

Analysis (WS2017/18 + SS2018)

Dozent: Prof. Dr. Friedemann Schuricht

Kursassistenz: Moritz Schönherr

26. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|------------|---|-----------|
| A | 1. Semester | 1 |
| I | Grundlagen der Mathematik | 2 |
| 1 | Grundbegriffe aus Logik und Mengenlehre | 2 |
| 1.1 | Aufbau einer mathematischen Theorie | 4 |
| 1.2 | Relation und Funktion | 5 |
| 2 | Bemerkungen zum Fundament der Mathematik | 8 |
| II | Zahlenbereiche | 9 |
| 5 | Natürliche Zahlen | 9 |
| 5.1 | Rechenoperationen | 10 |
| 5.2 | Ordnung auf \mathbb{N} | 11 |
| 6 | Ganze und rationale Zahlen | 13 |
| 6.1 | Ganze Zahlen | 13 |
| 6.2 | Rechenoperationen auf $\bar{\mathbb{Z}}$ | 13 |
| 6.3 | Ordnung auf $\bar{\mathbb{Z}}$ | 14 |
| 6.4 | Rationale Zahlen | 15 |
| 6.5 | Rechenoperationen auf \mathbb{Q} | 15 |
| 6.6 | Ordnung auf \mathbb{Q} | 15 |
| 7 | Reelle Zahlen | 17 |
| 7.1 | Rechenoperationen | 22 |
| 7.2 | Ordnung auf \mathbb{R} | 23 |
| 7.3 | Anwendung: Wurzeln, Potenzen, Logarithmen in \mathbb{R} | 25 |
| 7.4 | Mächtigkeit von Mengen | 26 |
| 8 | Komplexe Zahlen (kurzer Überblick) | 27 |
| III | Metrische Räume und Konvergenz | 28 |
| 16 | Grundlegende Ungleichungen | 28 |
| 17 | Metrische Räume | 31 |
| 18 | Konvergenz | 36 |
| 18.1 | Konvergenz im normierten Raum X | 38 |
| 18.2 | Konvergenz in \mathbb{R} | 40 |
| 18.3 | Oberer und Unterer Limes | 41 |
| 18.4 | Uneigentliche Konvergenz | 42 |
| 19 | Vollständigkeit | 44 |
| 20 | Kompaktheit | 46 |
| 21 | Reihen | 48 |
| IV | Funktionen und Stetigkeit | 52 |
| 34 | Funktionen | 52 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 35 | Stetigkeit | 59 |
| 36 | Anwendung | 64 |
| B | 2. Semester | 69 |
| V | Differentiation | 70 |
| 52 | Wiederholung und Motivation | 70 |
| 52.1 | Lineare Abbildungen | 70 |
| 52.2 | LANDAU-Symbole | 71 |
| 53 | Ableitung | 75 |
| 53.1 | Spezialfälle für $K = \mathbb{R}$ | 77 |
| 53.2 | Einfache Beispiele für Ableitungen | 78 |
| 53.3 | Rechenregeln | 82 |
| 54 | Richtungsableitung und partielle Ableitung | 88 |
| 54.1 | Anwendung: Eigenschaften des Gradienten | 89 |
| 54.2 | \mathbb{R} -differenzierbar und \mathbb{C} -differenzierbar | 92 |
| 54.3 | CAUCHY-RIEMANN-Differentialgleichungen | 94 |
| 55 | Mittelwertsatz und Anwendung | 96 |
| 55.1 | Anwendung des Mittelwertsatzes in \mathbb{R} | 101 |
| 56 | Stammfunktionen | 105 |
| VI | Integration | 110 |
| 77 | Messbarkeit | 111 |
| 77.1 | LEBESGUE-Maß | 111 |
| 77.2 | Messbare Mengen | 113 |
| 77.3 | Messbare Funktionen | 116 |
| 78 | Integral | 123 |
| 78.1 | Integral für Treppenfunktionen | 123 |
| 78.2 | Erweiterung auf messbare Funktionen | 123 |
| 78.3 | LEBESGUE-Integral | 124 |
| 78.4 | Grenzwertsätze | 131 |
| 78.5 | Parameterabhängige Integrale | 134 |
| 78.6 | RIEMANN-Integral | 135 |
| 79 | Integration auf \mathbb{R} | 138 |
| 79.1 | Integrale konkret ausrechnen | 138 |
| 79.2 | Uneigentliche Integrale | 142 |
| 80 | Satz von FUBINI und Mehrfachintegrale | 145 |
| 80.1 | Integration durch Koordinatentransformation | 148 |
| VII | Differentiation II | 151 |
| 105 | Höhere Ableitungen und TAYLOR-scher Satz | 151 |
| 105.1 | Partielle Ableitungen | 155 |
| 105.2 | Anwendungen | 160 |
| 105.3 | TAYLOR-scher Satz | 161 |

| | | |
|-----------------|---|------------|
| 106 | Extremwerte | 166 |
| 106.1 | Lokale Extrema ohne Nebenbedingung | 166 |
| 106.2 | Sylvester'sches Definitheitskriterium | 167 |
| 106.3 | Lokale Extrema mit Gleichungsnebenbedingung | 168 |
| 106.4 | Globale Extrema mit Abstrakter Nebenbedingung | 169 |
| 107 | Inverse und implizite Funktionen | 171 |
| 108 | Funktionsfolgen | 181 |
| 108.1 | Anwendung auf Potenzreihen | 182 |
| Anhang | | 185 |
| A | Listen | 186 |
| A.1 | Liste der Theoreme | 186 |
| A.2 | Liste der benannten Sätze | 187 |
| Akronyme | | 187 |

Teil A

1. Semester

Kapitel I

Grundlagen der Mathematik

1. Grundbegriffe aus Logik und Mengenlehre

Mengenlehre: Universalität von Aussagen, Verwendung von Mengen

Logik: Regeln des Folgerns, wahre und falsche Aussagen

→ hier werden einige Aspekte etwas vereinfacht, aber ausreichend genug behandelt

Definition (Aussage)

Aussage ist ein Schverhalt, dem man entweder den Warheitswert wahr (w) oder falsch (f) zuordnen kann (und nichts anderes).

■ Beispiel 1.1

- 5 ist eine Quadratzahl (Aussage) → falsch
- Die Elbe fließt durch Dresden (Aussage) → wahr
- Mathematik ist rot (keine Aussage)

Definition (Menge)

Menge ist (nach Cantor 1877) eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten der Anschauung oder des Denkens, welche die Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen.

■ Beispiel 1.2

- $M_1 =$ Menge aller Städte in Deutschland
- $M_2 = \{1, 2, 3\}$

Definition

- $M = N$, falls dieselben Elemente enthalten sind
- $N \subset M$ (Teilmenge), falls $n \in M$ für jedes $n \in N$
- $N \subsetneq M$ (echte Teilmenge), falls zusätzlich $N \neq M$.
- Aussageform : Sachverhalt mit Variablen, der durch geeignete Ersetzung der Variablen zur Aussage führt

■ Beispiel 1.3

- $A(X) =$ Die Elbe fließt durch X
- $B(X, Y, Z) = X + Y = Z$
- → $A(\text{Dresden})$ und $B(2, 3, 4)$ sind Aussagen
- → $A(\text{Mathematik})$ ist keine Aussage

- $\rightarrow A(X)$ ist Aussage für jedes $X \in M_1$

| A | B | $\neg A$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \iff B$ |
|-----|-----|----------|--------------|------------|-------------------|------------|
| W | W | F | W | W | W | W |
| W | F | F | F | W | F | F |
| F | W | W | F | W | W | F |
| F | F | W | F | F | W | W |

■ Beispiel 1.4

- $\neg(3 \text{ ist gerade})$ - wahr
- $(4 \text{ ist gerade}) \wedge (4 \text{ ist Primzahl})$ - falsch
- $(3 \text{ ist gerade}) \vee (3 \text{ ist Primzahl})$ - wahr
- $(\text{Sonne ist heiß}) \Rightarrow (\text{Es gibt Primzahlen})$ - w
- $(3 \text{ ist gerade}) \iff (\pi \in \mathbb{N})$ - w
- Ausschließendes oder wird realisiert durch $\neg(A \iff B)$

Definition (Quantoren)

Neue Aussagen können mittels Quantoren gebildet werden:

- $\forall x \in M : A(x)$ wahr **genau dann wenn (gdw.)** $A(x)$ wahr für jedes $x \in M$
- $\exists x \in M : A(x)$ wahr **gdw.** $A(x)$ wahr für mindestens ein $x \in M$

■ Beispiel 1.5

- $\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}$ - f
- $\exists n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}$ - w

Definition (Tautologie, Kontraduktion)

Tautologie bzw. Kontraduktion / Widerspruch (\cdot) ist zusätzlich gesetzte Aussage, die unabhängig vom Wahrheitswert der Teilaussagen stets wahr bzw. falsch ist.

■ Beispiel 1.6

- Tautologien: $A \vee \neg A$, $\neg(A \wedge \neg A)$, $(A \wedge B) \Rightarrow A$
- Widerspruch: $A \wedge \neg A$, $A \iff \neg A$
- besondere Tautologie: $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Satz 1.7 (de Morgan'sche Regeln)

Folgende Aussagen sind stets Tautologien

- a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- c) $\neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$
- d) $\neg(\exists x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$

Beweis. Übung

□

Definition

- leere Menge \emptyset =: Menge, die kein Element enthält
- M, N sind disjunkt, falls $M \cap N = \emptyset$
- Sei \mathcal{M} Mengensystem, d.h. Mengen von Mengen, dann
 - $\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M := \{x \mid \exists M \in \mathcal{M} : x \in M\}$
 - $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M := \{x \mid \forall M \in \mathcal{M} : x \in M\}$
- Potenzmenge: $\mathcal{P}(M) := \{\tilde{M} \mid \tilde{M} \subseteq M\}$
- DE MORGAN'sche Regeln (für $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(M)$)
 - $(\bigcup_{N \in \mathcal{N}} N)^C = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N^C$
 - $(\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N)^C = \bigcup_{N \in \mathcal{N}} N^C$
- kartesisches Produkt $M \times N := \{(m, n) \mid m \in M \text{ und } n \in N\}$
- (m_1, \dots, m_n) ist n-Tupel
- Auswahlaxiom (AC / axiom of choice)
 Sei \mathcal{M} Menge nichtleerer, paarweise disjunkter Mengen M
 \Rightarrow es gibt immer (Auswahl-) Menge \tilde{M} , die mit jedem $M \in \mathcal{M}$ genau ein Element gemein hat.

