Nach Lemma 6.3 ist aber schon $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. Somit zerfällt $\chi_f\chi_A \in \mathbb{R}[t]$ über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren. □

**Theorem 6.5**
Ist $f$ selbstadjungiert, so besitzt $V$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $f$.

*Beweis.* Induktion über $n = \dim_K(V)$.
$n = 0$: klar
$n-1 \to n$: Nach Satz 6.4 hat $f$ einen reellen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Wähle $x_1 \in V$ mit $f(x_1) = \lambda x_1$ und $\|x_1\| = 1$. Sei $W = K \cdot x_1$. Für $y \in W^\perp$ ist

$$\langle x_1, f(y)\rangle = \langle f(x_1), y\rangle = \lambda\langle x_1, y\rangle = 0$$

und folglich ist $W^\perp$ $f$-invariant. Nach Folgerung 4.11 ist $V = W \oplus W^\perp$ und $f|_{W^\perp}$ ist wieder selbstadjungiert. Nach Induktionshypothese hat $W^\perp$ eine Orthonormalbasis $(x_1, ..., x_n)$ aus Eigenvektoren von $f|_{W^\perp}$. Da $V = W \oplus W^\perp$ und $W \perp W^\perp$ ist $(x_1, ..., x_n)$ eine Orthonormalbasis von $V$ aus Eigenvektoren von $f$. □

**Folgerung 6.6**

Jeder selbstadjungierte Endomorphismus eines euklidischen oder unitären Vektorraums ist diagonalisierbar.

**Folgerung 6.7**

Ist

- $f$ selbstadjungiert ($K = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$)
- $f$ unitär ($K = \mathbb{C}$)

so ist

$$V = \bigoplus_{\lambda \in K} \mathrm{Eig}(f, \lambda)$$

eine Zerlegung von $V$ in paarweise orthogonale Untervektorräume.

*Beweis.* Nach Theorem 5.9 bzw. Theorem 6.5 existiert eine Orthonormalbasis $B$ aus Eigenvektoren. Insbesondere ist $f$ diagonalisierbar, also

$$V = \bigoplus_{\lambda \in K} \mathrm{Eig}(f, \lambda)$$

Zu jedem $\lambda$ gibt es eine Teilfamilie von $B$ die eine Basis von $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$ bildet. Da $B$ eine Orthonormalbasis ist, folgt, dass die Eigenräume paarweise orthogonal sind. □

**▶ Bemerkung 6.8**

Um eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren wie in Theorem 5.9 oder Theorem 6.5 zu bestimmen, kann man entweder wie im Induktionsbeweis vorgehen, oder man bestimmt zunächst Basen $B$ von $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$, $i = 1, ..., n$ und orthonormalisiert diese mit Theorem 4.9 zu Basen $B'$. Nach Folgerung 6.7 ist $\bigcup B'$ dann eine Orthonormalbasis von $V$ aus Eigenvektoren von $f$.

# 7. Hauptachsentransformation

Sei $V$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $s$ eine hermitesche Sesquilinearform auf $V$.

**Satz 7.1**
Zu $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ hermitesch gibt es $S \in \mathrm{U}_n(K)$ so, dass

$$S^*AS = S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.

*Beweis.* Da $A$ hermitesch ist, ist $f_A \in \mathrm{End}_K(K^n)$ selbstadjungiert, es gibt also nach Theorem 6.5 also eine Orthonormalbasis $B = (x_1, ..., x_n)$ aus Eigenvektoren von $f_A$. Die Transformationsmatrix $S = T^B_{\mathcal{E}}$ hat $x_1, ..., x_n$ als Spalten und ist somit nach Satz 5.8 unitär. Nach Lemma 6.3 sind die Eigenvektoren $\lambda_1, ..., \lambda_n$ reell. □

**Folgerung 7.2**
Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ hermitesch. Genau dann ist $A$ positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind.

*Beweis.* Nach Satz 7.1 existiert $S \in \mathrm{U}_n(K)$ mit

$$S^*AS = S^{-1}AS = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \quad \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Die Eigenwerte von $A$ sind die Eigenwerte von $S^{-1}AS$ (LAAG 1.5.1.11) , also $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Sei $T = \overline{S}$. Genau dann ist $A$ positiv definit, wenn $T^tA\overline{T} = S^*AS = D$ positiv definit ist (Satz 2.8), also wenn $\lambda_i > 0$. □

**Theorem 7.3 (Hauptachsentransformation)**
Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform $s$ auf $V$ gibt es eine Orthonormalbasis $B$ von $V$, für die

$$M_B(s) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \quad \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$$

*Beweis.* Sei $B_0 = (x_1, ..., x_n)$ eine Orthonormalbasis von $V$ und $A = M_{B_0}(s)$. Da $s$ hermitesch ist, ist auch $A$ hermitesch (Satz 2.13). Nach Satz 7.1 gibt es deshalb $S \in \mathrm{U}_n(K)$ mit $S^*AS = D$ eine reelle Diagonalmatrix. Ist nun $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $M_{B_0}(f) = \overline{S}$, so ist auch $B = (f(x_1), ..., f(x_n))$ eine Basis von $V$ mit $T^B_{B_0} = \overline{S}$ unitär. Da $M_{B_0}(f)$ unitär ist, ist auch $f$ unitär. Nach Satz 5.2 ist $f(B_0) = B$ somit auch eine Orthonormalbasis. Nach Satz 2.8 ist

$$M_B(s) = (T^B_{B_0})^t \cdot M_{B_0}(s) \cdot \overline{T^B_{B_0}} = S^*AS = D$$ □

■ **Beispiel 7.4**
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $s = s_A$, $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$
$\Rightarrow q_s(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$
Wie verhält sich $q_s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$? Wie sehen die "Höhenlinien"

$$H_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid q_s(x) = c\} \quad c \in \mathbb{R}$$

aus?

$$\chi_A = (t-2)^2 - 1 = (t-1)(t-3) \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$$
$$\Rightarrow B = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
$$\Rightarrow M_B(s) = \operatorname{diag}(3,1)$$

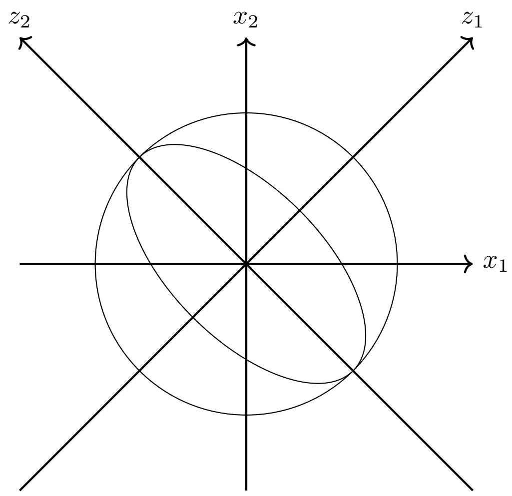
Im neuen Koordinatensystem $z = \Phi_B^{-1}(x)$ ist dann

$$q_s(z) = 3z_1^2 + z_2^2$$

Mit $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $a_2 = 1$ erhält man "Höhenlinien" der Form

$$\left(\frac{z_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{a_2}\right)^2 = c$$

was für $c > 0$ eine Ellipse beschreibt.




**Folgerung 7.5**
Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform $s$ auf $V$ gibt es eine Basis $B$ von $V$, für die

$$M_B(s) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{r_+(s)} & & \\ & -\mathbb{1}_{r_-(s)} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

mit $r_+(s) + r_-(s) \leq n$.

*Beweis.* Sei $B_0 = (x_1, ..., x_n)$ eine Orthonormalbasis von $V$ mit $A = M_{B_0}(s) = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Setze

$$\mu_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} & \lambda_i \neq 0 \\ 1 & \lambda_i = 0 \end{cases}$$

Sei $x_i' = \mu_i \cdot x_i$ und $B' = (x_1', ..., x_n')$. Dann ist $M_B(s) = S^t A \overline{S}$ mit $S = T_{B_0}^{B'} = \text{diag}(\mu_1, ..., \mu_n)$ also $M_{B'}(s) = \text{diag}(\lambda_1', ..., \lambda_n')$ mit $\lambda_i' = \mu_i \cdot \lambda_i \cdot \overline{\mu_i} = \mu_i^2 \lambda_i \in \{0, 1, -1\}$. Durch Permutation der Elemente von $B'$ erhält man die gewünschte Basis $B$. □

**Definition 7.6 (Ausartungsraum)**
Der Ausartungsraum von $s$ ist

$$V_0 = \{x \in V \mid s(x, y) = 0 \quad \forall y \in V\}$$

**Lemma 7.7**
$V_0$ ist ein Untervektorraum von $V$.

*Beweis.* Klar aus Linearität im ersten Argument. □

**Lemma 7.8**
Seien $V_+$ und $V_-$ Untervektorräume von $V$ mit $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$ und $s$ positiv definit auf $V_+$, $-s$ positiv definit auf $V_-$. Dann ist

$$\dim_K(V_+) = \max\{\dim_K(W) \mid \text{Untervektorraum von } V, s \text{ positiv definit auf } V\}$$
$$\dim_K(V_-) = \max\{\dim_K(W) \mid \text{Untervektorraum von } V, -s \text{ positiv definit auf } V\}$$

*Beweis.* Beweis nur für $V_+$, analog für $V_-$.
$\leq$: klar
$\geq$: Ist $W \leq V$ Untervektorraum mit $s(x, x) > 0 \quad \forall x \in W \backslash \{0\}$, so ist $W \cap (V_- \oplus V_+) = \{0\}$. Ist $x = y + z$ mit $y \in V_-$, $z \in V_0$, so ist $s(x, x) = s(y + z, y + z) = \underbrace{s(y, y)}_{\leq 0} + \underbrace{s(y, z) + s(z, y) + s(z, z)}_{=0} \leq 0 \Rightarrow \dim_K(W) \leq \dim_K(V) - \dim_K(V_-) - \dim_K(V_0) = \dim_K(V_+)$. □

**Theorem 7.9 (Trägheitssatz von Sylvester)**
Für eine hermitesche Sesquilinearform $s$ auf $V$ sind die Zahlen $r_+(s)$, $r_-(s)$ aus Folgerung 7.5 eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Sei $B$ eine Basis von $V$ wie in Folgerung 7.5, $B = (x_1, ..., x_n)$. Definiere

$$V_+ = \text{span}_K(x_1, ..., x_{r_+(s)})$$
$$V_- = \text{span}_K(x_{r_+(s)+1}, ..., x_{r_+(s)+r_-(s)})$$
$$V_0' = \text{span}_K(x_{r_+(s)+r_-(s)+1}, ..., x_n)$$

Dann ist $s$ positiv definit auf $V_+$, $-s$ positiv definit auf $V_-$ und $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0'$. Es gilt $V_0' = V_0$
$\subseteq$: klar
$\supseteq$: Ist $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in V_0$, so ist $0 = s(x, x_i) = \lambda_i \cdot s(x_i, x_i)$ für $i = 1, ..., n$ also $\lambda_i = 0$ für $i = 1, ..., r_+(s) + r_-(s)$, d.h. $x \in V_0'$. Nach Lemma 7.8 ist $r_+(s) = \dim_K(V_+)$ nur von $s$ abhängig, analog für $r_-(s)$. □

**Definition 7.10 (Signatur)**
Die Signatur von $s$ ist das Tripel

$$(r_+(s), r_-(s), r_0(s))$$

wobei $r_0(s) = \dim_K(V_0)$.

**Folgerung 7.11**
Ist $s$ eine hermitesche Form auf $V$ und $B$ eine Basis von $V$, so ist die Zahl der positiven bzw. negativen Eigenwerte von $M_B(s)$ gleich $r_+(s)$ bzw. $r_-(s)$, insbesondere also unabhängig von $B$.

*Beweis.* Sei $A = M_B(s)$. Nach Satz 7.1 gibt es $S \in \mathrm{U}_n(K)$ mit $S^*AS$ eine reelle Diagonalmatrix. Da $S^* = S^{-1}$ haben $A$ und $S^*AS$ die selben Eigenwerte. Bringt man $S^*AS$ nun in die Form in Folgerung 7.5, so ändern sich die Vorzeichen der Diagonale nicht mehr. $\square$

# 8. Quadriken

Sei $n \in \mathbb{N}$.

**Definition 8.1 (Quadrik)**

Eine Quadrik ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t A x + 2b^t x + c = 0\}$$

mit $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch, $b^t \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$.

▶ **Bemerkung 8.2**

- $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j + 2\sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0\}$ also $Q$ ist die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms in $x_1, ..., x_n$
- $Q$ bestimmt $A, b, c$ nicht eindeutig, da $Q(A, b, c) = Q(\lambda A, \lambda b, \lambda c)$
- Man kann $A, b, c$ so normieren, dass $c = 0$ oder $c = 1$

▶ **Bemerkung 8.3**

Seien $A, b, c$ wie in Definition 8.1, so schreiben wir

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix}$$
$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0\}$. Wir schreiben $(A, b)$ für

$$\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n,n+1}(\mathbb{R})$$

Es gilt $\mathrm{rk}(A) \leq \mathrm{rk}(A, b) \leq \mathrm{rk}(\tilde{A})$.

▶ **Bemerkung 8.4 (Wiederholung)**

Seien $V, W$ $K$-Vektorräume. $f : V \to W$ heißt affin, wenn $\exists g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit $f(v) = g(v) + w_0$ $\forall v \in V$. Ist $f$ affin und bijektiv, so ist $f^{-1}$ affin, d.h. $\mathrm{Aff}_K(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ affin und bijektiv}\}$. Im Fall von $V = \mathbb{R}^n$, $K = \mathbb{R}$ ist

$$\mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \{f = \tau_z \circ f_T \mid T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), z \in \mathbb{R}^n\}$$

mit $f_T(x) = Tx$ und $\tau_z(x) = x + z$.

**Lemma 8.5**

Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Quadrik, so ist $f(Q)$ eine Quadrik, für $f \in \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$.

*Beweis.* $f = \tau_z \circ f_T$ mit $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{R}^n$. Schreibe $S = T^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\tilde{S} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es gilt $\tilde{S}\tilde{x} = \widetilde{Sx}$.

$$\begin{aligned} f_T(Q) &= \{Tx \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{x}^t \tilde{A}\tilde{x} = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid (\tilde{S}\tilde{y})^t \tilde{A}\tilde{S}\tilde{y} = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}^t \underbrace{\tilde{S}^t\tilde{A}\tilde{S}}_{\begin{pmatrix} S^tAS & S^tb \\ b^tS & c \end{pmatrix}} \tilde{y} = 0\} \end{aligned}$$

Jetzt für $\tau_z$. Sei $U_z = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $U_z\tilde{x} = \tilde{\tau}_z(x)$. Man folgert analog, dass

$$\tau_z(Q) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}^t \underbrace{U_z^t\tilde{A}U_z}_{\begin{pmatrix} A & Az+b \\ z^tA+b & z^tAz+b^tz+z^tb+c \end{pmatrix}} \tilde{y} = 0\}$$

□

**Definition 8.6 (Typen von Quadriken)**
Sei $Q$ gegeben durch $(A, b, c)$ wie in Definition 8.1. $Q$ heißt

- vom kegeligen Typ , wenn $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A, b) = \mathrm{rk}(\tilde{A})$
- eine Mittelpunktsquadrik , wenn $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A, b) < \mathrm{rk}(\tilde{A})$
- vom parabolischen Typ , wenn $\mathrm{rk}(A) < \mathrm{rk}(A, b)$
- ausgeartet , wenn $\det(\tilde{A}) = 0$

**Lemma 8.7**
Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Quadrik, $f \in \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$. Von dem Typ, von dem $Q$ ist, ist auch $f(Q)$.

*Beweis.* $f = f_{S^{-1}}$, $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Da $\tilde{S}$ invertierbar ist, ist $\mathrm{rk}(\tilde{A}) = \mathrm{rk}(\tilde{S}^t\tilde{A}\tilde{S})$, analog auch $\mathrm{rk}(S^tAS) = \mathrm{rk}(A)$.
$(S^tAS, S^tb) = S^t(A, b)\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rk}(S^tAS, S^tb) = \mathrm{rk}(A, b)$. Für $f = \tau_z$ analog. □

**Definition 8.8 (Isometrie)**
Eine Isometrie des $\mathbb{R}^n$ ist $f \in \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f(x) = Ax + b$$

mit $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist orthogonal.

▶ **Bemerkung 8.9**
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine Isometrie genau dann, wenn $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

**Theorem 8.10 (Klassifikation der Quadriken bis auf Isometrien)**
Sei $Q$ eine Quadrik. Es gibt eine Isometrie $f \in \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ mit $f(Q)$, die eine der folgenden Formen annimmt:

- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \sum_{i=k+1}^n \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = 0 \right\} \quad k \geq r-k$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \sum_{i=k+1}^n \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = 1 \right\}$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \sum_{i=k+1}^n \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - 2x_{r+1} = 0 \right\} \quad k \geq r-k, r < n$

mit $a_1, ..., a_r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $0 \leq k \leq r \leq n$

*Beweis.* Sei $Q$ gegeben durch $(A, b, c)$. Nach Satz 7.1 gibt es eine orthogonale Matrix $S \in \mathrm{O}_n$ mit $S^tSAS = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Indem wir $Q$ durch $f_{S^{-1}}(Q)$ ersetzen, können wir also ohne Einschränkung annehmen, dass $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Ohne Einschränkung ist weiter $\lambda_1, ..., \lambda_k > 0$ und $\lambda_{k+1}, ..., \lambda_r < 0$ und $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_n = 0$. Dann ist $(e_{r+1}, ..., e_n)$ eine Orthonormalbasis des Ausartungsraums $V_0$ von $s_A$.
Wenn wir $Q$ durch $\tau_z(Q)$ ersetzen, wird $b$ durch $Az+b$ ersetzt, wir können deshalb ohne Einschränkung annehmen, dass $b \in V_0$. Ist $n > r$, also $V_0 \neq \{0\}$, so können wir eine Orthonormalbasis $(v_{r+1}, ..., v_n)$ von $V_0$ mit $b \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_{r+1})$ wählen.
Indem wir $Q$ durch $f_{S^{-1}}(Q)$ mit $S = (e_1, ..., e_r, v_{r+1}, ..., v_n)$ ersetzen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $b = \mu \cdot e_{r+1}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.
Ist nun $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A, b)$, so gibt es $z$ mit $Az = -b$, und indem wir $Q$ durch $\tau_z(Q)$ ersetzen, können wir annehmen, dass $b = 0$.

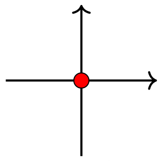
- Im Fall $c = 0$ setzt man $a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$ und ersetzt gegebenenfalls $(A, b, c)$ mit $(-A, -b, -c)$, um Form 1 zu erhalten.
- Im Fall $c \neq 0$ ersetzt man $(A, b, c)$ durch $(-\frac{1}{c}A, -\frac{1}{c}b, -1)$ und setzt dann $a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$, um Form 2 zu erhalten.
- Ist $\mathrm{rk}(A) < \mathrm{rk}(A, b)$, so ist insbesondere $r < n$ und $\mu \neq 0$. Nun ersetzten wir $Q$ durch $\tau_z(Q)$ mit $z = -\frac{c}{2\mu} \cdot e_{r+1}$ und können somit auch wieder $c = 0$ annehmen. Ersetzt man $(A, b, 0)$ durch $(-\frac{1}{\mu}A, -1, 0)$ und setzt wieder $a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$, so erhält man Form 3. (Ist $k < r - k$, so ersetzt man weiter $Q$ durch $f_{-\mathbb{1}_n}(Q)$ und $(A, b, 0)$ durch $(-A, -b, 0)$.) □

**Folgerung 8.11**
Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Quadrik. Es gibt eine invertierbare affine Abbildung $f \in \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ für die $f(Q)$ eine der folgenden 3 Formen annimmt:

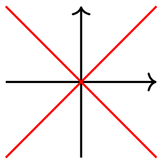
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum\limits_{i=1}^k x_i^2 - \sum\limits_{i=k+1}^r x_i^2 = 0 \right\} \quad k \geq r-k$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum\limits_{i=1}^k x_i^2 - \sum\limits_{i=k+1}^r x_i^2 = 1 \right\}$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum\limits_{i=1}^k x_i^2 - \sum\limits_{i=k+1}^r x_i^2 - 2x_{r+1} = 0 \right\} \quad k \geq r-k, r < n$

■ **Beispiel 8.12**
$Q \subseteq \mathbb{R}^2$

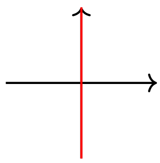
- _ $k=2, r=2: \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 0\right\}$

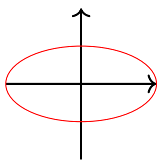
  _ $k=1, r=2: \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 0\right\}$

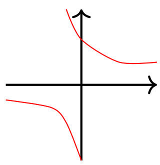
  _ $k=1, r=1: \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 = 0\right\}$

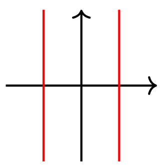
- _ $k=2, r=2: \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1\right\}$

  _ $k=1, r=2: \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1\right\}$

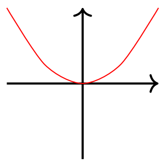
  _ $k=1, r=1: \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 = 1\right\}$

  _ $k=0, r=2: \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1\right\} = \emptyset$

  _ $k=0, r=1: \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1\right\} = \emptyset$

- – $k = 1, r = 1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - 2x_2 = 0 \right\}$



▶ **Bemerkung 8.13**

- Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Quadrik, $U \subseteq V$ affiner Untervektorraum, so ist $Q \cap U$ eine Quadrik in dem Sinne, dass $\exists f$ Isometrie : $f(U) = \mathbb{R}^k$ und $f(Q \cap U)$ ist eine Quadrik.
- Ebene Quadriken sind im wesentlichen Kegelschnitte, $Q' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$, außer 2c und 2d in Beispiel 8.12

▶ **Bemerkung 8.14**

Die Situation wird deutlich übersichtlicher, wenn man den affinen Raum $\mathbb{R}^n$ durch Hinzunahme von Punkten im Unendlichen zum projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ vervollstädigt und den Abschluss der Quadriken darin betrachtet. Es stellt sich dann heraus, dass vom projektiven Standpunkt aus die meisten ebenen Quadriken ähnlich aussehen. (Siehe Vorlesung *Elementare Algebraische Geometrie*)

## Kapitel III

# *Dualität*

## 1. Das Lemma von Zorn

Sei $K$ ein Körper und $U, V, W$ seien $K$-Vektorräume. Zudem sei $X$ eine Menge.

**Definition 1.1 (Relation)**
Eine Relation ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$. Man schreibt $(x, x') \in R$ als $xRx'$. $R$ heißt

- reflexiv , wenn $\forall x \in X$: $xRx$
- transitiv , wenn $\forall x, y, z \in X$: $xRy$ und $yRz \Rightarrow xRz$
- symmetrisch , wenn $\forall x, y \in X$: $xRy \Rightarrow yRx$
- antisymmetrisch , wenn $\forall x, y \in X$: $xRy$ und $yRx \Rightarrow y = x$
- total , wenn $\forall x, y \in X$: $(x, y) \notin R \Rightarrow (y, x) \in R$

■ **Beispiel 1.2 (Äquivalenzrelation)**
Eine Äquivalenzrelation ist eine reflexive, transitive und symmetrische Relation. Wir haben schon verschiedene Äquivalenzrelationen kennengelernt: Isomorphie von $K$-Vektorräumen und Ähnlichkeit von Matrizen.