1.1. Aufbau einer mathematischen TheorieAxiome (als wahr angenommene Aussagen) \rightarrow Beweise \rightarrow Sätze ("neue" wahre Aussagen) \Rightarrow ergibt Ansammlung (Menge) wahrer Aussagen

Formulierung mathematischer Aussagen:

- typische Form eines mathematischen Satzes: $\underbrace{\text{Wenn } A \text{ gilt}}_{\text{Voraussetzung}}, \text{ dann folgt } \underbrace{B}_{\text{Behauptung}}$
- formal: $A \Rightarrow B$

■ Beispiel 1.8

- $n \in \mathbb{N}$ ist durch 4 teilbar $\Rightarrow n$ ist durch 2 teilbar
- genauer meint man sogar $A \wedge C \Rightarrow B$, wobei C aus allen bekannten wahren Aussagen besteht
- B ist notwendig für A
- A ist hinreichend für B

Anmerkung

Aus dem Wikipedia-Artikel zu notwendiger und hinreichender Bedingung:

- notwendige Bedingung: Wenn B wahr ist, dann muss auch A wahr sein. Es kann nicht sein, dass B wahr ist, ohne dass A wahr ist.
- Beispiel: Für jede Primzahl > 2 gilt: Sie ist ungerade. Also: ist die Eigenschaft "Primzahl" notwendig für die Eigenschaft "ist ungerade", denn es gibt keine Primzahl, die gerade ist.
- hinreichende Bedingung: Eine hinreichende Bedingung sorgt für das Eintreten des Ereignisses. Wenn die Bedingung nicht notwendig, sondern nur hinreichend ist, dann gibt es andere hinreichende Bedingungen, die zum Eintreten des Ereignisses führen.
- Beispiel: Cola trinken ist nicht notwendig zum überleben, da man auch Wasser trinken kann.

Definition (direkter Beweis, indirekter Beweis)

- direkt er Beweis: $(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \dots \wedge (A_n \Rightarrow B)$ wahr für $A \Rightarrow B$
- indirekt er Beweis durch Tautologie $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

1.2. Relation und Funktion

Definition (Relation)

- Relation ist Teilmenge $R \subset M \times N$. $(x, y) \in R$ heißt: x und y stehen in Relation zueinander.
- Relation $R \subset M \times N$ heißt Ordnungsrelation (kurz Ordnung) auf M , falls $\forall a, b, c \in M$:
 - a) $(a, a) \in R$ (reflexiv)
 - b) $(a, b), (b, a) \in R \rightarrow a = b$ (antisymmetrisch)
 - c) $(a, b), (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$ (transitiv)
- Ordnungsrelation R auf M heißt Totalordnung, falls $\forall a, b \in M : (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$
- Relation auf M heißt Äquivalenzrelation, falls $\forall a, b, c \in M$:
 - a) $(a, a) \in R$ (reflexiv)
 - b) $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$ (symmetrisch)
 - c) $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ (transitiv)
- $[a] := \{b \in M \mid (a, b) \in R\}$ heißt Äquivalenzklasse von $a \in M$ bzgl. R
 Jedes $b \in [a]$ ist ein Repräsentant von $[a]$

■ Beispiel 1.9

$B = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ Menge der Brüche

man hat Äquivalenzrelation auf B mit $R = \left\{ \left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \right) \in B \times B \mid mq = np \right\}$

beachte: Menge der Äquivalenzklassen $\left\{ \left[\frac{m}{n} \right] \mid \frac{m}{n} \in B \right\}$ ist die Menge der rationalen Zahlen

Anmerkung

- Mit einer Ordnungsrelation kann man eigentlich unordenbare Dinge wie Funktionen (gilt $x^2 < x^3$ oder $x^2 > x^3$?) ordnen.
- Eine Äquivalenzrelation ist eine Art Gleichheitszeichen, nur eben für mathematische Objekte, die keine Zahlen sind.
- zu Beispiel 1.9: Zwei Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ sind gleich, wenn $mq = np$, d.h. diese zwei Brüche gehören zu einer Äquivalenzklasse. So gehören die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{6}$ zu einer Äquivalenzklasse, nämlich zu $\left[\frac{2}{3} \right]$, da $2 \cdot 6 = 12 = 3 \cdot 4$. Alle Äquivalenzklassen, also alle nicht mehr kürzbaren Brüche ergeben dann die rationalen Zahlen \mathbb{Q} .

Definition (Abbildung)

Abbildung / Funktion von M nach N , kurz: $F : M \rightarrow N$ ist Vorschrift, die jedem Argument / Urbild $m \in M$ genau einen Wert / Bild $F(m) \in N$ zuordnet.

- $\mathcal{D}(F) := M$ heißt Definitionsbereich / Urbildmenge
- N heißt Zielbereich
- $F(M') := \{n \in N \mid n = F(m) \text{ für ein } m \in M'\}$ ist Bild von $M' \subset M$
- $F^{-1}(N') := \{m \in M \mid n = F(m) \text{ für ein } N'\}$ ist Urbild von $N' \subset N$
- $\mathcal{R}(F) := F(M)$ heißt Wertebereich / Bildmenge
- $\text{graph}(F) := \{(m, n) \in M \times N \mid n = F(m)\}$ heißt Graph von F
- $F|_{M'}$ ist Einschränkung der Funktion von F auf $M' \subset M$
- Zwei Funktionen F und G sind gleich, wenn
 - $\mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(G)$
 - $F(m) = G(m) \quad \forall m \in \mathcal{D}(F)$
- Komposition von $F : M \rightarrow N$ und $G : N \rightarrow P$ ist Abbildung $G \circ F : M \rightarrow P$ mit $(G \circ F)(m) := G(F(m))$
- Abbildung $F : M \rightarrow N$ heißt
 - injektiv, falls eineindeutig (d.h. $F(m_1) = F(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$)
 - surjektiv, falls $F(M) = N$, d.h. $\forall n \in N \exists m \in M : F(m) = n$
 - bijektiv, falls injektiv und surjektiv
- Für bijektive Abb. $F : M \rightarrow N$ ist Umkehrabbildung / inverse Abbildung $F^{-1} : N \rightarrow M$ definiert durch $F^{-1}(n) = m \Leftrightarrow F(m) = n$

■ Beispiel 1.10

betrachte $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f(x) = \sin(x)$

Zielmenge: \mathbb{R} , aber Wertebereich $[-1, 1]$!

Satz 1.12

Sei $F : M \rightarrow N$ surjektiv. Dann existiert Abbildung $G : N \rightarrow M$, sodass $F \circ G = \text{id}_N$ (d.h. $F(G(n)) = n \forall n \in N$)

Beweis. Definiere Menge $\Gamma_n = \{m \in M \mid F(m) = n\} \neq \emptyset$. Nach Auswahlaxiom existiert Abbildung $G : N \rightarrow M$ mit $G(n) \in \Gamma_n$; $\forall n \in N \Rightarrow F(G(n)) = n$; $\forall n \in N \Rightarrow$ Behauptung. \square

Definition (Verknüpfung)

Eine Rechenoperation / Verknüpfung auf M ist Abb. $*$: $M \times M \rightarrow M$, d.h. $m, n \in M$ wird Ergebnis $m * n \in M$

Rechenoperation

- hat neutrales Element $e \in M$, falls $m * e = e * m = m \forall m \in M$
- ist kommutativ, falls $m * n = n * m$
- ist assoziativ, falls $k * (m * n) = (k * m) * n \forall k, m, n \in M$
- hat inverses Element $m' \in M$ zu $m \in M$, falls $m * m' = m' * m = e$

■ Beispiel 1.13

- Addition : $(m, n) \mapsto m + n$ Summe,
 - neutrales Element heißt Null / Nullelement
 - Inverses Element: $-m$
- Multiplikation \cdot : $(m, n) \mapsto m \cdot n$ Produkt
 - neutrales Element heißt Eins / Einselement
 - Inverses Element: m^{-1}

Definition (distributiv)

Addition und Multiplikation heißen distributiv, falls $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n \forall k, m, n \in M$

Definition (Körper)

Menge K heißt Körper, falls auf K eine Addition und Multiplikation existiert mit

- es existieren neutrale Elemente $0 \in K$ und $1 \in K_{\neq 0}$
- Addition und Multiplikation sind distributiv
- Es gibt Inverse

Definition

Menge M habe Ordnung „ \leq “, sowie Addition und Multiplikation. Ordnung ist verträglich mit Addition und Multiplikation, wenn $\forall a, b, c \in M$

- $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$
- $a \leq b \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ mit $c > 0$

Definition (angeordnet)

Körper K heißt angeordnet, falls mit Addition und Multiplikation verträgliche Totalordnung existiert.

Definition (Isomorphismus)

Isomorphismus bezüglich einer Struktur ist bijektive Abbildung $I : M_1 \rightarrow M_2$, die auf M_1 und M_2 vorhandene Struktur erhält, z.B.

- Ordnung: $a \leq b \iff I(a) \leq I(b)$
- Rechenoperationen: $I(a * b) = I(a) * I(b)$

Mengen M_1 und M_2 heißen isomorph.