**Definition 1.3 (Halbordnung)**
Eine Halbordnung (oder partielle Ordnung ) ist eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation $\leq$. Eine totale Halbordnung heißt Totalordnung oder lineare Ordnung . Man schreibt $x < y$ für $x \leq y \wedge x \neq y$.

■ **Beispiel 1.4**

1. Die natürliche Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ ist eine Z Totalordnung.
2. Teilbarkeit $|$ ist eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$, aber Teilbarkeit ist keine Halbordnung auf $\mathbb{Z}$, da $1| - 1$ und $-1|1$, aber $1 \neq -1$!
3. $\mathcal{P}(X)$ ist die Potenzmenge. "$\subseteq$" ist eine Halbordnung auf $\mathcal{P}$, aber für $|X| > 1$ ist "$\subseteq$" keine Totalordnung.
4. Sei $(X, \leq)$ eine Halbordnung, sei $Y \subseteq X$, so ist $(Y, \subseteq|_Y)$ eine Halbordnung.

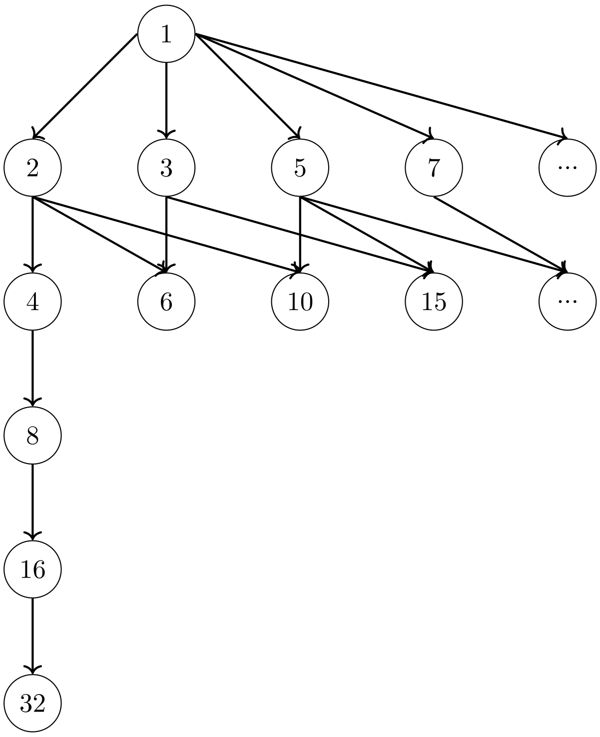
**Definition 1.5 (Kette)**
Sei $(X, \leq)$ eine Halbordnung, $Y \subseteq X$. $Y$ heißt Kette, wenn $(Y, \leq|_Y)$ total ist.

$x \in Y$ heißt ein minimales Element von $Y$, wenn $\forall x' \in Y\colon x < x'$.

$x \in Y$ heißt untere Schranke von $Y$, wenn $\forall y \in Y\colon y \geq x$.

$x \in Y$ heißt kleinstes Element von $Y$, wenn $x$ untere Schranke von $Y$ ist.

Analog: maximales Element, obere Schranke, größtes Element.




$Y = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Kette

**▶ Bemerkung 1.6**

- Hat $Y$ ein kleinstes Element, so ist dies eindeutig bestimmt. Ein kleinstes Element ist minimal.
- Jede endliche Halbordnung hat minimale Elemente. Jede endliche Totalordnung hat ein kleinstes Element. Analog für maximale Elemente und größtes Element.

**■ Beispiel 1.7**
$(\mathbb{N}, \leq)$ hat als kleinstes Element die 1, aber kein größtes Element oder maximale Elemente.

**■ Beispiel 1.8**
$V = \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{X}$ die Menge der Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$. $(\mathfrak{X}, \leq)$ ist eine Halbordnung auf $Y \subseteq X$ mit $Y = \{U \in \mathfrak{X} \mid \dim_{\mathbb{R}}(U) \leq 2\}$.

- $Y$ hat ein kleinstes Element: $\{0\}$.
- Es gibt unendlich viele maximale Elemente in $Y$, nämlich die Untervektorräume von $V$, die die Dimension 2 haben. Es gibt also kein größtes Element.
- $V$ ist die obere Schranke von $Y$.

**Theorem 1.9 (Das Lemma von Zorn)**
Sei $(X, \leq)$ eine Halbordnung, die nicht leer ist. Wenn jede Kette eine obere Schranke hat, dann hat $X$ ein maximales Element.

*Beweis.* Das Lemma von Zorn hat axiomatischen Charakter - es ist äquivalent zum Auswahlaxiom, seine Gültigkeit ist somit abhängig von unseren grundlegenden mengentheoretischen Annahmen. Für einen Beweis des Lemmas von Zorn aus dem Auswahlaxiom siehe die Vorlesung *Mengenlehre*. Wir zeigen hier zumindest die andere Richtung, nämlich dass das Auswahlaxiom aus dem Lemma von Zorn folgt. □

**Folgerung 1.10 (Auswahlaxiom)**
Zu jeder Familie $(x_i)$, nicht leer, gibt es eine Auswahlfunktion , das heißt eine Abbildung:

$$f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \text{ mit } f(i) \in X_i \quad \forall i$$

*Beweis.* Sei $\mathcal{F}$ die Menge der Paare $(J, f)$ bestehend aus einer Teilmenge $J \subseteq I$ und einer Abbildung $f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ mit $f(i) \in X_i \quad \forall i \in J$. Definieren wir $(J, f) \leq (J', f') \iff J \subseteq J'$ und $f'|_J = f$, so ist $\leq$ eine Halbordnung auf $\mathcal{F}$. Da $(\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{F}$ ist $\mathcal{F}$ nichtleer. Ist $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine nichtleere Kette, so wird auf $J' := \bigcup_{(J,f) \in \mathcal{G}} J$ durch $f'(j) = f(j)$ falls $(J, f) \in \mathcal{G}$ und $j \in J$ eine wohldefinierte Abbildung $f' : J \to \bigcup_{i \in J} X_i$ mit $f'(i) \in X_i \quad \forall i \in J'$ gegeben. Das Paar $(J', f')$ ist eine obere Schranke der Kette $\mathcal{G}$. Nach dem Lemma von Zorn besitzt $\mathcal{F}$ ein maximales Element $(J, f)$. Wir behaupten, dass $J = I$. Andernfalls nehmen wir ein $i' \in I \backslash J$ und ein $x' \in X_{i'}$ und definieren $J' := U \cup \{i'\}$ und $f' : J' \to \bigcup_{i \in J'} X_i$, $j \mapsto \begin{cases} f(j) & j \in J \\ x' & j = i' \end{cases}$. Dann ist $(J', f') \in \mathcal{F}$ und $(J, f) < (J', f')$ im Widerspruch zur Maximalität von $(J, f)$. □

**Folgerung 1.11 (Basisergänzungssatz)**
Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Jede linear unabhängige Teilmenge $X_0 \subseteq V$ ist in einer Basis von $V$ enthalten.

*Beweis.* Sei $\mathfrak{X} = \{X \subseteq V \mid X \text{ ist linear unabhängig, } X_0 \subseteq X\}$ geordnet durch Inklusion. Dann ist $X_0 \in \mathfrak{X}$, also $\mathfrak{X} \neq \emptyset$. Ist $\mathcal{Y}$ eine nichtleere Kette in $\mathfrak{X}$, so ist auch $Y = \bigcup \mathcal{Y} \subseteq V$ linear unabhängig. Sind $y_1, ..., y_n \in Y$ paarweise verschieden, so gibt es $Y_1, ..., Y_n \in \mathcal{Y}$ mit $y_i \in Y_i$ für $i = 1, ..., n$. Da $\mathcal{Y}$ total geordnet ist, besitzt $\{Y_1, ..., Y_n\}$ ein größtes Element, o.E. $Y_1$. Also sind $y_1, ..., y_n \in Y_1$ und somit linear unabhängig. Folglich ist $Y_1 \in \mathfrak{X}$ eine obere Schranke von $\mathcal{Y}$. Nach dem Lemma von Zorn besitzt $\mathfrak{X}$ ein maximales Element $X$. Das heißt, $X$ ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von $V$, nach LAAG1 II.3.5 also eine Basis von $V$. □

# 2. Der Dualraum

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum.

**Definition 2.1 (Dualraum)**
Der Dualraum zu $V$ ist der $K$-Vektorraum

$$V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K) = \{\varphi : V \to K \text{ linear}\}$$

Die Elemente von $V^*$ heißen Linearformen auf $V$.

■ **Beispiel 2.2**
Ist $V = K^n = \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K)$, so wird $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ durch $\mathrm{Mat}_{1\times n}(K) \cong K^n$. Wir können also die Elemente von $V$ als Spaltenvektoren und die Linearformen auf $V$ als Zeilenvektoren auffassen.

**Lemma 2.3**
Ist $B(x_1)_{i\in I}$ eine Basis von $V$, so gibt es zu jedem $i \in I$ genau $x_i^* \in V^*$ mit

$$x_i^*(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall j \in I$$

*Beweis.* Siehe LAAG1 III.5.1, angewandt auf die Familie $(y_j)_{j\in I}$, $y_j\delta_{i.j}$ in $W = K$. □

**Satz 2.4**
Ist $B = (x_1)_{i\in I}$ eine Basis von $V$, so ist $B^* = (x_i^*)_{i\in I}$ linear unabhängig. Ist $I$ endlich, so ist $B^*$ eine Basis von $V^*$.

*Beweis.* Ist $\varphi = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i^*$, $\lambda_i \in K$, fast alle gleich 0, so ist $\varphi(x_j) = \sum_{i\in I} \lambda_j x_i^*(x_j) = \lambda_j$ für jedes $j \in I$. Ist also $\varphi = 0$, so ist $\lambda_j = \varphi(x_j) = 0 \quad \forall j \in I$, $B^*$ ist somit linear unabhängig.
Ist zudem $I$ endlich und $\psi \in V^*$, so ist $\psi = \psi' = \sum_{i\in I} \psi(x_i)x_i^*$, denn $\psi'(x_j) = \sum_{i\in I} \psi(x_i)x_i^*(x_j) = \psi(x_i) \quad \forall j \in I$, und somit ist $B^*$ ein Erzeugendensystem von $V^*$. □

**Definition 2.5 (duale Basis)**
Ist $B = (x_i)_{i\in I}$ eine endliche Basis von $V$, so nennt man $B^* = (x_i^*)_{i\in I}$ die zu $B$ duale Basis .

**Folgerung 2.6**
Zu jeder Basis $B$ von $V$ gibt es einen eindeutig bestimmtem Monomorphismus

$$f_V \to V^* \text{ mit } f(B) = B^*$$

Ist $\dim_K(V) < \infty$, so ist dieser ein Isomorphismus.

**Folgerung 2.7**
Zu jedem $= 0 \neq x \in V$ gibt es eine Linearform $\varphi \in V$ mit $\varphi(x) = 1$.

*Beweis.* Ergänze $x_1 = x$ zu einer Basis $(x_i)_{i\in I}$ von $V$ (Folgerung 1.11) und $\varphi = x_1^*$. □

■ **Beispiel 2.8**
Ist $V = K^n$ mit Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$, so können wir $V^*$ mit dem Vektorraum der Zeilen-

vektoren identifizieren, und dann ist

$$e_i^* = e_i^t$$

**Definition 2.9 (Bidualraum)**
Der Bidualraum zu $V$ ist der $K$-Vektorraum

$$V^{**} = (V^*)^* = \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$$

**Satz 2.10**
Die kanonische Abbildung

$$\iota : \begin{cases} V \to V^{**} \\ x \to \iota_x \end{cases} \qquad \text{wobei } \iota_x(\varphi) = \varphi(x)$$

ist ein Monomorphismus. Ist $\dim_K(V) < \infty$, so ist $\iota$ ein Isomorphismus.