Anmerkung

Mit einem Isomorphismus kann man die Elemente einer Menge, z.B. ganze Zahlen, den Elementen einer anderen Menge, z.B. den natürlichen Zahlen, zuordnen. Konkret würde das dann so aussehen: $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, -1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, -2 \mapsto 4, \dots$

Insbesondere wenn es darum geht, ob die ganzen Zahlen abzählbar sind, also ob ich diese mit den natürlichen Zahlen neu durchnummerieren kann, ist ein solcher Isomorphismus (denn dieses „neunummerieren“ ist ein Isomorphismus) notwendig. Alle Aussagen, die die Struktur betreffen, z.B. die Kommutativität, bleiben erhalten und müssen nicht neu bewiesen werden.

■ Beispiel 1.14

$M_1 = \mathbb{N}, M_2 = \{\text{gerade Zahlen}\}$ jeweils mit Addition, Multiplikation, Ordnung

$\Rightarrow I : M_1 \rightarrow M_2$ mit $I(n) = 2n$ ist ein Isomorphismus, denn alle geraden Zahlen werden einfach nur neu durchgezählt

\Rightarrow Isomorphismus erhält Addition, Ordnung und die 0, aber nicht die Multiplikation, da $I(a) * I(b) = 2a * 2b = 4ab$ aber $I(a * b) = 2(a * b) = 2ab$, also $I(a) * I(b) \neq I(a * b)$

2. Bemerkungen zum Fundament der Mathematik

Forderungen an eine mathematische Theorie

- widerspruchsfrei: Satz und seine Negation sind nicht gleichzeitig herleitbar
- vollständig: alle Aussagen innerhalb einer Theorie sind als wahr oder falsch beweisbar

2 Unvollständigkeitssätze

- jedes System ist nicht gleichzeitig widerspruchsfrei und vollständig
- in einem System kann man nicht die eigenen Widerspruchsfreiheit zeigen

Kapitel II

Zahlenbereiche

5. Natürliche Zahlen

Definition (Peano Axiome)

\mathbb{N} sei Menge, die die PEANO-Axiome erfüllen, d.h.

P1) \mathbb{N} sei induktiv, d.h. es ex.

- Nullelement $0 \in \mathbb{N}$ und
- injektive (Nachfolger-) Abb. $\nu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\nu(n) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

P2) (Induktionsaxiom)

Falls $N \subset \mathbb{N}$ induktiv in \mathbb{N} (d.h. $0, \nu(n) \in N$ falls $n \in N$)

$\Rightarrow N = \mathbb{N}$ (N ist die kleinste induktive Menge)

Nach Mengenlehre ZF existiert eine Solche Menge der natürliche Zahlen mit üblichen Symbolen.

Theorem 5.1

Falls \mathbb{N} und \mathbb{N}^* PEANO-Axiome erfüllen, dann sind sie isomorph bezüglich Nachfolger-Abbildung und Nullelement (Anfangselement).

Satz 5.2 (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ Aussagenmenge mit d. Eigenschaften

(IA) A_0 ist wahr (Induktionsanfang)

(IS) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: A_n (wahr) $\Rightarrow A_{n+1}$

$\Rightarrow A_n$ ist wahr $\forall n \in \mathbb{N}$

Beweis. Sei $N := \{n \in \mathbb{N} \mid A_n \text{ ist wahr}\} \subset \mathbb{N}$, offenbar $0 \in N$ und $\nu(n) \in N$, falls $n \in N \Rightarrow N$ induktiv in $\mathbb{N} \stackrel{P2)}{\Rightarrow} N = \mathbb{N}$ □

Lemma 5.3

Es gilt:

a) $\nu(\mathbb{N}) \cup \{0\} = \mathbb{N}$

b) $\nu(n) \neq n \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis. a) $N := \{n \in \mathbb{N} \mid n = \nu(m) \text{ für } m \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ist induktiv in $\mathbb{N} \stackrel{P2)}{\Rightarrow} N = \mathbb{N}$

b) Beweis mittels vollständiger Induktion

(IA) $\nu(0) \neq 0$ nach P1)

(IS) Zeige: $(\nu(n) \stackrel{\text{IV)}}{\neq} n \Rightarrow \nu(\nu(n)) \neq \nu(n) \forall n \in \mathbb{N}$ indirekter Beweis:

Angenommen $\nu(\nu(n)) = \nu(n) \stackrel{\nu \text{ inj.}}{\Rightarrow} \nu(n) = n \stackrel{\text{IV)}}{\Rightarrow} \dots \Rightarrow (1) \Rightarrow b)$ nach Prinzip der vollst. Induktion (vgl.Satz 5.2) □

Satz 5.4 (Rekursive Definition / Rekursion)

Sei $b \in B$ Menge, $b \in B$ u. $F : B \times \mathbb{N} \rightarrow B$ Abbildung. Dann liefert die Vorschrift

$$f(0) := b, \tag{1}$$

$$f(n + 1) := F(f(n), n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

genau eine Abbildung für $f : \mathbb{N} \rightarrow B$ (d.h. solche Abbildung ist eindeutig)

Beweis. mittels vollständiger Induktion:

IA $f(0) = b$ eindeutig definiert

IS angenommen $f(n)$ eindeutig definiert $\stackrel{1)}{\Rightarrow} f(n + 1) \stackrel{\text{Satz 5.2}}{\Rightarrow}$ Behauptung gilt nach Prinzip der vollständigen Induktion □

Beweis (Theorem 5.1). \mathbb{N} und \mathbb{N}^* mögen PEANO-Axiome erfüllen mit $(\nu, 0)$ bzw. $(\nu^*, 0^*)$. Betrachte rekursive eindeutige definierte Abbildung: $I : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ (Satz 5.4 $B = \mathbb{N}^*$, $F(n^*, n) = \nu^*(n^*)$) $I(0) = 0^*$, $I(\nu(n)) = \nu^*(I(n)) \forall n \in \mathbb{N}$ I enthält Nullelement und Nachfolgerabbildung. Falls I bijektiv, dann ist I ein Isomorphismus und Behauptung folgt.

Zeige I surjektiv: offenbar $0^* \in I(\mathbb{N})$, falls $n^* \in I(\mathbb{N}) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n^* = I(n) \Rightarrow \nu^*(n^*) = \nu^*(I(n)) = I(\nu(n)) \in I(\mathbb{N})$ (Bild). Folglich ist $I(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}^*$ induktiv in $\mathbb{N}^* \stackrel{\text{P2)}}{\Rightarrow} I(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$.

Zeige I injektiv: $I(n) \neq I(m) \forall n \neq m$ (*) vollständige Induktion nach m (jeweils $\forall n \neq m$)

IA) $m = 0 : \forall n \neq 0 \exists n \in \mathbb{N} : n = \nu(n')$ (vgl. Lemma 5.3) $\Rightarrow I(n) = I(\nu(n')) = \nu^*(I(n')) \stackrel{\text{P1)}}{\neq} 0^* = I(0) \forall n \neq 0$ (ist gerade (**))

IS) IV: Sei $I(n) \neq I(m) \forall n \neq m$, dann für $n = 0$, $n = \nu(m)$ mit $I(0) = 0^* \neq \nu^*(I(m)) = I(\nu(m))$.

für $n \neq 0$, $n \stackrel{\text{Lemma 5.3}}{=} \nu(n') \neq \nu(m) \stackrel{\nu \text{ inj.}}{\Rightarrow} n' \stackrel{\text{IV)}}{\neq} m$ und $I(n) = I(\nu(n')) = \nu^*(I(n')) \neq \nu^*(I(m)) = I(\nu(m))$

\Rightarrow in der Behauptung $I(n) \neq I(\nu(m)) \forall n \neq \nu(m) \Rightarrow (*)$ mittels vollständiger Induktion,

d.h. I ist injektiv □

5.1. Rechenoperationen

Definition (Rechenoperation auf \mathbb{N})

Definiere Addition $+$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ auf \mathbb{N} durch $n + 0 := n, n + \nu(m) := \nu(n + m) \forall n, m \in \mathbb{N}$

Definiere Multiplikation \cdot : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ auf \mathbb{N} durch $n \cdot 0 = 0, n \cdot \nu(m) = n \cdot m + n \forall m, n \in \mathbb{N}$

Satz 5.5

Addition und Multiplikation haben folgende Eigenschaften, d.h. $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

| | Addition | Multiplikation |
|--------------------------------|------------------------------------|---|
| a) \exists neutrales Element | $n + 0 = n$ | $n \cdot 1 = n$ |
| b) kommutativ | $m + n = n + m$ | $m \cdot n = n \cdot m$ |
| c) assoziativ | $(k + m) + n = k + (m + n)$ | $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$ |
| d) distributiv | $k(m + n) = k \cdot m + k \cdot n$ | |

Beweis. a) $n + 0 = n$ klar, $n \cdot 1 = n \nu(0) = n \cdot 0 + n = 0 + n \stackrel{\text{Add. kommutativ}}{=} n$

b) ÜA

c) assoziativ für Addition (vollst. Induktion nach n)

IA) $n = 0: k + (m + 0) = k + m = (k + m) + 0 \forall k, m \in \mathbb{N}$

IV) Sei $k + (m + n) = (k + m) + n \forall k, m \in \mathbb{N}$

IS) IV) $\Rightarrow k + (m + \nu(n)) = k + \nu(m + n) = \nu(k + (m + n)) \stackrel{\text{IV)}}{=} \nu((k + m) + n) = (k + m) + \nu(n) \forall k, m \in \mathbb{N} \Rightarrow$

Induktionbehauptung $\stackrel{\text{voll. Ind.}}{\Rightarrow}$ Addition assoziativ: Beweis für Multiplikation analog

d) distributiv (vollst. Ind. nach k)

IA) $k = 0: 0 \cdot (m + n) = km + kn \forall m, n \in \mathbb{N}$

IS) Sei $k(m + n) = km + kn \forall m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \nu(k) \cdot (m + n) \stackrel{\text{Def. M.}}{=} k \cdot (m + n) + (m + n) \stackrel{\text{IV)}}{=} k \cdot m + k \cdot n + m + n \stackrel{\text{Def. M.}}{=} \nu(k) \cdot m + \nu(k) \cdot n \forall m, n \in \mathbb{N} \stackrel{\text{voll. Ind.}}{\Rightarrow}$ Behauptung □

Folgerung 5.6

Es gilt $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$:

a) $m \neq 0 \Rightarrow m + n \neq 0$

b) $m \cdot n = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee n = 0$

c) $m + k = n + k \Leftrightarrow m = n$ (Kürzungsregel(KR) Addition)

d) $k \neq 0: m \cdot k = n \cdot k \Leftrightarrow m = n$ (KR Multiplikation)

Beweis. a) $m \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: m = \nu(m') \Rightarrow n + m = n + \nu(m') \stackrel{\text{Def. Add.}}{=} \nu(n + m') \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

b) " \Leftarrow ": folgt nach Def M.