*Beweis.*
- $\iota_x \in V^{**}$:
  - $\iota_x(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) = \iota_x(\varphi) + \iota_x(\psi)$
  - $\iota_x(\lambda\varphi) = (\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x) = \lambda\iota_x(\varphi)$
- $\iota$ linear:
  - $\iota_{x+y}(\varphi) = \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \iota_x(\varphi) + \iota_y(\varphi) = (\iota_x + \iota_y)(\varphi)$
  - $\iota_{\lambda x}(\varphi) = \varphi(\lambda x) = \lambda\iota_x(\iota) = (\lambda\iota_x)(\varphi)$
- $\iota$ injektiv: Sei $0 \neq x \in V$. Nach Folgerung 2.7 existiert $\varphi \in V^*$ mit $\iota_x(\varphi) = \varphi(x) = 1 \neq 0$. Somit ist $\iota_x \neq 0$.
- Ist $\dim_K(V) < \infty$, so ist $V \overset{2.6}{\cong} V^* \overset{2.6}{\cong} V^{**}$, insbesondere $\dim_K(V) = \dim_K(V^{**})$. Der Monomorphismus $\iota$ ist somit ein Isomorphismus. □

▶ **Bemerkung 2.11**
Sei $\dim_K(V) < \infty$. Im Gegensatz zu den Isomorphismen $V \to V^*$, die von der Wahl der Basis $B$ abhängen, ist der Isomorphismus $\iota : V \to V^{**}$ kanonisch (von der Wahl der Basis $B$ unabhängig).

Die Voraussetzung, dass $\dim_K(V) < \infty$ ist hier essentiell: Für $\dim_K(V) = \infty$ ist $\iota$ nicht surjektiv.

**Definition 2.12 (Annulator)**
Für eine Teilmenge $U \subseteq V$ bezeichne

$$U^0 = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in U\}$$

den Annulator von $U$.

**Lemma 2.13**
$U^0$ ist ein Untervektorraum von $V^*$.

*Beweis.* Klar. □

**Satz 2.14**
Ist $\dim_K(V) < \infty$ und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist

$$\dim_K(V) = \dim_K(U) + \dim_K(U^0)$$

*Beweis.* Ergänze eine Basis $(x_1, ..., x_r)$ von $U$ zu einer Basis $B = (x_1, ..., x_n)$ von $V$. Dann ist $B^*(x_1^*, ..., x_n^*)$ eine Basis von $V^*$. Sei $C = (x_{r+1}^*, ..., x_n^*)$. Dann ist $C$ eine Basis von $U^0$:

- $B^*$ ist Basis $\Rightarrow C$ ist linear unabhängig.
- $C \subseteq U^0$: Für $1 \leq j \leq r < i \leq n$ ist $x_i^*(x_j) = \delta_{ij} = 0$.
- $U^0 \subseteq \mathrm{span}_K(C)$: Ist $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^* \in U^0$, so $0 = \varphi(x_j) = \lambda_j$ für alle $j \leq r$, also $\varphi \in \mathrm{span}_K(x_{r+1}^*, ..., x_n^*)$. □

**Folgerung 2.15**
Ist $\dim_K(V) < \infty$ und $U \subset V$ ein Untervektorraum, so ist

$$\iota(U) = U^{00}$$

*Beweis.* Es ist klar, dass $\iota(U) \leq U^{00}$.
Für $\varphi \in U^0$ und $x \in U$ ist $\iota_x(\varphi) = \varphi(x) = 0$. Mit Satz 2.14 ist

$$\begin{aligned}
\dim_K(U^{00}) &= \dim_K(V^*) - \dim_K(U^0) \\
&= \dim_K(V^*) - (\dim_K(V) - \dim_K(U)) \\
&\overset{2.6}{=} \dim_K(U)
\end{aligned}$$

und da $\iota$ injektiv ist, folgt $\iota(U) = U^{00}$. □

# 3. Die duale Abbildung

Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$.

▶ **Bemerkung 3.1**

Ist $\varphi \in W^* = \mathrm{Hom}_K(W, K)$ eine Linearform auf $W$, so ist $\varphi \circ f \in \mathrm{Hom}_K(V, K) = V^*$ eine Linearform auf $V$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "f^*(\varphi)"'] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & K \end{tikzcd}$$

**Definition 3.2 (duale Abbildung)**

Die zu $f$ duale Abbildung ist

$$f^* : \begin{cases} W^* \to V^* \\ \varphi \mapsto \varphi \circ f \end{cases}$$

**Lemma 3.3**

Es ist $f^* \in \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$.

*Beweis.* Sind $\varphi, \psi \in W^*$ und $\lambda \in K$ ist

$$\begin{aligned} f^*(\varphi + \psi) &= (\varphi + \psi) \circ f \\ &= \varphi \circ f + \psi \circ f \\ &= f^*(\varphi) + f^*(\psi) \\ f^*(\lambda\varphi) &= (\lambda\varphi) \circ f \\ &= \lambda \cdot (\varphi \circ f) \\ &= \lambda \cdot f^*(\varphi) \end{aligned}$$

□

**Satz 3.4**

Sind $B = (x_1, ..., x_n)$ und $C = (y_1, ..., y_m)$ Basen von $V$ bzw. $W$, so ist

$$M_{B^*}^{C^*}(f^*) = \left(M_C^B(f)\right)^t$$

*Beweis.* Sei $A = M_C^B(f) = (a_{ij})_{i,j}$ und $B = M_{B^*}^{C^*}(f^*) = (b_{ji})_{j,i}$. Dann ist $f(x_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$, also $a_{ji} = y_i^*(f(x_j)) = f^*(y_i^*)(x_j)$ und $f^*(y_i^*) = \sum_{j=1}^n b_{ji} x_j^*$, also $b_{ji} = f^*(y_i^*)(x_j) = a_{ij}$. □

**Folgerung 3.5**

Sind $V$ und $W$ endlichdimensional, und identifizieren wir $V = V^{**}$ und $W = W^{**}$, so ist $f = f^{**}$, das heißt $\iota \circ f = f^{**} \circ \iota$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_V \cong"'] & W \arrow[d, "\iota_W \cong"] \\ V^{**} \arrow[r, "f^{**}"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

*Beweis.* Seien $B$ und $C$ Basen von $V$ bzw. $W$. Unter der Identifizierung ist $B^{**} = B$ und $C = C^{**}$, das heißt $\iota(x_i) = x_i^{**}$ bzw. $\iota(y_j) = y_j^{**}$, denn $\iota(x_i)(x_j^*) = x_j^*(x_i) = \delta_{ij} = x_i^{**}(x_j^*) \quad \forall i, j$ und somit

$$M_C^B(f^{**}) \overset{3.4}{=} \left(M_{B^*}^{C^*}(f^*)\right)^t \overset{3.4}{=} \left(M_C^B(f)\right)^{tt} = M_C^B(f)$$

Also $f^{**} = f$. □

**Folgerung 3.6**
Sind $V, W$ endlichdimensional, so liefert die Abbildung $f \mapsto f^*$ einen Isomorphismus von $K$-Vektorräumen.

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$$

*Beweis.* Sind $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $\lambda \in K$, $\varphi \in W^*$, so ist

$$(f+g)^*(\varphi) = \varphi \circ (f+g) = \varphi \circ f + \varphi \circ g = f^*(\varphi) + g^*(\varphi) = (f^* + g^*)(\varphi)$$
$$(\lambda f)^*(\varphi) = \varphi \circ (\lambda f) = \lambda \cdot (\varphi \circ f) = \lambda \circ f^*(\varphi) = (\lambda f^*)(\varphi)$$

Die Abbildung ist somit linear. Nach Folgerung 3.5 ist sie injektiv. Da

$$\begin{aligned} \dim_K(V, W) &= \dim_K(V) \cdot \dim_K(W) \\ &= \dim_K(V^*) \cdot \dim_K(W^*) \\ &= \dim_K(\mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)) \end{aligned}$$

ist sie auch ein Isomorphismus. □

**Satz 3.7**
Sind $V, W$ endlichdimensional so ist

$$\mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{Ker}(f)^0$$
$$\mathrm{Ker}(f^*) = \mathrm{Im}(f)^0$$

*Beweis.*

- $\mathrm{Im}(f^*) \subseteq \mathrm{Ker}(f)^0$: Ist $\varphi \in W^*$, $x \in \mathrm{Ker}(f)$, so ist

$$f^*(\varphi)(x) = (\varphi \circ f)(x) = \varphi(0) = 0$$

- $\mathrm{Ker}(f)^0 \subseteq \mathrm{Im}(f^*)$: Sei $\varphi \in \mathrm{Ker}(f)^0$. Setze eine Basis $(x_1, ..., x_r)$ von $\mathrm{Ker}(f)$ zu einer Basis $(x_1, ..., x_n)$ von $V$ fort. Dann sind $f(x_{r+1}), ..., f(x_n)$ linear unabhängig nach der Kern-Bild-Formel (LAAG 1 III.7.13), es gibt also $\psi \in W^*$ mit

$$\psi(f(x_i)) = \varphi(x_i) \quad \forall i$$

Es folgt

$$f^*(\psi)(x_i) = \psi(f(x_i)) = \varphi(x_i) \quad \forall i$$

also $\varphi = f^*(\psi)$.

- Mit der Identifizierung $V = V^{**}$ ist

$$\mathrm{Im}(f)^0 \overset{3.5}{=} \mathrm{Im}(f^{**})^0 = \mathrm{Ker}(f^*)^{00} \overset{2.15}{=} \mathrm{Ker}(f^*)$$

□

**Folgerung 3.8**
Sind $V, W$ endlichdimensional, so ist

$$\mathrm{rk}(f) = \mathrm{rk}(f^*)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
\mathrm{rk}(f) &= \dim_K(\mathrm{Im}(f)) \\
&\overset{2.14}{=} \dim_K(W) - \dim_K(\mathrm{Im}(f)^0) \\
&\overset{LAAG1.III.7.13}{=} \dim_K(W^*) - \dim_K(\mathrm{Ker}(f^*)) \\
&= \mathrm{rk}(f^*)
\end{aligned}$$

□

**Folgerung 3.9**
Ist $\dim_K(V) < \infty$ und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so lässt sich jede Linearform auf $U$ zu einer Linearform auf $V$ fortsetzen.

*Beweis.* Ist $f : U \to V$ die Inklusionsabbildung, so ist $f^* : V^* \to U^*$, $\varphi \mapsto \varphi|_U$ und

$$\mathrm{rk}(f^*) = \mathrm{rk}(f) = \dim_K(U) = \dim_K(U^*)$$

$f^*$ ist somit surjektiv. □

▶ **Bemerkung 3.10**
Folgerung 3.9 gilt auch ohne die Voraussetzung $\dim_K(V) < \infty$, siehe Übung.

▶ **Bemerkung 3.11**
Ein homogenes lineares Gleichungssystem $Ax = 0$ hat als Lösungsraum $L(A, 0) \subseteq K^n$ ein Untervektorraum des $K^n$. Unter der Identifizierung $K^n = (K^n)^{**}$ ist $L(A, 0)$ der Annulator der Linearformen beschrieben durch die Zeilen $a_1, ..., a_m \in (K^n)^*$ von $A$. Wir wollen umgekehrt zu einem Untervektorraum $W \subseteq K^n$ ein $A = (a_1, ..., a_m) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$ mit $W = L(A, 0)$ finden. Ist $W = \mathrm{span}_K(b_1, ..., b_r)$, so ist $W = \mathrm{Im}(f_B)$ mit $B = (b_1, ..., b_r) \in \mathrm{Mat}_{n\times r}(K)$.
$\Rightarrow W \overset{3.7}{=} \mathrm{Ker}(f_B^*)^0$ und $M_{\mathcal{E}^t}(f_B^*) = B^t$. Wenn man also eine Basis $(a_1, ..., a_s)$ von $L(B^t, 0)$ bestimmt und daraus eine Matrix $A = (a_1^t, ..., a_s^t) \in \mathrm{Mat}_{s\times n}(K)$ bildet, so ist $W = L(A, 0)$.

# 4. Die adjungierte Abbildung

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und $V$ ein endlichdimensionaler unitärer $K$-Vektorraum.

**Definition 4.1 (weitere Skalarmultiplikation)**
Wir definieren auf $V$ eine Skalarmultiplikation

$$\lambda * x = \overline{\lambda} \cdot x$$

und schreiben $\overline{V} = (V, +, *)$.

**Lemma 4.2**
$\overline{V}$ ist ein $K$-Vektorraum und $\mathrm{End}_K(V) = \mathrm{End}_K(\overline{V})$.

*Beweis.* Mit LAAG1 VI.1.7 nachprüfen, zum Beispiel:

- $\lambda * (x + y) = \overline{\lambda} \cdot (x + y) = \overline{\lambda} x + \overline{\lambda} y = \lambda * x + \lambda * y$
- $\lambda * (\mu * x) = \overline{\lambda}(\overline{\mu} \cdot x) = \overline{\lambda\mu} x = (\lambda\mu) * x$ □

Weiterhin sei: $f \in \mathrm{End}_K(V)$, $x \in V$, $\lambda \in K$
$\Rightarrow f(\lambda * x) = f(\overline{\lambda} x) = \lambda * f(x)$
$\Rightarrow f \in \mathrm{End}_K(\overline{V})$.
Umgekehrt sei $g \in \mathrm{End}_K(\overline{V})$, $x \in V$, $\lambda \in K$
$\Rightarrow g(\lambda \cdot x) = g(\overline{\lambda} * x) = \lambda \cdot g(x)$
$\Rightarrow g \in \mathrm{End}_K(V)$.

**Lemma 4.3**
Für $y \in V$ ist

$$\Phi_y : \begin{cases} V \to K \\ x \mapsto \langle x, y \rangle \end{cases}$$

eine Linearform auf $V$.

Die Abbildung $y \mapsto \Phi_y$ liefert einen Isomorphismus $\Phi : \overline{V} \to V^*$.

*Beweis.*
- $\Phi_y \in V^*$: Linearität in ersten Argument.
- $\Phi \in \mathrm{Hom}_K(\overline{V}, V^*)$: Für $y, y' \in V$, $\lambda \in K$, $x \in V$ ist
  - $\Phi_{y+y'}(x) = \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle = \Phi_y(x) + \Phi_{y'}(x)$
  - $\Phi_{\lambda * y}(x) = \langle x, \lambda * x \rangle = \left\langle x, \overline{\lambda} y \right\rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \lambda \Phi_y(x)$
- $\Phi$ injektiv: Skalarprodukt ist nicht ausgeartet.
- Da $\dim_K(\overline{V}) = \dim_K(V) = \dim_K(V^*)$ ist $\Phi$ somit ein Isomorphismus. □

**Satz 4.4**
Zu $f \in \mathrm{End}_K(V)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $f^{adj} \in \mathrm{End}_K(V)$ mit

$$\langle f(x), y \rangle = \left\langle x, f^{adj}(y) \right\rangle \quad \forall x, y \in V$$

*Beweis.* Existenz und Eindeutigkeit sind zu zeigen.

- Existenz:

$$\begin{tikzcd}
\overline{V} \arrow[r, leftrightarrow, "f", "f^{adj}"'] \arrow[d, "\Phi"'] & \overline{V} \arrow[d, "\Phi"] \\
V^* & V^* \arrow[l, "f^*"]
\end{tikzcd}$$

Für $f^{adj} = \Phi{-1} \circ f^* \circ \Phi \in \mathrm{End}_K(\overline{V}) = \mathrm{End}_K(V)$ ist

$$\Phi_y \circ = (f^* \circ \Phi)(y) = (\Phi \circ f^{adj.})(y) = \Phi_{f^{adj}(y)}$$

also

$$\langle f(x), y \rangle = (\Phi_y \circ f)(x) = \Phi_{f^{adj}(y)}(x) = \left\langle x, f^{adj}(y) \right\rangle \quad \forall x, y \in V$$

- Eindeutigkeit: Erfüllen $f_1, f_2$ für Gleichung

$$\langle f(x), y \rangle = \left\langle x, f^{adj}(y) \right\rangle \quad \forall x, y \in V$$

so ist

$$0 = \langle x, f_1(y) \rangle - \langle x, f_2(y) \rangle = \langle x, f_1(y), f_2(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht ausgeartet ist, folgt daraus, dass $f_1 = f_2$. □

**Definition 4.5 (adjungierter Endomorphismus)**
Die Abbildung $f^{adj}$ heißt der zu $f$ adjungierte Endomorphismus .

**Beispiel 4.6**

- Ist $f$ selbstadjungiert, so ist $f^{adj} = f$.
- Ist $f$ unitär, so ist $f \in \mathrm{Aut}_K(V)$ und

$$\langle f(x), y \rangle = \left\langle x, f^{-1}(y) \right\rangle \quad \forall x, y \in V$$

also $f^{adj} = f^{-1}$.

**Lemma 4.7**
Ist $B$ eine Orthonormalbasis vin $V$, so ist

$$M_B(f^{adj}) = M_B(f^*)$$

*Beweis.* Ist $A = M_B(f)$ und $B = M_B(f^{adj})$, $v = \Phi_B(x)$, $w = \Phi_B(y)$, so ist

$$\begin{aligned}(Ax)^t\overline{y} = \langle f(v), w\rangle &= \left\langle v, f^{adj}(w)\right\rangle \\ x^t A^t \overline{y} &= x^t \overline{B}\overline{y} \\ \Rightarrow B &= \overline{A^t} = A^*\end{aligned}$$

□

**Lemma 4.8**
Für $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\lambda, \mu \in K$ ist

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)^{adj} &= \overline{\lambda} f^{adj} + \overline{\mu} g^{adj} \\ \left(f^{adj}\right)^{adj} &= f\end{aligned}$$

*Beweis.* Für $x, y \in V$ ist

$$\begin{aligned}\langle(\lambda f + \mu g)(x), y\rangle &= \lambda \langle f(x), y\rangle + \mu \langle g(x), y\rangle \\ &= \lambda \left\langle x, f^{adj}(y)\right\rangle + \mu \left\langle x, g^{adj}\right\rangle \\ &= \left\langle x, (\overline{\lambda} f^{adj} + \overline{\mu} g^{adj})(y)\right\rangle\end{aligned}$$

und

$$\left\langle f^{adj}(x), y\right\rangle = \overline{\left\langle y, f^{adj}(y)\right\rangle} = \overline{\langle f(y), x\rangle} = \langle x, f(y)\rangle$$

□

# 5. Der Spektralsatz

Sei $V$ ein endlichdimensionaler unitärer $K$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$.

**Definition 5.1 (normaler Endomorphismus, normale Matrix)**
Der Endomorphismus $f$ heißt normal , wenn

$$f \circ f^{adj} = f^{adj} \circ f$$

Entsprechend heißt $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ normal , wenn

$$AA^* = A^*A$$

■ **Beispiel 5.2**

- Ist $f$ selbstadjungiert, so ist $f^{adj} = f$, insbesondere ist $f$ normal.
- Ist $f$ unitär, so ist $f^{adj} = f^{-1}$, insbesondere ist $f$ normal.

**Lemma 5.3**
Genau dann ist $f \in \mathrm{End}_K(V)$ normal, wenn

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \left\langle f^{adj}(x), f^{adj}(y)\right\rangle \quad \forall x, y \in V$$

*Beweis.*

- Hinrichtung: Ist $f$ normal, so ist

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= \left\langle x, (f^{adj} \circ f)(y)\right\rangle \\ &= \left\langle x, (f \circ f^{adj})(y)\right\rangle \\ &= \left\langle f^{adj}(x), f^{adj}(y)\right\rangle \quad \forall x, y \in V\end{aligned}$$

- Rückrichtung: Ist umgekehrt $\left\langle f^{adj}(x), f^{adj}(y)\right\rangle$, so ist

$$\begin{aligned}\left\langle x, (f^{adj} \circ f)(y)\right\rangle &= \left\langle x, (f \circ f^{adj})(y)\right\rangle \\ 0 &= \left\langle x, (f^{adj} \circ f - f \circ f^{adj})(y)\right\rangle \\ f^{adj} \circ f &= f \circ f^{adj}\end{aligned}$$

□

**Lemma 5.4**
Ist $f$ normal, ist ist

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^{adj})$$

*Beweis.* Nach Lemma 5.3 ist

$$\|f(x)\| = \|f^{adj}(x)\| \quad \forall x \in V$$

Insbesondere gilt

$$f(x) = 0 \iff f^{adj}(x) = 0$$ □

**Lemma 5.5**
?? Ist $f$ normal, so ist

$$\operatorname{Eig}(f, \lambda) = \operatorname{Eig}(f^{adj}, \overline{\lambda}) \quad \forall \lambda \in K$$

*Beweis.* Da $(\lambda \cdot \mathrm{id} - f)^{adj} \overset{4.8}{=} \overline{\lambda} \cdot \mathrm{id} - f^{adj}$ ist auch $\lambda \cdot \mathrm{id} - f$ normal. Somit ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Eig}(f, \lambda) &= \operatorname{Ker}(\lambda \,\mathrm{id} - f)\\ &\overset{5.4}{=} \operatorname{Ker}((\lambda \,\mathrm{id} - f)^{adj})\\ &= \operatorname{Ker}(\overline{\lambda} \,\mathrm{id} - f^{adj})\\ &= \operatorname{Eig}(f^{adj}, \overline{\lambda})\end{aligned}$$ □

**Theorem 5.6 (Spektralsatz)**
Sei $f \in \operatorname{End}_K(V)$ ein Endomorphismus, für den $\chi_f$ in Linearfaktoren zerfällt. Genau dann besitzt $V$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $f$, wenn $f$ normal ist.

*Beweis.*
- Hinrichtung: Ist $B$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $f$, so ist $A = M_B(f)$ eine Diagonalmatrix. Dann ist auch $M_B(f^{adj}) \overset{4.7}{=} A^*$ eine Diagonalmatrix und $AA^* = A^*A$. Somit ist $f$ normal.
- Rückrichtung: Sei $f$ normal und $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^{n}(t - \lambda_i)$. Beweis nach Induktion nach $n = \dim_K(V)$.
  $\underline{n = 0}$: klar
  $\underline{n - 1 \to n}$: Wähle Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1$, o.E. $\|x_1\| = 1$. Sei $U = K \cdot x_1$. Nach ?? ist $f^{adj}(x_1) = \overline{\lambda_1} x_1$, insbesondere ist $U$ $f$-invariant und $f^{adj}$-invariant. Für $x \in U^\perp$ ist

  $$\langle f(x), x_1 \rangle = \left\langle x, f^{adj}(x_1) \right\rangle = \left\langle x, \overline{\lambda_1} x_1 \right\rangle = \lambda_1 \langle x, x_1 \rangle = 0$$

  also $f(x) \in U^\perp$ und

  $$\left\langle f^{adj}(x), x_1 \right\rangle = \langle x, f(x_1) \rangle = \langle x, \lambda_1 x_1 \rangle = \overline{\lambda_1} \langle x, x_1 \rangle = 0$$

  also $f^{adj}(x) \in U^\perp$. Somit ist $V = U \oplus U^\perp$ eine Zerlegung in Untervektorräume, die sowohl $f$-invariant als auch $f^{adj}$-invariant sind. Insbesondere st $f^{adj}|_{U^\perp} = (f|_{U^\perp})^{adj}$, woraus folgt, dass auch $f|_{U^\perp}$ normal ist:

  $$f|_{U^\perp} \circ (f|_{U^\perp})^{adj} = f \circ f^{adj}|_{U^\perp} = f^{adj} \circ f|_{U^\perp} = f^{adj}|_{U^\perp} \circ f|_{U^\perp} = (f|_{U^\perp})^{adj} \circ f|_{U^\perp}$$

  Außerdem zerfällt auch $\chi_{f|_{U^\perp}} = \prod_{i=2}^{n}(t - \lambda_i)$ in Linearfaktoren. Nach Induktionshypothese existiert eine Orthonormalbasis $(x_2, ..., x_n)$ von $U^\perp$ bestehend aus Eigenvektoren von $f|_{U^\perp}$ und $(x_1, ..., x_n)$ ist dann eine Orthonormalbasis von $V$ aus Eigenvektoren von $f$. □

**Folgerung 5.7**
Sei $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$. Genau dann gibt es $S \in \mathrm{U}_n$ mit $S^*AS = D$ eine Diagonalmatrix, wenn $A$ normal ist.