" \Rightarrow ": SeSt

c) " \Leftarrow ": Wegen Eindeutigkeit der Addition

" \Rightarrow ": vollst. Induktion nach k

IA) $n = 0$ klar

IS) Behauptung gelte für k , sei nun $m + (k + 1) = n + (k + 1) \Rightarrow \nu(n + k) \stackrel{\nu \text{ inj.}}{\Rightarrow} m + k = n + k \stackrel{\text{IV)}}{\Rightarrow} m = n \Rightarrow$

d) ÜA/SeSt (kann erst nach Satz 5.7 bewiesen werden!) □

5.2. Ordnung auf \mathbb{N}

Definition (Ordnung auf \mathbb{N})

Betr. Relation $R := \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n\}$

Satz 5.7

Es gilt auf \mathbb{N} :

- 1) $m \leq n \Rightarrow \exists! k \in \mathbb{N} : n = m + k$, nenne $n - m =: k$ Differenz
- 2) Relation R (bzw. „ \leq “) ist Totalordnung auf \mathbb{N}
- 3) Ordnung „ \leq “ ist verträglich mit Addition und Multiplikation

Beweis. 1) Sei $n = m + k = m + k' \stackrel{\text{KR}}{\Rightarrow} k = k'$

2) $n = n + 0 \Rightarrow n \leq n \Rightarrow$ reflexiv

Sei $k \leq m, m \leq n \Rightarrow \exists l, j : m = k + l, n = m + j = (k + l) + j = k + (l + j) \Rightarrow k \leq n \Rightarrow$ transitiv

Sei $m \leq n, n \leq m \stackrel{\text{transitiv } k=n}{\Rightarrow} n = m + j = n + l + j \stackrel{\text{KR}}{\Rightarrow} 0 = l + j \stackrel{\text{Folgerung 5.6}}{\Rightarrow} j = 0 \Rightarrow n = m \Rightarrow$
antisymmetrisch

$\Rightarrow R$ ist eine Ordnung auf \mathbb{N}

Zeige R Totalordnung, d.h. $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \leq n$ oder $n \leq m$ (Folgerung 5.6)

vollst. Induktion nach m :

IA) $m = 0$: wegen $n = 0 + n$ folgt $0 \leq n \forall n$

IS) gelte Folgerung 5.6 für festes m und $\forall n \in \mathbb{N}$, dann

falls $n \leq m \stackrel{m \leq m+1 \text{ transitiv}}{\Rightarrow} n \leq m + 1$

falls $m \leq n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = m + (k + 1) = (m + 1) + k \Rightarrow m + 1 \leq n \Rightarrow$ Folgerung 5.6 gilt für $m + 1$
und $\forall n \in \mathbb{N} \stackrel{\text{voll. Ind.}}{\Rightarrow}$ Folgerung 5.6

3) Sei $m \leq n \Rightarrow \exists j : n = m + j \stackrel{\text{KR}}{\Rightarrow} n + k = m + j + k \Rightarrow m + k \leq n + k$ und Rest analog □

6. Ganze und rationale Zahlen

6.1. Ganze Zahlen

Frage: Existiert eine natürliche Zahl x mit $n = n' + x$ für ein gegebenes n und n' ?

Antwort: Das geht nur falls $n \geq n'$, dann ist $x = n - n'$.

Ziel: Zahlbereichserweiterung, sodass die Gleichung immer lösbar ist. Ordne jedem Paar $(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine neue Zahl x als Lösung zu. Gewisse Paare liefern die gleiche Lösung, z.B. $(6, 4)$, $(5, 3)$ und $(7, 5)$. Diese müssen mittels Relation identifiziert werden.

Definition (Äquivalenzrelation auf \mathbb{Z})

Definiere Äquivalenzrelation $Q := \{((n_1, n'_1), (n_2, n'_2)) \in ((\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})) \mid n_1 + n'_2 = n'_1 + n_2\}$

■ Beispiel 6.1

- $(5, 3) \sim (6, 4) \sim (7, 5)$ bzw. $5 - 3 \sim 6 - 4 \sim 7 - 5$
- $(3, 6) \sim (5, 8)$ bzw. $3 - 6 \sim 5 - 8$

Satz 6.2

Q ist Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Beweis. • offenbar $(n, n') \in Q$ und $(n', n) \in Q \Rightarrow$ reflexiv

- falls $((n_1, n'_1), (n_2, n'_2)) \in Q \Rightarrow ((n_2, n'_2), (n_1, n'_1)) \in Q \Rightarrow$ symmetrisch
- sei $((n_1, n'_1), (n_2, n'_2)) \in Q$ und $((n_2, n'_2), (n_3, n'_3)) \in Q \Rightarrow n_1 + n'_2 = n'_1 + n_2$ und $n_2 + n'_3 = n'_2 + n_3 \Rightarrow n_1 + n'_3 = n'_1 + n_3 \Rightarrow ((n_1, n'_1), (n_3, n'_3)) \in Q \Rightarrow$ transitiv \square

Setze $\overline{\mathbb{Z}} = \{[(n, n')] \mid n, n' \in \mathbb{N}\}$ Menge der ganzen Zahlen

Kurzschreibweise: $\overline{m} = [(m, m')]$

Satz 6.3

Sei $[(n, n')] \in \overline{\mathbb{Z}}$. Dann ex. eindeutige $n^* \in \mathbb{N} : (n^*, 0) \in [(n, n')]$ falls $n \geq n'$ bzw. $(0, n^*) \in [(n, n')]$ falls $n \leq n'$.

Beweis. • $n \geq n' \Rightarrow$ es existiert genau ein $n^* \in \mathbb{N} : n = n' + n^* \Rightarrow (n^*, 0) \sim (n, n')$

- $n < n' \Rightarrow$ es existiert genau ein $n^* \in \mathbb{N} : n + n^* = n' \Rightarrow (0, n^*) \sim (n, n')$ \square

Frage: Was hat $\overline{\mathbb{Z}}$ mit \mathbb{Z} zu tun?

Antwort: Identifiziere $(n, 0)$ bzw. $(n - 0)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $(0, n)$ bzw. $(0 - n)$ mit Symbol $-n$.

\Rightarrow ganze Zahlen kann man eindeutig den Elementen folgender Mengen zuordnen: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{(-n) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

6.2. Rechenoperationen auf $\overline{\mathbb{Z}}$

Definition (Addition, Multiplikation)

Addition : $\overline{m} + \overline{n} = [(m, n')] + [(n, n')] := [(m + n, m' + n')]$

Multiplikation : $\overline{m} \cdot \overline{n} = \overline{mn} = [(m, m')] \cdot [(n, n')] := [(mn + m'n', mn' + m'n)]$

Satz 6.4

Addition und Multiplikation sind eindeutig definiert, d.h. unabhängig vom Repräsentanten bzgl. Q .

Beweis. Sei $(m_1, m'_1) \sim (m_2, m'_2)$ und $(n_1, n'_1) \sim (n_2, n'_2) \Rightarrow m_1 + m'_2 = m'_1 + m_2$ und $n_1 + n'_2 = n'_1 + n_2 \Rightarrow m_1 + n_1 + m'_2 + n'_2 = m'_1 + n'_1 + m_2 + n_2 \Rightarrow (m_1, m'_1) + (n_1, n'_1) \sim (m_2, m'_2) + (n_2, n'_2)$ \square

Satz 6.5

Für Addition und Multiplikation auf Z gilt $\forall \bar{m}, \bar{n} \in \bar{Z}$:

- 1) Es ex. neutrales Element $0 := [(0, 0)]$ (Add.), $1 := [(1, 0)]$ (Mult., $= [(k, k)]$)
- 2) Jeweils kommutativ, assoziativ und gemeinsam distributiv
- 3) $-\bar{n} := [(n', n)] \in \bar{Z}$ ist Inverses bzgl. Addition von $[(n, n')] = \bar{n}$
- 4) $(-1) \cdot \bar{n} = -\bar{n}$
- 5) $\bar{m} \cdot \bar{n} = 0 \Leftrightarrow \bar{m} = 0 \vee \bar{n} = 0$

Beweis. 1) offenbar $\bar{n} + 0 = 0 + \bar{n} = \bar{n}$ und $\bar{n} \cdot 1 = 1 \cdot \bar{n} = \bar{n}$

2) SeSt

3) offenbar $\bar{n} + (-\bar{n}) = (-\bar{n}) + \bar{n} = 0$

4) $-1 \cdot \bar{n} = [(0, 1)] \cdot [(n, n')] = [(n', n)] = -\bar{n}$

5) ÜA \square

Satz 6.6

Für $\bar{m}, \bar{n} \in \bar{Z}$ hat Gleichung $\bar{m} = \bar{n} + \bar{x}$ eindeutige Lösung $\bar{x} = \bar{m} + (-\bar{n}) = [(m + n'), (m' + n)]$.