▶ **Bemerkung 5.8**

Theorem 5.6 ist eine gemeinsame Verallgemeinerung von Theorem II.5.9 und Theorem II.6.5

# 6. Tensorprodukte

**Definition 6.1 (billineare Abbildung)**
Eine Abbildung $\xi : V \times W \to U$ ist bilinear , wenn für jedes $v \in V$ die Abbildung

$$\begin{cases} W \to U \\ w \mapsto \xi(v, w) \end{cases}$$

und für jedes $w \in W$ die Abbildung

$$\begin{cases} V \to U \\ v \mapsto \xi(v, w) \end{cases}$$

linear sind.

Wir definieren

$$\mathrm{Bil}_K(V, W, U) = \{\xi \in \mathrm{Abb}(V \times W, U) \mid \xi \text{ bilinear}\}$$

■ **Beispiel 6.2**
Seien $V = W = K[t]_{\leq d}$, $U = K[t]_{\leq 2d}$. Die Abbildung

$$\xi : \begin{cases} V \times W \to U \\ (f.g) \mapsto fg \end{cases} \qquad \text{ist bilinear}$$

Wir sehen, dass $\mathrm{Im}(\xi)$ im Allgemeinen kein Untervektorraum von $U$ ist. Ist zum Beispiel $K = \mathbb{Q}$, $d = 1$, so liegen $t^2 = \xi(t, t)$ und $-2 = \xi(-2, 1)$ im $\mathrm{Im}(\xi)$ nicht jedoch $t^2 - 2$, denn wäre $t^2 - 2 = fg$ mit $f, g \in \mathbb{Q}[t]$ linear, so hätte $t^2 - 2$ eine Nullstelle in $\mathbb{Q}$, aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

**Lemma 6.3**
$\mathrm{Bil}_K(V, W, U)$ bildet einen Untervektorraum des $K$-Vektorraum $\mathrm{Abb}(V \times W, U)$.

*Beweis.* klar, zum Beispiel

$$(\xi + \xi')(\lambda v, w) = \xi(\lambda v, w) + \xi'(\lambda v, w) = \lambda\xi(v, w) + \lambda\xi(v, w) = \lambda(\xi + \xi')(v, w) \qquad \square$$

**Lemma 6.4**
Ist $\xi \in \mathrm{Bil}_K(V, W, U)$ und $f \in \mathrm{Hom}_K(U, U')$ für einen $K$-Vektorraum, so ist

$$f \circ \xi \in \mathrm{Bil}_K(V, W, U')$$

*Beweis.* klar, zum Beispiel

$$(f \circ \xi)(\lambda v, w) = f(\xi(\lambda v, w)) = f(\lambda\xi(v, w)) = \lambda \cdot (f \circ \xi)(v, w) \qquad \square$$

**Lemma 6.5**
Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von $V$ und $(w_j)_{j\in J}$ eine Basis von $W$. Zu jeder Familie $(u_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ in $U$ gibt es genau ein $\xi \in \mathrm{Bil}_K(V,W,U)$ mit

$$\xi(v_i, w_i) = u_{ij} \quad \forall i \in I, j \in J$$

*Beweis.*

- Eindeutigkeit: Ist $\xi$ bilinear, $v = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i$, $w = \sum_{j\in J} \mu_j w_j$ so ist

$$\begin{aligned} \xi(v,w) &= \xi\left(\sum_{i\in I} \lambda_i v_i, \sum_{j\in J} \mu_j w_j\right) \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i \xi\left(v_i, \sum_{j\in J} \mu_j w_j\right) \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j u_{ij} \end{aligned} \tag{1}$$

  durch die Familie $(u_{ij})_{i,j}$ bestimmt.
- Existenz: Wird $\xi$ durch (1) definiert, so ist $\xi$ bilinear: Für festes $w = \sum_{j\in J} \mu_j w_j$ ist

$$\begin{cases} V & \to U \\ v = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i v_i & \mapsto \xi(v,w) = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i \left(\sum\limits_{j\in J} \mu_j u_{ij}\right) \end{cases}$$

  linear (LAAG1 III.5.1), analog für festes $v$. □

**Definition 6.6 (Tensorprodukt)**
Ein Tensorprodukt von $V$ und $W$ ist ein Paar $(T,\tau)$ bestehend aus einem $K$-Vektorraum $T$ und einer bilinearen Abbildung $\tau \in \mathrm{Bil}_K(V,W,T)$ welche die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: *Ist $U$ ein weiterer $K$-Vektorraum und $\xi \in \mathrm{Bil}_K(V,W,U)$ so gibt es genau ein $\xi_\otimes \in \mathrm{Hom}_K(T,U)$ mit $\xi = \xi_\otimes \circ \tau$.*

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\xi"'] & T \arrow[d, dashed, "\xi_\otimes"] \\ & U \end{tikzcd}$$

**Anmerkung**

Sind $V$ und $W$ zwei Vektorräume und $K$ ein gemeinsamer Körper, so kann man das Tensorprodukt $V \otimes W$, was auch ein Vektorraum ist, wie folgt konstruieren: Wenn $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis von $V$ und $C = (c_1, ..., c_m)$ eine Basis von $W$ ist, dass ist $V \otimes W$ ein Vektorraum, genannt *Tensorproduktraum*, in dem es eine Basis gibt, die auf eindeutige Weise mit den geordneten Paaren des kartesischen Produkts

$$B \times C = \{(b_i, c_j)\}$$

der Basen der Ausgangsräume identifiziert werden kann. Die Dimension von $V \otimes W$ ist dann das Produkt der Dimensionen von $V$ und $W$. Ein Element der Basis von $V \otimes W$, das dem Paar $(b_i, c_j)$ entspricht, wird als $b_i \otimes c_j$ notiert, das $\otimes$ hat also keine tiefere Bedeutung. Ein Element des Tensorproduktes $V \otimes W$ hat dann die Gestalt:

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} \cdot (b_i \otimes c_j)$$

mit $\lambda_{ij} \in K$.

**Lemma 6.7**

Sind $(T, \tau)$ und $(T', \tau')$ Tensorprodukte von $V$ und $W$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\Theta : T \to T'$ mit $\tau' = \Theta \circ \tau$.

$$\begin{tikzcd}
 & V \times W \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\tau'"] & \\
T \arrow[rr, dashed, bend left, "\Theta"] & & T' \arrow[ll, dashed, bend left, "\Theta'"]
\end{tikzcd}$$

*Beweis.* Da $(T, \tau)$ die universelle Eigenschaft erfüllt, gibt es ein eindeutig bestimmtes $\Theta = (\tau')_\otimes \in \mathrm{Hom}_K(T, T')$ mit $\tau' = \Theta \circ \tau$. Analog gibt es $\Theta' \in \mathrm{Hom}_K(T', T)$ mit $\tau = \Theta' \circ \tau'$. Es folgt, dass $\tau = \Theta' \circ \tau' = \Theta' \circ \Theta \circ \tau$. Da auch $\tau = \mathrm{id}_T \circ \tau$ liefert die Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft von $(T, \tau)$, für $U = T$, $\xi = \tau$, dass $\Theta \circ \Theta' = \mathrm{id}_T$. Analog sieht man, dass $\Theta \circ \Theta' = \mathrm{id}_{T'}$. Somit ist $\Theta$ ein Isomorphismus. □

**Definition 6.8 (Vektorraum mit Basis $X$)**

Sei $X$ eine Menge. Der $K$-Vektorraum mit Basis $X$ ist der Untervektorraum $V = \mathrm{span}_K((\delta_x)_{x \in X})$ des $K$-Vektorraum $\mathrm{Abb}(X, K)$ mit $\delta_x(y) = \delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$

**Lemma 6.9**

Sei $X$ eine Menge und $V$ der $K$-Vektorraum mit Basis $X$. Dann ist $V$ ein $K$-Vektorraum und $(\delta_x)_{x \in X}$ ist eine Basis von $V$.

*Beweis.* Zu zeigen ist nur, dass $(\delta_x)_{x \in X}$ linear unabhängig ist. Ist $f = \sum_{x \in X} \lambda_x \delta_x$, $\lambda_x \in K$, fast alle gleich 0, und $f = 0$, so ist $\lambda_x = f(x) = 0$ für jedes $x \in X$. □

**Lemma 6.10**
Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von $V$ und $(w_j)_{j\in J}$ eine Basis von $W$. Sei $T$ der $K$-Vektorraum mit der Basis $I \times J$ (im Sinne von Definition 6.8) und $\tau : V \times W \to T$ die bilineare Abbildung gegeben durch $(v_i, w_j) \mapsto \delta_{i,j}$, vergleiche Lemma 6.5. Dann ist $(T, \tau)$ ein Tensorprodukt von $V$ und $W$.

*Beweis.* Wir schreiben $v_i \otimes w_j$ für $\delta_{i,j}$. Sei $U$ ein weiterer $K$-Vektorraum und $\xi \in \mathrm{Bil}_K(V, W, U)$. Da $(v_i \otimes w_j)_{(ij)\in I\times J}$ eine Basis von $T$ ist, gibt es genau ein $\xi_\otimes \in \mathrm{Hom}_K(T, U)$ mit $\xi_\otimes(v_i \otimes w_j) = \xi(v_i, w_j)$ für alle $i, j$, also mit $\xi_\otimes \circ \tau = \xi$ nach Lemma 6.5. Die universelle Eigenschaft ist somit erfüllt. □

**Satz 6.11**
Es gibt ein bis auf Isomorphie (im Sinne von Lemma 6.7) eindeutig bestimmtes Tensorprodukt

$$(V \otimes_K W, \otimes)$$

von $V$ und $W$. Sind $V$ und $W$ endlichdimensional, so ist

$$\dim_K(V \otimes_K W) = \dim_K(V) \cdot \dim_K(W)$$

*Beweis.* Lemma 6.10 und Lemma 6.7 □

■ **Beispiel 6.12**
Durch die Wahl der Standardbasis erhält man einen kanonischen Isomorphismus $K^m \otimes_K K^n \cong \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$.

■ **Beispiel 6.13**
Ist $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $(x_1, ..., x_n)$, so ist $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $2n$ mit Basis $(1 \otimes x_1 ..., 1 \otimes x_n, i \otimes x_1, ..., i \otimes x_n)$. Durch $\lambda \cdot z \otimes x = (\lambda z) \otimes x$ für $\lambda, z \in \mathbb{C}$, $x \in V$ wird $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $1 \otimes x_1, ..., 1 \otimes x_n$, $V_{\mathbb{C}}$, genannt die Komplexifizierung von $V$.

**Satz 6.14**
Sei $V \otimes_K W$ ein Tensorprodukt von $V$ und $W$. Für jeden weiteren $K$-Vektorraum $U$ liefert die Abbildung $\xi \to \xi_\otimes$ ein Isomorphismus

$$\mathrm{Bil}_K(V, W, U) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_K(V \otimes_K W, U)$$

*Beweis.* Diese Abbildung heiße $\Lambda$.

- $\Lambda$ ist linear: klar aus Eindeutigkeitsaussage, z.B.

$$(\xi_\otimes + \xi'_\otimes) \circ \otimes = \xi_\otimes \circ \otimes + \xi'_\otimes \circ \otimes = \xi + \xi' = (\xi + \xi')_\otimes \circ \otimes$$

  und somit $\xi_\otimes + \xi'_\otimes = (\xi + \xi')_\otimes$.
- $\Lambda$ ist injektiv: Ist $\xi \neq 0$, so wegen $\xi = \xi_\otimes \circ \otimes$ auch $\xi_\otimes \neq 0$.
- $\Lambda$ ist surjektiv: Ist $f \in \mathrm{Hom}_K(V \otimes_K W, U)$, so ist $\xi = f \circ \otimes$ bilinear, die universelle Eigenschaft liefert somit $f = \xi_\otimes \in \mathrm{Im}(\Lambda)$. □

**Folgerung 6.15**
Sind $V$ und $W$ endlichdimensional, so ist

$$V \otimes_K W \cong \mathrm{Bil}_K(V, W, K)^*$$

*Beweis.* Es ist $\dim_K(V \otimes_K W) < \infty$ und deshalb

$$V \otimes_K W \cong (V \otimes_K W)^{**} \overset{6.14}{\cong} \mathrm{Bil}_K(V, W, K)$$ □

**▶ Bemerkung 6.16**
Während obige Konstruktion des Tensorprodukts von der Wahl (und Existenz) von Basen abhängt, ist die folgende Konstruktion "basisfrei":
Sei $T_1$ der $K$-Vektorraum mit Basis $V \times W$ und $T_0$ der Untervektorraum von $T_1$ erzeugt von Elementen der Form:

$$\begin{aligned}
\delta_{v+v',w} - \delta_{v,w} - \delta_{v',w}\\
\delta_{v,w+w'} - \delta_{v,w} - \delta_{v,w'}\\
\delta_{\lambda v,w} - \lambda \cdot \delta_{v,w}\\
\delta_{v,\lambda w} - \lambda \cdot \delta_{v,w}
\end{aligned}$$

mit $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ und $\lambda \in K$. Sei weiter $T = T_1/T_0$ und $\tau : V \times W \to T$ gegeben durch $(v, w) \mapsto \delta_{v,w} + T_0$. Dann ist $(T, \tau)$ ein Tensorprodukt von $V$ und $W$.

$$\begin{tikzcd}
 & T_1 \arrow[d, "\pi_{T_0}"] \arrow[dd, dashed, bend left] \\
V \times W \arrow[ur] \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\xi"'] & T_1/T_0 \arrow[d, dashed] \\
 & U
\end{tikzcd}$$

**▶ Bemerkung 6.17**
Analog kann man für $k \geq 2$ und die $K$-Vektorräume $V_1, ..., V_k$ $k$-lineare Abbildungen $V_1 \times ... \times V_k \to U$ definieren und erhält dann Tensorprodukte $V_1 \otimes_K ... \otimes_K V_k$.

## Kapitel IV

# *Moduln*

In diesem ganzen Kapitel sei $R$ ein kommutativer Ring mit Einselement.

## 1. Moduln

**Definition 1.1**
Ein $R$-Modul ist ein Tripel $(M, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge $M$, einer Verknüpfung $+ : M \times M \to M$ und der Abbildung $\cdot : R \times M \to M$ (Skalarmultiplikation) für die gelten:

- (M1): $(M, +)$ ist eine abelsche Gruppe
- (M2): Addition und Skalarmultiplikation sind verträglich. Für alle $x, y \in M$ und $a, b \in R$ gelten
  1. $a(x + y) = ax + ay$
  2. $(a + b)x = ax + bx$
  3. $a \cdot bx = ab \cdot x$
  4. $1 \cdot x = x$

■ **Beispiel 1.2**

1. Ist $R = K$ ein Körper, so sind die $R$-Moduln genau die $K$-Vektorräume.
2. Ist $R = \mathbb{Z}$, so sind die $R$-Moduln genau die abelschen Gruppen mit der einzig möglichen Skalarmultiplikation
$$\mathbb{Z} \times A \to A, (k, a) \mapsto ka = \underbrace{1 + ... + 1}_{k\text{-mal}} a = \underbrace{a + ... + a}_{k\text{-mal}}$$
vergleiche Laag 1 III.2.3
3. Jedes Ideal $M \subseteq R$ ist ein $R$-Modul mit Einschränkung der Multiplikation als Skalarmultiplikation.
4. Ist $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$, so wird $V$ durch $P(t) \cdot x := P(f)(x)$ zu einem Modul über dem Ring $R = K[t]$, siehe auch V.5.2

▶ **Bemerkung 1.3**
Sei $M$ ein $R$-Modul. Wie für Vektorräume (LAAG 1 II.1.5) überzeugt man sich leicht, dass $0x = 0$, $a0 = 0$, $(-a)x = a(-x) = -ax$ für alle $a \in R$, $x \in M$.

Im Gegensatz zu Vektorräumen folgt aber aus $ax = 0$ nicht, dass $a = 0$ oder $x = 0$, siehe zum

Beispiel das $\mathbb{Z}$-Modul $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Es ist

$$n \cdot \overline{1} = \overline{n} = \overline{0} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

aber $0 \neq n \in \mathbb{Z}$.

**Definition 1.4 (Homomorphismus von *R*-Moduln)**
Seien $M, M'$ $R$-Moduln. Eine Abbildung $f : M \to M'$ ein Homomorphismus von $R$-Moduln (oder $R$-Homomorphismus oder $R$-linear), wenn

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(ax) &= a \cdot f(x) \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Menge der $R$-Homomorphismen $f : M \to M'$ mit $\mathrm{Hom}_R(M, M')$. Wie üblich definiert man den Kern eines $R$-Homomorphismus, sowie die Begriffe Monomorphismus , Epimorphismus , Isomorphismus , Endomorphismus und Automorphismus von $R$-Moduln.

■ **Beispiel 1.5**

- Ist $R = K$, so sind die $R$-Homomorphismen genau die lineare Abbildungen.
- Ist $R = \mathbb{Z}$, so sind die $R$-Homomorphismen genau die Gruppenhomomorphismen.

■ **Beispiel 1.6**
Für jedes $a \in R$ ist die Abbildung

$$\begin{cases} M \to M \\ x \mapsto ax \end{cases}$$

einen Endomorphismus von $M$.

**Definition 1.7 (Untermodul, Erzeugendensystem)**
Ein Untermodul ist eine nichtleere Teilmenge $N \subseteq M$, für die gilt:

- Sind $x, y \in N$, so ist auch $x + y \in N$.
- Ist $a \in R$ und $x \in N$, so ist auch $ax \in N$.

Für eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ ist

$$\sum_{i \in I} Rx_i = \{\sum_{i \in I} ax_i \mid a \in R, \text{ fast alle gleich } 0\}$$

der von $(x_i)_{i \in I}$ erzeugte Untermodul von $M$. Ist $\sum_{i \in I} Rx_i = M$, so ist $(x_i)_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem von $M$. Der $R$-Modul $M$ ist endlich erzeugt , wenn er ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

▶ **Bemerkung 1.8**
Wieder ist der Kern eines $R$-Homomorphismus $f : M \to M'$ ein Untermodul von $M$. Leicht sieht man auch hier, dass $\sum_{i \in I} Rx_i$ ein Untermodul von $M$ ist, und zwar der kleinste, der alle $x_i$ enthält.

■ **Beispiel 1.9**

- Ist $R = K$ ein Körper, so sind die Untermoduln von $M$ genau die Untervektorräume.
- Ist $R = \mathbb{Z}$, so sind die Untermoduln von $M$ genau die Untergruppen und der von einer Familie erzeugte Untermodul ist genau gleich der davon erzeugten Untergruppe.
  Ist zum Beispiel $M = \mathbb{Z}$, so sind alle $n\mathbb{Z}$ Untermoduln von $M$.

**Definition 1.10 (freie Familie, Basis)**
Eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ in $M$ ist frei oder ($R$-linear unabhängig), wenn es keine Familie $(\lambda_i)_{i\in I}$ von Elementen von $R$, fast alle gleich 0, aber nicht alle gleich 0, mit $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ gibt.

Ein freies Erzeugendensystem heißt Basis . Besitzt $M$ eine Basis, so nennt man $M$ frei .

**Satz 1.11**
Seien $M, M'$ $R$-Moduln, $(x_i)_{i\in I}$ eine Basis von $M$ und $(y_i)_{i\in I}$ eine Familie in $M'$. Dann gibt es genau eine $R$-lineare Abbildung $f : M \to M'$ mit $f(x_i) = y_i$ für alle $i$.

*Beweis.* klar, siehe LAAG 1 III.5.1 □

■ **Beispiel 1.12**

- Für $n \in \mathbb{N}$ ist $M = R^n$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ein endlich erzeugter freier $R$-Modul mit der üblichen Standardbasis.
- Allerdings ist zum Beispiel der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zwar endlich erzeugt aber nicht frei. Für $\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist $n\overline{a} = \overline{0}$, also $\overline{a}$ linear abhängig.

**Definition 1.13 (Summen von Moduln)**
Die Summe einer Familie $(N_i)_{i\in I}$ von Untermoduln von $M$ ist

$$\sum_{i\in I} N_i = \left\{ \sum_{i\in I} x_i \mid x_i \in N_i, \text{ fast alle gleich } 0 \right\}$$

Lässt sich jedes $x \in \sum_{i\in I} N_i$ eindeutig als $\sum_{i\in I} x_i$ mit $x_i \in N_i$ schreiben, so nennt man die Summe direkt und schreibt dafür auch $\bigoplus_{i\in I} N_i$.

Ist $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von $R$-Moduln, so definiert man deren (externe) direkte Summe als das $R$-Modul

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid x_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I \right\}$$

mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation.

▶ **Bemerkung 1.14**
Wie auch für Vektorräume ist eine externe direkte Summe eine direkte Summe der entsprechenden Untermoduln und ist $M = \bigoplus_{i\in I} N_i$, so ist $M$ isomorph zur externen direkten Summe der $N_i$.

**Definition 1.15 (Torsionsmodul)**
Für $a \in R$ definiert man den $a$-Torsionsmodul von $M$ als

$$M[a] := \{x \in M \mid ax = 0\}$$

Die Elemente des Torsionsmoduls

$$M_{tor} := \bigcup_{0 \neq a \in R} M[a] = \{x \in M \mid ax = 0 \text{ für ein } a \in R \backslash \{0\}\}$$

nennt man die Torsionselemente von $M$.

**Satz 1.16**
Für $a \in R$ ist $M[a]$ ein Untermodul von $M$. Ist $R$ nullteilerfrei, so ist auch $M_{tor}$ ein Untermodul von $M$.

*Beweis.* $M[a]$ ist der Kern des Endomorphismus $x \mapsto ax$ (Beispiel 1.6), somit ein Untermodul (Bemerkung 1.8). Seien $a, b \in R\backslash\{0\}$ und $x \in M[a]$, $y \in M[b]$. Ist $R$ nullteilerfrei so ist $ab \neq 0$ und

$$(ab) \cdot (x + y) = b \cdot \underbrace{ax}_{=0} + a \cdot \underbrace{by}_{=0} = 0$$

also $x + y \in M[ab] \subseteq M_{tor}$. Somit ist $M_{tor}$ in diesem Fall einer Untermodul von $M$. □

■ **Beispiel 1.17**
Sei $R = \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dann ist $M_{tor} = M = M[n]$.

## 2. Teilbarkeit

**Definition 2.1 (Teilbarkeit)**
Seien $a, b \in R$.

1. $a$ teilt $b$ (in Zeichen $a \mid b$): Es existiert $x \in R$ mit $b = ax$.
2. $a$ und $b$ sind assoziiert (in Zeichen $a \sim b$): Es existiert $x \in R^\times$ mit $b = ax$.

**Lemma 2.2**
Für $a, b, c, d \in R$ gelten

1. $a \mid a$
2. $a \mid b$ und $b \mid c \Rightarrow a \mid c$
3. $a \mid b$ und $a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$
4. $a \mid b$ und $c \mid c \Rightarrow (ac) \mid (bd)$

*Beweis.* klar □

**Lemma 2.3**
Für $a, b, c, d \in R$ gelten

1. $a \sim a$
2. $a \sim b$ und $b \sim c \Rightarrow a \sim c$
3. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
4. $a \sim b$ und $c \sim c \Rightarrow (ac) \sim (bd)$

*Beweis.* klar, da $(R^\times, \cdot)$ eine Gruppe ist. □

▶ **Bemerkung 2.4**
Teilbarkeit auf $R$ ist insbesondere eine Präordnung , das heißt reflexiv und transitiv, und Assoziiertheit ist eine Äquivalenzrelation.