Beweis. $\bar{m} = \bar{n} + \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = (-\bar{n}) + \bar{n} + \bar{x} = -\bar{n} + \bar{m}$ \square

6.3. Ordnung auf \bar{Z} **Definition (Ordnungsrelation auf \bar{Z})**

Betr. Relation $R := \{(\bar{m}, \bar{n}) \in \bar{Z} \times \bar{Z} \mid \bar{m} \leq \bar{n}\}$, wobei $\bar{m} = [(m, m')] \leq [(n, n')] \text{ gdw. } (m+n' \leq m'+n)$

Satz 6.7

R ist Totalordnung auf \bar{Z} , die verträglich ist mit Addition und Multiplikation.

Beweis. SeSt und analog \square

Ordnung verträglich mit Addition: $\bar{n} < 0 \Leftrightarrow 0 = \bar{n} + (-\bar{n}) < -\bar{n} = -1 \cdot \bar{n}$

Satz 6.8

Betr. $Z = Z \cup \{(-k) \mid k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ mit üblicher Addition, Multiplikation und Ordnung „ \geq “. Z, \bar{Z} sind isomorph bzgl. Addition, Multiplikation, Ordnung.

Beweis. betrachte Abbildung $I : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}$ mit $I(k) = [(k, 0)]$ und $I(-k) = [(0, k)]$

\Rightarrow Übungsaufgabe □

Notation: verwende stets \mathbb{Z} , schreibe m, n, \dots statt $\overline{m}, \overline{n}, \dots$

6.4. Rationale Zahlen

Frage: Existiert eine ganze Zahl mit $n = n' \cdot x$ für $n, n' \in \mathbb{Z}$, $n' \neq 0$?

Antwort: Im Allgemeinen nicht.

Ziel: Zahlbereichserweiterung analog zu $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

ordne jedem Paar $(n, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine neue Zahl x zu, schreibe (n, n') auch als $\frac{n}{n'}$ oder $n : n'$, identifiziere Paare wie z.B. $\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}$ durch Relation

Definition (Äquivalenzrelation auf \mathbb{Q})

Betr. Relation $Q := \left\{ \left(\frac{n_1}{n'_1}, \frac{n_2}{n'_2} \right) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}) \mid n_1 n'_2 = n'_1 n_2 \right\}$

Setze $\mathbb{Q} := \left\{ \left[\frac{n}{n'} \right] \mid (n, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0} \right\}$ Menge der rationale Zahlen.

Offenbar gilt Kürzungsregel $\left[\frac{n}{n'} \right] = \left[\frac{k \cdot n}{k \cdot n'} \right] \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$.

6.5. Rechenoperationen auf \mathbb{Q}

Definition

Addition : $\left[\frac{m}{m'} \right] + \left[\frac{n}{n'} \right] := \left[\frac{mn' + m'n}{m'n'} \right]$

Multiplikation : $\left[\frac{m}{m'} \right] \cdot \left[\frac{n}{n'} \right] := \left[\frac{m \cdot n}{m' \cdot n'} \right]$

Addition und Multiplikation sind unabhängig vom Repräsentanten bzgl. $Q \Rightarrow$ Operationen auf Q eindeutig definiert.

Satz 6.9

Mit Addition und Multiplikation ist \mathbb{Q} Körper mit

- neutralem Element $0 := \left[\frac{0_{\mathbb{Z}}}{1_{\mathbb{Z}}} \right] = \left[\frac{0_{\mathbb{Z}}}{n} \right], 1 := \left[\frac{1_{\mathbb{Z}}}{1_{\mathbb{Z}}} \right] = \left[\frac{n}{n} \right] \neq 0 \quad n \neq 0$
- Inverse Elemente $-\left[\frac{n}{n'} \right] = \left[\frac{-n}{n'} \right], \left[\frac{n}{n'} \right]^{-1} = \left[\frac{n'}{n} \right]$

Beweis. SeSt, ÜA □

6.6. Ordnung auf \mathbb{Q}

Definition

Relation $R := \left\{ \left(\left[\frac{m}{m'} \right], \left[\frac{n}{n'} \right] \right) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid mn' \leq m'n'; m', n' > 0 \right\}$ gibt Ordnung „ \leq “.

Satz 6.10

\mathbb{Q} ist angeordneter Körper („ \leq “) ist Totalordnung verträglich mit Addition und Multiplikation).

Beweis. SeSt, ÜA □

Notation: schreibe vereinfacht nur noch $\frac{n}{n'}$ für die Zahl $\left[\frac{n}{n'} \right] \in \mathbb{Q}$ und verwende Symbole p, q, \dots für Elemente aus \mathbb{Q} .

Gleichung $p \cdot x = q$ hat stets eine eindeutige Lösung: $x = q \cdot p^{-1}$.

Frage: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (nach Definition) $\rightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$?

Antwort: Sei $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}} = \left\{ \frac{n}{1} \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$, $I : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}}$ mit $I(n) = \frac{n}{1}$

$\Rightarrow I$ ist Isomorphismus bezüglich Addition, Multiplikation, Ordnung; in diesem Sinne: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Folgerung 6.11

Körper \mathbb{Q} ist archimedisch angeordnet, d.h. $\forall q \in \mathbb{Q} \exists n \in \mathbb{N} : q < n$.

Beweis. Sei $q = \left[\frac{k}{k'} \right]$ mit $k' > 0$

- $n = 0$ falls $k < 0 \Rightarrow q = \left[\frac{k}{k'} \right] < \left[\frac{0}{k'} \right] = 0 = n$
- $n = k + 1$ falls $k \geq 0 \Rightarrow q = \left[\frac{k}{k'} \right] \leq \left[\frac{k+1}{k'} \right] \leq \left[\frac{k+1}{1} \right] = n$

□

7. Reelle Zahlen

Struktur von archimedisch angeordneten Körpern

Satz 7.2

Sei K Körper. Dann gilt $\forall a, b \in K$:

- 1) $0, 1, (-a), b^{-1} (b \neq 0)$ sind eindeutig bestimmt
- 2) $(-0) = 0, 1^{-1} = 1$
- 3) $-(-a) = a, (b^{-1})^{-1} = b (b \neq 0)$
- 4) $-(a + b) = (-a) + (-b), (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} (a, b \neq 0)$
- 5) $-a = (-1)a, (-a)(-b) = ab, a \cdot 0 = 0$
- 6) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$
- 7) $a + x = b$ hat eindeutige Lösung $x = b + (-a) =: b - a$ Differenz $ax = b (a \neq 0)$ hat eindeutige Lösung $x = a^{-1}b =: \frac{b}{a}$ Quotient

Definition

- Vielfache : $na := \sum_{k=1}^n a$

Damit:

- $(-n)a := n(-a), 0_{\mathbb{N}}a := a_K$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$
- $ma + na = (m + n)a, na + nb = n(a + b)$
- $(ma) \cdot (na) = (mn)a^2, (-n)a = -(na)$

- Potenz : a^n von $a \in K, n \in \mathbb{Z} := \prod_{k=1}^n a$

Damit

- $a^{-n} := (a^{-1})^n, a^{0_K} := 1_K$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, a \neq 0$
- $a^m a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, a^n b^n = (ab)^n, a^{-n} = (a^n)^{-1}$

- Fakultät für $n \in \mathbb{N} : n! := \prod_{k=1}^n k, 0! = 1$

- Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N} \forall k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$

- $\binom{k+1}{n+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$
- Rechenregel führt auf PASCAL'sches Dreieck

Satz 7.3 (Binomischer Satz)

In Körper K gilt: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, a, b \in K, n \in \mathbb{N}$

Beweis. ÜA

□

Satz 7.4

Sei K angeordneter Körper. Dann gilt $\forall a, b, c, d \in K$:

- a) $a < b \Leftrightarrow 0 < b - a$
- b) $a < b, c < d \Leftrightarrow a + c < b + d$
 $0 \leq a < b, 0 \leq c < d \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot d$
- c) $a < b \Leftrightarrow -b < -a$ (insbes. $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$)
 $a < b, c < 0 \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c$
- d) $a \neq 0 \Leftrightarrow a^2 > 0$ (insbes. $1 \neq 0$)
- e) $a > 0 \Leftrightarrow a^{-1} > 0$
- f) $0 < a < b \Leftrightarrow b^{-1} < a^{-1}$

Beweis. Betrachte Ordnung veträglich mit Addition und Multiplikation.

- a) $a < b \Leftrightarrow a + (-a) < b + (-a) \Leftrightarrow 0 \leq b - a$
- b) $a < b, c < d \Rightarrow a + c < b + d \stackrel{\text{transitiv}}{\Rightarrow} a + c < b + d$ Multi. analog
- c) $a < b \Leftrightarrow a - a - b < b - a - b \Leftrightarrow -b < -a$
 $a < b, -c > 0 \stackrel{\text{Ord. vetr.}}{\Leftrightarrow} \stackrel{\text{Multi}}{a \cdot (-1) < b \cdot (-1)} \Rightarrow (-1)ac < -1(bc) \Rightarrow -(ac) < -(bc) \stackrel{c)}{\Rightarrow} ac > bc$
- d) Sei $a > 0 \stackrel{2)}{\Rightarrow} a^2 > 0$. Sei $a > 0 \Rightarrow (-a) > 0 \stackrel{b)}{\Rightarrow} 0 < (-a)^2 \stackrel{\text{Satz 7.2}}{=} a^2$
- e) “ \Rightarrow ”: $(a^{-1})^2 > 0$ nach d) $\stackrel{\text{vertr. mit Multi}}{\Rightarrow} a \cdot (a^{-1})^2 = a^{-1} > 0$
 “ \Leftarrow ”: Analog zu “ \Rightarrow ” ersetze a^{-1} durch a
- 6) $ab > 0$ nach b) $\stackrel{5)}{\Rightarrow} 0 < (ab)^{-1} \stackrel{\text{Satz 7.2}}{=} a^{-1}b^{-1}$ wegen $a < b \Rightarrow b^{-1} = a^{-1}b^{-1}a \leq a^{-1}b^{-1}b = a^{-1}$ □

Definition

Absolutbetrag $|\cdot| : K \rightarrow K$ (auf angeordneten Körper K)

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Satz 7.5

Sei K angeordneter Körper. Dann gilt $\forall a, b \in K$:

- 1) $|a| \geq 0, |a| \geq a$
- 2) $|a| = 0$ gdw. $a = 0$
- 3) $|a| = |-a|$
- 4) $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$
- 5) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$
- 6) Dreiecksungleichung
 $|a + b| \leq |a| + |b|$ ($|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |b|$)
- 7) $|a| - |b| \leq |a + b|$
- 8) BERNOULLI-Ungleichung
 $(1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a \forall a \geq -1, n \in \mathbb{N} (a \neq -1 \text{ bei } n = 0)$
 (Gleichheit gdw. $n = 0, 1$ oder $a = 0$)

Definition

Betr. $f : \mathbb{Q} \rightarrow K$ mit $f\left(\frac{m}{n}\right) := \frac{m \cdot 1_K}{n \cdot 1_K} = (m1_k)(n1_K)^{-1} \forall m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$

Beweis. 1) klar

2) klar

3) Fallunterscheidung SeSt

4) Fallunterscheidung SeSt

$$5) a = \frac{a}{b} \cdot a \stackrel{4)}{\Rightarrow} |a| = \left|\frac{a}{b}\right| \cdot |a| \stackrel{\cdot |b|^{-1}}{\Rightarrow} \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

6) nach 1) $a \leq |a|, b \leq |b| \xrightarrow{\text{Satz 7.5}} a + b \leq |a| + |b|$ analog $-a - b \leq |a| + |b| \Rightarrow$ Behauptung

7) $|a| = |a + b - b| \stackrel{6)}{\leq} |a + b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a + b|$ analog $|b| - |a| \leq |a + b| \Rightarrow$ Behauptung

8) für $n = 0, 1, a = 0$ klar

Zeige: $(1 + a)^n > 1 + na \forall n \leq 2, a \neq 0$ durch voll. Induktion ÜA

□

Betrachte: $f : \mathbb{Q} \rightarrow K$ mit $f\left(\frac{m}{n}\right) := \frac{m \cdot 1_K}{n \cdot 1_K} = (m1_k)(n1_K)^{-1} \forall m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} =: \mathbb{Z}_{\neq 0}$

Satz 7.6

Sei K angeordneter Körper

$\Rightarrow f : \mathbb{Q} \rightarrow K$ ist injektiv und f erhält die Körperstruktur und Ordnung, d.h. $\forall p, q \in \mathbb{Q}$:

- a) $f(p + q) = f(p) + f(q), f(0) = 0_K, f(-p) = -f(p)$
- b) $f(p \cdot q) = f(p) \cdot f(q), f(1) = 1_K, f(p^{-1}) = f(p)^{-1} (p \neq 0)$
- c) $p \leq_{\mathbb{Q}} q \Leftrightarrow f(p) \leq_K f(q)$

Beweis. a) $0_K \stackrel{\text{Satz 7.5}}{<} 1 \stackrel{\text{voll. Ind.}}{\Rightarrow} 0_k < n1_k \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow[\text{Vielfache}]{\text{Satz 7.5}} (-n)1_K = -(n1_k) < 0_K \Rightarrow n1_K \neq 0_K \forall n \in \mathbb{Z}_{\neq 0} \Rightarrow f$ auf \mathbb{Q} definiert

- b) Sei $f\left(\frac{m}{m'}\right) = f\left(\frac{n}{n'}\right) \Rightarrow \frac{m1_K}{m'1_K} = \frac{n1_K}{n'1_K} \Rightarrow (m1_K)(n'1_K) = (n1_K)(m'1_K)$
 $\Rightarrow (mn')1_K = (nm')1_K \Rightarrow (mn' - m'n)1_K = 0_K \stackrel{a)}{\Rightarrow} mn' = m'n =_Z 0 \Rightarrow \frac{m}{m'} =_Q \frac{n}{n'} \Rightarrow f$ injektiv
- c) $f\left(\frac{m}{m'} + \frac{n}{n'}\right) = f\left(\frac{mn'+m'n}{m'n'}\right) = \frac{mn'+m'n}{m'n'} \frac{1_K}{1_K} \stackrel{b)}{=} \frac{m1_K}{m'1_K} + \frac{n1_K}{n'1_K} \stackrel{f \text{ inj}}{=} f\left(\frac{m}{m'}\right) + f\left(\frac{n}{n'}\right)$
 Multi., spezielle Elemente SeSt, Ordnung ÜA □

Folgerung 7.7

Es gilt im angeordneten Körper:

- 1) $\mathbb{Q}_K = f(\mathbb{Q})$ ist mit Addition, Multiplikation und Ordnung von K selbst angeordneter Körper
- 2) \mathbb{Q}_K ist isomorph zu \mathbb{Q} bzgl. Körperstruktur und Ordnung.

Beweis. 1) $\mathbb{Q}_K \subset K$ und Addition und Multi. führen nicht aus \mathbb{Q}_K (vgl. Satz 7.6) $\Rightarrow \mathbb{Q}_K$ selbst Körper mit Ordnung von $K \Rightarrow$ Behauptung

2) nach Satz 7.6 ist f entsprechender Isomorphismus □

Anmerkung

$\mathbb{Q}_K \subset K$ und \mathbb{Q} sind strukturell gleich \Rightarrow können identifiziert werden.

Analog $\mathbb{N}_K \subset \mathbb{Z}_K \subset K$, identifiziere: $n_K := n \cdot 1_K$ mit $n \in \mathbb{N}$ bzw. $n \in \mathbb{Z} \rightarrow$ Schreibe kurz (im angeordneten Körper K) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset K$

\rightarrow Vielfachheit $ma = (1_K a + \dots + I_K a) = (1_K + \dots + 1_K)a = (m1_K) \cdot a = m_K \cdot a$
 angeordneter Körper K heißt archimedisch falls:

$$\forall a \in K \exists n \in \mathbb{N} \subset K \quad a < n$$

Definition

Angeordneter Körper heißt archimedisch, falls $\forall a \in K \exists n \in \mathbb{N} \subset K : a < n$.

Satz 7.8

Sei K archimedisch angeordneter Körper. Dann

- 1) $\forall a, b \in K$ mit $a, b > 0 \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot a > b$
- 2) $\forall a \in K \exists ! [a] \in \mathbb{Z} : [a] \leq a < [a] + 1$, $[a]$ heißt ganzer Anteil von a
- 3) $\forall \varepsilon \in K$ mit $\varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}_{\neq 0} : \frac{1}{n} < \varepsilon$ (beachte: $0 < \frac{1}{n}$)
- 4) $\forall a, b \in K$ mit $a > 1 \exists n \in \mathbb{N} : a^n > b$
- 5) $\forall a, \varepsilon > 0 \exists p, q \in \mathbb{Q} : p \leq aq$ und $q - p < \varepsilon$
 (d.h. $a \in K$ kann auch rationale Zahlen beliebig genau approximiert werden, \mathbb{Q} „dicht“ in K)
- 6) $\forall a, b \in K, a < b \exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$.

Beweis. 1) $a > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} \in K \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{b}{a} \stackrel{a)}{\Rightarrow}$ Behauptung

2) es ist $N := \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 < n\} \neq \emptyset$:

N hat kleinstes Element $\tilde{n} \in N$ (d.h. $\tilde{n} \leq n \forall n \in \mathbb{N}$) vgl. ÜA

Setze $[a] := \tilde{n} - 1 \stackrel{\text{Def } \tilde{n}}{\Rightarrow} [a] = \tilde{n} - 1 \leq a < \tilde{n} = [a] + 1$ falls α ganzer Anteil mit $\alpha < [a] \Rightarrow [a] \leq a <$

$$\alpha + 1 \stackrel{-\alpha}{\implies} 0 < \underbrace{[a] - \alpha}_{\in \mathbb{N}} < \alpha \implies \stackrel{\text{oBdA}}{\implies} [a] \text{ eindeutig}$$

3) Wähle $n > \frac{1}{\varepsilon} \implies$ Behauptung

$$4) \exists n \in \mathbb{N} \stackrel{1)}{<} n(a-1) < 1 + n(a-1) \stackrel{\text{Bernoulli-Ungl.}}{\leq} (1 + (a-1))^n = a^n$$

5) Verwende 4) mit $\tilde{a} := \frac{1}{a}, \tilde{b} := \frac{1}{\varepsilon}$

6) nach 3) $\exists n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon, p := \frac{[na]}{n}, q := \frac{den}{den}$ □

Definition (Intervall)

Intervall für angeordneten Körper K : Sei $a, b \in K$:

- beschränktes Intervall
 - $[a, b] := \{x \in K \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossen
 - $(a, b) := \{a < x < b\}$ offen
 - $[a, b) := \{a \leq x < b\}, (a, b] := \{a < x \leq b\}$ halboffen
- unbeschränktes Intervall
 - $[a, \infty) := \{x \in K \mid a \leq x\}$
 - $(a, \infty) := \{x \in K \mid a < x\}$
 - $(-\infty, b] := \{x \in K \mid x \leq b\}$
 - $(-\infty, b) := \{x \in K \mid x < b\}$

Definition (Folge)

Eine Folge in Menge M ist eine Abbildung $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow M$ (evtl. $\alpha : \mathbb{N}_{\geq n} \rightarrow M$), $\alpha_n := \alpha(n)$ heißen Folglieder, und Folgenindex.