**Lemma 2.5**
Sei $R$ nullteilerfrei und seien $a, b \in R$. Genau dann ist $a \sim b$, wenn $a \mid b$ und $b \mid a$.

*Beweis.*
- Hinrichtung: $b = ax$ mit $x \in R^\times \Rightarrow a = bx^{-1}$.
- Rückrichtung: $b = ax$, $a = by$ mit $x, y \in R^\times$

$$a = by = axy$$
$$a(1 - xy) = 0$$

Also $a = 0$ und damit $b = 0$ oder $xy = 1$, also $x, y \in R^\times$. In beiden Fällen folgt $a \sim b$. □

■ **Beispiel**

Offenbar $2 \mid -2$ und $-2 \mid 2$. Es gilt $2 \sim -2$ und $-2 \sim 2$.

**Satz 2.6**

Sie $R$ nullteilerfrei. Mit $[a] := \{a' \in R \mid a \sim a'\}$ wird durch $[a][b] \iff a \mid b$ eine wohldefinierte Halbordnung auf $R/\sim := \{[a] \mid a \in R\}$ gegeben.

*Beweis.*

- wohldefiniert: $a \mid b$, $a \sim a'$, $b \sim b' \Rightarrow a' \mid b'$: $ax = b$, $au = a'$, $bv = b$ mit $x \in R$ und $u, v \in R^\times$

$$b' = bv = axv = a' \underbrace{u^{-1}vx}_{\in R}$$

also $a' \mid b'$.

- reflexiv: klar
- transitiv: aus Transitivität von $\mid$
- antisymmetrisch: Lemma 2.5 □

**Definition 2.7 (größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches)**

Seien $a, b \in R$. Ein $c \in R$ ist ein größter gemeinsamer Teiler von $a$ und $b$ in Zeichen $c = \operatorname{ggT}(a, b)$, wenn gilt: $c \mid a$ und $c \mid b$ und ist $d \in R$ mit $d \mid a$ und $d \mid b$, so auch $d \mid c$.

Ein $c \in R$ ist ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von $a$ und $b$, in Zeichen $c = \operatorname{kgV}(a, b)$, wenn gilt: $a \mid c$ und $b \mid c$ und ist $d \in R$ mit $a \mid d$ und $b \mid d$, so ist $c \mid d$.

▶ **Bemerkung 2.8**

Wenn ggT und kgV in einem nullteilerfreien Ring $R$ existieren, sind sie eindeutig bestimmt, aber nur bis auf Assoziiertheit (Lemma 2.5).

**Definition 2.9 (Primzahl, irreduzibel)**

Sei $x \in R$.

- $x$ ist prim $\iff x \notin R^\times \cup \{0\}$ und $\forall a, b \in R$ gilt $x \mid (ab) \Rightarrow x \mid a \vee x \mid b$.
- $x$ ist irreduzibel $\iff x \notin R^\times \cup \{0\}$ und $\forall a, b \in R$ gilt $x = ab \Rightarrow a \in R^\times \vee b \in R^\times$.

▶ **Bemerkung 2.10**

Leicht sieht man: Ist $p \in R$ prim und $a_1, ..., a_n \in R$ mit $p \mid (a_1 \dots a_n)$, so gilt $p \mid a_i$ für ein $i$.

■ **Beispiel 2.11**

- In $R = \mathbb{Z}$ gilt: $p$ prim $\iff p$ irreduzibel
- Sei $f \in R = \mathbb{Q}[t]$.
  - $\deg(f) = 1 \Rightarrow f \sim (t - a)$ ist irreduzibel und prim (denn $(t - a) \mid g \iff g(a) = 0$)
  - $\deg(f) = 2$: $f = t^2 - 1$ ist nicht irreduzibel, $t^2 - 2$ ist irreduzibel

**Satz 2.12**

Sei $R$ nullteilerfrei und $0 \neq p \in R \backslash R^\times$. Ist $p$ prim, so ist es auch irreduzibel.

*Beweis.* Sei $p = ab$ mit $a, b \in R$. Da insbesondere $p \mid ab$ und $p$ prim ist, folgt $p \mid a$ oder $p \mid b$. Sei ohne Einschränkung $p \mid a$, das heißt $a = pa'$ mit $a' \in R$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow p = ab = pa'b \\
&\Rightarrow p(1 - ab) = 0 \\
&\Rightarrow a'b = 1, \text{ insbesondere } b \in R^\times
\end{aligned}$$

Somit ist $p$ irreduzibel. □

▶ **Bemerkung 2.13**

Erinnerung: Ein Ideal von $R$ ist eine Untergruppe $I \subseteq (R, +)$ mit

$$a \in I, r \in R \Rightarrow ra \in I$$

also genau ein Untermodul des $R$-Moduls $R$.

**Definition 2.14 (erzeugtes Ideal, Hauptideal)**

Sei $A \subseteq R$. Das von $A$ erzeugte Ideal mit

$$\langle A \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i a_i \mid n \in \mathbb{N}_0, a_1, ..., a_n \in A, r_1, ..., r_n \in R \right\}$$

Ist $A = \{a_1, ..., a_n\}$, so schreibt man auch $(a_1, ..., a_n)$ für $\langle A \rangle$. Ein Ideal der Form $I = (a)$ ist ein Hauptideal .

▶ **Bemerkung 2.15**

Das von $A$ erzeugte Ideal $\langle A \rangle$ ist gleich dem von $A$ erzeugten Untermodul des $R$-Moduls $R$, und ist das kleinste Ideal von $R$, das $A$ enthält.

▶ **Bemerkung 2.16**

Für $a \in R$ ist $(a) = Ra$ und für $a, b \in R$ sind äquivalent:

1. $a \mid b$
2. $b \in (a)$
3. $(b) \subseteq (a)$

Für $R$ nullteilerfrei sind zudem äquivalent:

1. $a \sim b$
2. $(a) = (b)$

■ **Beispiel 2.17**

Jeder Ring hat die Ideale $(0) = \{0\}$ und $(1) = R$. Für jedes $a \in R^\times$ ist $(a) = (1)$, ist $R$ also ein Körper, so hat $R$ keine weiteren Ideale.

■ **Beispiel 2.18**

In $R = \mathbb{Z}$: Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $(n) = \mathbb{Z} \cdot n = n\mathbb{Z}$.

# 3. Hauptidealringe

Sei $R$ nullteilerfrei.

**Definition 3.1 (Hauptidealring)**
Ein Ring $R$ ist ein Hauptidealring , wenn $R$ nullteilerfrei ist und jedes Ideal von $R$ ein Hauptideal ist.

**Beispiel 3.2**
Ist $R = K$ ein Körper, so hat $R$ nur die Ideale $(0)$ und $(1)$, und somit ist $R$ ein Hauptidealring.

**Definition 3.3 (euklidische Gradfunktion)**
Eine euklidische Gradfunktion auf $R$ ist eine Abbildung $\delta : R\backslash\{0\} \to \mathbb{N}_0$ für die gilt:
Für jedes $a \in R$ und $0 \neq b \in R$ gibt es $q, r \in R$ mit $a = bq + r$, wobei $r = 0$ oder $\delta(r) < \delta(b)$.

Ein nullteilerfreier Ring $R$ ist euklidisch , wenn es eine euklidische Gradfunktion auf $R$ gibt.

**Beispiel 3.4**

1. Auf $R = \mathbb{Z}$ ist der Absolutbetrag
$$\delta(x) = |x|$$
eine euklidische Gradfunktion. (LAAG 1 I.4.6)

2. Auf $R = K[t]$, $K$ ein Körper, ist der Grad
$$\delta(f) = \deg(f)$$
eine euklidische Gradfunktion. (LAAG 1 I.6.5)

3. $R = K$ ein Körper ist
$$\delta(x) = 0$$
eine euklidische Gradfunktion, da man in einem Körper jedes Element durch jedes Element (Ausnahme: 0) teilen kann.

**Lemma 3.5**
Sei $\delta : R\backslash\{0\} \to \mathbb{N}_0$ eine euklidische Gradfunktion und $(0) \neq \trianglelefteq R$ ein Ideal. Ist $0 \neq a \in I$ mit $\delta(a) = \min\{\delta(b) \mid 0 \neq b \in I\}$, so ist $I = (a)$.

*Beweis.*

- "$\supseteq$": $a \in I \Rightarrow (a) \subset I$
- "$\subseteq$": Sei $0 \neq b \in I$. Schreibe $b = qa + r$ mit $q, r \in R$ und $r = 0$ oder $\delta(r) < \delta(a)$. Da $r = \underbrace{b}_{\in I} - q\underbrace{a}_{\in I} \in I$ folgt wegen der Minimalität von $\delta(a)$, dass $r = 0$, also $b \in (a)$. □

**Satz 3.6**
Ist $R$ euklidisch, so ist $R$ ein Hauptidealring.

*Beweis.* Sei $I \trianglelefteq R$ ein Ideal. Ist $I = (0)$, so ist $I$ ein Hauptideal. Andernfalls existiert ein $0 \neq a \in I$ mit $\delta(a)$

minimal. Nach Lemma 3.5 ist $I = (a)$ ein Hauptideal. □

**Folgerung 3.7**
Die Ringe $\mathbb{Z}$ und $K[t]$, $K$ ein Körper, sind Hauptidealringe.

**Lemma 3.8**
Sei $R$ ein Hauptidealring und $a, b \in R$. Es existiert ein $c \in R$ mit $c = \mathrm{ggT}(a, b)$ und $(c) = (a, b)$. Insbesondere gibt es $x, y \in R$ mit $c = ax + by$ und $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$.

*Beweis.* $R$ Hauptidealring $\Rightarrow \exists c \in R$ mit $(c) = (a, b)$, insbesondere $c = ax + by$ mit $x, y \in R$.

- $c = \mathrm{ggT}(a, b)$: $a, b \in (c) \Rightarrow c \mid a$ und $c \mid b$. Ist $d \in R$ mit $d \mid a$ und $d \mid b$, so ist $d \mid (ax + by) = c$
- $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$: Ist $d \in R$ mit $d \mid x$ und $d \mid y$, so gelten $(cd) \mid (ax)$ und $(cd) \mid (by) \Rightarrow (cd) \mid (ax + by) = c \Rightarrow d \in R^\times$, also $d \sim 1$. □

**Satz 3.9**
Sei $R$ ein Hauptidealring, $p \in R$. Ist $p$ irreduzibel, so auch prim.

*Beweis.* Seien $a, b \in R$ mit $p \mid (ab)$. Angenommen $p \nmid a$. DA $p$ irreduzibel ist, ist $\mathrm{ggT}(p, a) = 1$, also $1 = px + ay$ mit $x, y \in R$ nach Lemma 3.8. Also $p \mid (pbx + aby) = b$. □

# 4. Faktorielle Ring

Sei $R$ nullteilerfrei.

**Definition 4.1 (faktorielle Ringe)**
$R$ ist faktoriell $\iff$ jedes $0 \neq x \in R \backslash R^\times$ ist ein Produkt von Primelementen.

**Lemma 4.2**
Sei $R$ faktoriell und $x \in R$. Ist $x$ irreduzibel, so auch prim.

*Beweis.* Sei $x$ irreduzibel, insbesondere $0 \neq x \in R \backslash R^\times$. Da $R$ faktoriell, ist $x = p_1, ..., p_n$ mit $p_1, ..., p_n \in R$ prim. Da $x$ irreduzibel ist und $p_i \notin R^\times$ ist $n = 1$ und somit $x = p_1$ prim. □

# Anhang

# Anhang A: Listen

## A.1. Liste der Theoreme

## A.2. Liste der benannten Sätze