Notation: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\alpha_n\}_{k=1}^{\infty}$ bzw. $\alpha_0, \alpha_1, \dots$

kurz: $\{\alpha_n\}_n, \{\alpha_n\}$

Hinweis: $\{x\}_n$ ist konstante Folge, d.h. $\alpha_n = \alpha \forall n$

Aussage gilt für **fast alle** (fa.) $n \in \mathbb{N}$, wenn höchstens für endlich viele n falsch.

Definition (Intervallschachtelung)

Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} =: \mathcal{X}$ von abgeschlossenen Intervallen $X_n = [x_n, x'_n] \subset K$ ($x_n, x'_n \in K$) heißt Intervallschachtelung (im angeordneten Körper K), falls

- a) $X_n \neq \emptyset$ und $X_{n+1} \subset X_n \forall n \in \mathbb{N}$
- b) $\forall \varepsilon > 0$ in K existiert $n \in \mathbb{N} : l(X_n) := x'_n - x_n < \varepsilon$, mit l Intervalllänge

Lemma 7.9

Sei $\mathcal{X} = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Intervallschachtelung im angeordneten Körper K
 $\implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$ enthält höchstens ein Element.

Beweis. Angenommen $a, b \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$ mit $\varepsilon := b - a > 0 \implies l(X_n) > \varepsilon \forall n \implies$ Widerspruch. □

Definition

Archimedisch angeordneter Körper heißt vollständig, falls $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$ für jede Intervallschachtelung $\mathcal{X} = \{x_n\}$ in K .

Definition

$Q := \{(\{x_n\}, \{y_n\}) \in I_{\mathbb{Q}} \times I_{\mathbb{Q}}\}$ ist Relation auf $I_{\mathbb{Q}}$, $I_{\mathbb{Q}} :=$ Menge aller Intervallschachtelungen $\mathcal{X} = \{x_n\} \in \mathbb{Q}$.

Satz 7.10

Q ist Äquivalenzrelation auf $I_{\mathbb{Q}}$.

Beweis. Q offenbar reflexiv und symmetrisch. Sei nun $\{X_n\} \sim \{Y_n\}$,

$\{Y_n\} \sim \{Z_n\}$, d.h. $X_n \cap Y_n \neq \emptyset$, $Y_n \cap Z_n \neq \emptyset \forall n$. Angenommen $\exists m : X_m \cap Z_m = \emptyset$ und $[x_m, x'_m], [z_m, z'_m] \xrightarrow{o.B.d.A.} l(Y_n) \Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow [X_n] \sim [Z_n] \Rightarrow Q$ transitiv. \square

Definition

setze $\mathbb{R} := \{[\mathcal{X}] \mid \mathcal{X} \in I_{\mathbb{Q}}\}$ Menge der reellen Zahlen.

- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \neq \emptyset \rightarrow [\mathcal{X}]$ ist „neue“ sog. irrationale Zahl

7.1. Rechenoperationen**Definition**

Für Intervalle $X = [x, x'], Y = [y, y']$ in \mathbb{Q} definieren wir Intervall in \mathbb{Q} :

- $X + Y := \{\xi + \eta \mid \xi \in X, \eta \in Y\} = [x + y, x' + y']$
- $X \cdot Y := \{\xi \cdot \eta \mid \xi \in X, \eta \in Y\} = [\tilde{x}\tilde{y}, \tilde{x}'\tilde{y}']$, wobei $\tilde{x}, \tilde{x}' \in \{x, x'\}, \tilde{y}, \tilde{y}' \in \{y, y'\}$
- $-X := [-x, -x']$, $X^{-1} := [\frac{1}{x'}, \frac{1}{x}]$ falls $0 \in X$

Für reelle Zahl $[\mathcal{X}] = [\{x_n\}]$, $[\mathcal{Y}] = [\{y_n\}]$ sei

- $[\mathcal{X}] + [\mathcal{Y}] := [\{x_n + y_n\}]$
- $[\mathcal{X}] \cdot [\mathcal{Y}] := [\{x_n \cdot y_n\}]$
- $-[\mathcal{X}] := [\{-x_n\}]$
- $[\mathcal{X}]^{-1} := [\{x_n^{-1}\}]$ falls $[\mathcal{X}] \neq 0_{\mathbb{R}}$

Satz 7.11

- 1) Addition, Multiplikation und Inverse sind in \mathbb{R} eindeutig definiert
- 2) \mathbb{R} ist damit und neutralen Elementen ein Körper.

Beweis. 1) für Addition (Multiplikation, Inverse Analog (eventuell Fallunterscheidung)) ÜA/SeSt

- a) Zeige $\{X_n + Y_n\} \in I_{\mathbb{Q}}$: offenbar $X_n + Y_n \neq \emptyset$, $X_{n+1} + Y_{n+1} \subset X_n + Y_n \forall n \in \mathbb{N}$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists m : l(X_n) < \frac{\varepsilon}{2}, l(Y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ (beachte: $l(X_{m+1}) \leq l(X_m)$)

$\Rightarrow l(X_m + Y_m) = x'_m + y'_m - x_m - y_m = l(X_m) + l(Y_m) < \varepsilon \Rightarrow$ Behauptung

- b) Addition unabhängig vom Repräsentanten: $\mathcal{X} \sim \tilde{\mathcal{X}}, \mathcal{Y} \sim \tilde{\mathcal{Y}} \Rightarrow x_n \leq \tilde{x}'_n, \tilde{x}_n \leq x'_n$ und $y_n \leq \tilde{y}'_n, \tilde{y}_n \leq y'_n$
 $\Rightarrow x_n + y_n \leq \tilde{x}'_n, \tilde{x}_n + \tilde{y}_n \leq x'_n + y'_n \Rightarrow \mathcal{X} + \mathcal{Y} \sim \tilde{\mathcal{X}} + \tilde{\mathcal{Y}} \Rightarrow 1)$

- 2) • offenbar $0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}$ neutrale Elemente $0_{\mathbb{R}} \neq 1_{\mathbb{R}}$

- Addition, Multiplikation, Kommutativität, Distributivität, Assoziativität (Nachrechnen für Intervalle SeSt)
- $X = [x, x']$ für $x = x'$ ist stets $0 \in [x - x', x' - x], 1 \in [\frac{x}{x'}, \frac{x'}{x}] \xrightarrow{\text{SeSt}} -[\mathcal{X}], [\mathcal{X}]^{-1}$ invers. □

7.2. Ordnung auf \mathbb{R}

Definition

Betr. Relation „ \leq “: $R := \{([\{x_n\}], [\{y_n\}]) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x_n \leq y_n \forall n \in \mathbb{N}\}$

Satz 7.12

\mathbb{R} ist mit „ \leq “ angeordneter Körper. (d.h Totalordnung R ist verträglich mit Addition und Multiplikation.)

Beweis. $R =$ ist offenbar reflexiv, antisymmetrisch, transitiv (ÜA/SeSt).

Sei $\mathcal{X} \sim \tilde{\mathcal{X}}, \mathcal{Y} \sim \tilde{\mathcal{Y}} \Rightarrow$ insbesondere $\tilde{x}_n \leq \tilde{x}'_n, \tilde{y}_n \leq \tilde{y}'_n$. Sei $[\mathcal{X}] \leq [\mathcal{Y}]$ d.h. $x_n \leq y'_n \forall n$ und angenommen $\exists m: \tilde{X}_m > \tilde{Y}_m \Rightarrow l(X_m) + l(Y_n) = x'_n - \tilde{x}_n \underset{\geq 0}{\leq} x'_n - y_n \geq \tilde{x}_n - \tilde{y}'_m \geq \tilde{x}_m - \tilde{y}'_m > 0 \forall n \Rightarrow$ Widerspruch.
 $\Rightarrow \tilde{x}_n \leq \tilde{y}'_n \forall n \Rightarrow R$ unabhängig vom Repräsentaten $\Rightarrow R$ Ordnung auf \mathbb{R} .

- Angenommen $[\mathcal{X}] \not\leq [\mathcal{Y}] \Rightarrow \exists m: y_n \leq y'_m < x_n \leq x'_n \forall n \Rightarrow [\mathcal{Y}] \leq [\mathcal{X}] \Rightarrow R$ Totalordnung
- Ordnung verträglich mit Addition, Multiplikation ÜA/SeSt □

Satz 7.13

\mathbb{R} ist archimedisch angeordneter Körper.

Beweis. Sei $[\{X_n\}] = [\{[x_n, x'_n]\}] \in \mathbb{R}$. (beachte $x_n, x'_n \in \mathbb{Q}$) $\xrightarrow[\text{angeordneter Körper}]{\mathbb{Q} \text{ archimedisch}}$ $\exists k \in \mathbb{N} : k >_{\mathbb{Q}} x'_n >_{\mathbb{Q}} x_n \forall n$
 $\Rightarrow [\{X_n\}] < [\{[k, k]\}] \in \mathbb{N}_{\mathbb{R}}$. □

Theorem 7.14

\mathbb{R} ist vollständiger, archimedisch angeordneter Körper.

Beweis. Sei $\{X_n\} = \{[x_n, x'_n]\}$ Intervallschachtelung in \mathbb{R} , d.h. $x_n, x'_n \in \mathbb{R}$ (beachte x_n, x'_n sind Äquivalenzrelationen von Intervallverschachtelungen in \mathbb{Q} !) Zu zeigen: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$: Sei $x_n = [\{[p_{nk}, q_{nk}]\}_k], x'_n = [\{[p'_{nk}, q'_{nk}]\}_k]$. Setze $p_n := p_{nk'}, q_n := q_{nn'}, p'_n := p'_{nn}, q'_n := q'_{nn}$ oBdA $l([p_n, q_n]), l([p'_n, q'_n]) < \frac{1}{n} p_{n-1} < p_n < q_n < q_{n-1} \Rightarrow$
 $x := [\{[p_k, q'_k]\}_k] \in \mathbb{R}$ (denn $\{Q_k\} \subset I_{\mathbb{Q}}$), da $Q_{k+1} < Q_k \neq \emptyset, l(Q_k) \leq l([p_k, q_k]) + l([p'_k, q'_k]) \stackrel{k \text{ groß}}{<} \varepsilon$
 $\Rightarrow x_n \leq x \leq x'_n$ da $f(p_n k) \leq_K \mathbb{R} x_n \leq x'_k \leq f(q'_k k) \Rightarrow p_{nk} \leq_K \varepsilon q'_{kk}$, analog $p_{kk} \leq_Q q'_{nk} \Rightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \Rightarrow \mathbb{R}$ vollständig. □

Theorem 7.15

Sei K vollständiger, archimedisch angeordneter Körper
 $\Rightarrow K$ ist isomorph zu \mathbb{R} bzgl. Körperstruktur und Ordnung. (d.h. \mathbb{R} strukturell eindeutig)

Beweis. Sei $x \in K \xrightarrow[7.8]{7.9} \exists$ Intervallverschachtelung $\{X_n\} \in I_{\mathbb{Q}}: \{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$

Definiere Abbildung $I: K \rightarrow \mathbb{R}$ mit $I(x) = [\{X_n\}]$ ist injektiv (vergleiche Äquivalenzrelation Intervallschachte-

lung) und surjektiv da K vollständig ist.

I erhält Körperstruktur und Ordnung (analoge Argumente zu bisherigen \rightarrow SeSt!) \square

Notation in \mathbb{R} :

- Variable x statt $\{x_n\}$ bzw. $\{[x_n, x'_n]\}$ (rationale Zahlen auch als $\frac{m}{m'}$)
- konkrete Zahl Dezimaldarstellung (Approximation analog zu Intervallschachtelungen in $I_{\mathbb{Q}} \Rightarrow$ Reihen)
- Brüche für rationale Zahlen $\frac{3}{5}$ (einige wenige Symbole für spezielle irrationale Zahlen ($\sqrt{2}, \pi, \dots$))

Definition

Sei $M \subset K$, K angeordneter Körper.

- $s \in K$ ist obere / untere Schranke von M , falls $x \leq s (x \geq s) \forall x \in M$
 M ist nach oben / unten beschränkt, falls obere (untere) Schranke existiert.
- M beschränkt , falls M nach oben und unten beschränkt.
- kleinste obere (größte untere) Schranke \tilde{s} von M ist Supremum (Infimum) von M , d.h.
 $\sup M := \tilde{s} \leq s (\inf M = s \geq \tilde{s})$ obere (untere) Schranken $s \in M$.
- Falls $\sup M \in M (\inf M \in M)$ nennt man dies auch Maximum (Minimum) von M .
 kurz: $\max M = \sup M (\min M = \inf M)$
- falls M nach oben (unten) unbeschränkt , d.h. nicht beschränkt, schreibt man auch $\sup M = \infty (\inf M = -\infty)$

Man hat

$$\begin{aligned} \sup M &= \min\{s \mid s \text{ obere Schranke von } M\} \\ \inf M &= \max\{s \mid s \text{ untere Schranke von } M\} \end{aligned}$$

Satz 7.17

Sei K angeordneter Körper, $M \subset K$. Falls $\sup M$ ($\inf M$) existiert, dann

- 1) $\sup M$ ($\inf M$) eindeutig
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in M : \sup M < y + \varepsilon$ ($\inf M > y - \varepsilon$)

Beweis. 1) Sei s, \tilde{s} Supremum von $M \Rightarrow s \leq \tilde{s}, \tilde{s} \leq s \Rightarrow s = \tilde{s}$

2) Angenommen $\exists \varepsilon > 0 : \sup M > x + \varepsilon \forall x \in M$

$\Rightarrow \sup M - \varepsilon$ ist obere Schranke $< \sup M \Rightarrow$ Widerspruch \Rightarrow Behauptung \square

■ Beispiel 7.18

- $K = \mathbb{R}$:
 - $b = \sup[a, b) = \sup[a, b] = \max[a, b] = \max[-\infty, b]$
 - $a = \inf(a, b) = \inf(0, \infty)$ kein Minimum!

- $M = \{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}_{\neq 0}\} \Rightarrow \inf M = 0, \max M = 1$
- $K = \mathbb{Q}: M = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\} \Rightarrow \sup M$ existiert nicht in \mathbb{Q} !

Theorem 7.19

Sei K archimedisch angeordneter Körper. Dann

$$K \text{ vollständig} \Leftrightarrow \sup M / \inf M \text{ ex. } \forall M \in K, M \neq \emptyset \text{ nach oben / unten beschränkt}$$

Beweis. $\sup \inf$ analog! $\Rightarrow: M \subset K$ nach oben beschränkt, $\neq \emptyset \rightarrow \exists x_0 \in M$ und obere Schranke $x'_0 \in K$. Definiere $X_n = [x_n, x'_n] \subset K$ rekursiv. $Y_n := \frac{x_n + x'_n}{2}$ (Mittelpunkt zwischen den zwei Schranken) $\begin{cases} \text{obere Schranke } x_{n+1} := x_n, x'_{n+1} := y_n \\ \text{sonst } x_{n+1} := y_n, x'_{n+1} := x'_n \end{cases}$

$\Rightarrow \forall n x'_n$ obere Schranke, x_n nicht, $l(X_n) = \frac{1}{2^n}(x'_0 - x_0)$

$\xrightarrow{7.8} \{X_n\}$ ist Intervallschachtelung $\xrightarrow{\text{vollst.}} x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Angenommen $\exists y \in M: x < y \rightarrow \exists m: l(X_m) < y - x > 0$

$\xrightarrow{y \leq x'_m}$ Widerspruch \Rightarrow obere Schranke von ... für später!!! □

7.3. Anwendung: Wurzeln, Potenzen, Logarithmen in \mathbb{R}

Satz 7.20 (Wurzeln)

Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}, k \in \mathbb{N}_{>0} \Rightarrow \exists! x \in \mathbb{R}_{>0}: x^k = a, \sqrt[k]{a} := a^{\frac{1}{k}} = x$ heißt k-te Wurzel von a .

Definition (Potenz)

n -te Potenz von $a \in \mathbb{R}_{>0}, r \in \mathbb{R}$:

Zunächst $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ (**oBdA**) $n \in \mathbb{N}_{>0}$: $a^{\frac{m}{n}} := (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{1}{n}}$ Allgemein für $a \geq 0, a > 0: a^r := \sup\{a^q \mid 0 \leq q \leq r, q \in \mathbb{Q}\}$ offenbar eindeutig definiert und allgemeine Definition konsistent mit Definition für $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Damit: Exponentialfunktion

Satz 7.21

Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}, r, s \in \mathbb{R}$. Dann

- 1) $a^r b^r = (ab)^r, (a^r)^s = a^{rs}, a^r a^s = a^{r+s}$
- 2) f. $r > 0: a < b \Leftrightarrow a^r < b^r$
- 3) für $a > 1: r < s \Leftrightarrow a^r < a^s$

Definition (Logarithmus)

Sei $a, b \in \mathbb{R}_{>0}, a \neq 1$: Logarithmus von b zur Basis a ist

$$\log_a b := \begin{cases} \sup\{r \in \mathbb{R} \mid a^r \leq b\} & a > 1 \\ \sup\{r \in \mathbb{R} \mid a^r \geq b\} & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Satz 7.22

Se $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}, a \neq 1$. Dann

- 1) $\log_a b$ ist eindeutige Lösung von $a^x = b$, d.h. $a^{\log_a b} = b$
- 2) $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$
- 3) $\log_a b^\gamma = \gamma \log_a b \forall \gamma \in \mathbb{R}$
- 4) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c, \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- 5) $\log_a b = \frac{\log_\alpha b}{\log_\alpha a} \forall \alpha \in \mathbb{R}_{>0}, \alpha \neq 1$

7.4. Mächtigkeit von Mengen**Definition**

M endlich, falls M endlich viele Elemente hat, sonst unendlich.

Unendliches M ist abzählbar, falls bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow M$ existiert, sonst ist M überabzählbar.

Satz 7.23

Es gilt:

- 1) \mathbb{Z}, \mathbb{Q} abzählbar
- 2) M abzählbar, $n \in \mathbb{N}_{>0} \Rightarrow M^n$ abzählbar ($\Rightarrow \mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}^n$ abzählbar)
- 3) Ein offenes Intervall $I \in \mathbb{R} \neq \emptyset$ ist überabzählbar
- 4) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

8. Komplexe Zahlen (kurzer Überblick)

Frage: Hat $x^2 = -1$ eine Lösung in \mathbb{R} ?

Antwort: keine Lösung \Rightarrow Körpererweiterung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Definition (komplexe Zahlen)

betrachte Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ mit Addition und Multiplikation:

- $(x, x') + (y, y') = (x + y, x' + y')$
- $(x, x') \cdot (y, y') = (xy - x'y', xy' + x'y)$

\mathbb{C} ist ein Körper mit (vgl. lin Algebra):

$$0_{\mathbb{C}} = (0, 0), 1_{\mathbb{C}} = (1, 0), -(x, y) = (-x, -y) \text{ and } (x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$$

mit imaginärer Einheit $\iota = (0, 1)$

$z = x + \iota y$ statt $z = (x, y)$ mit $x := \operatorname{Re}(z)$ Realteil von z , $y := \operatorname{Im}(z)$ Imaginärteil von z

komplexe Zahl $z = x + \iota y$ wird mit reeller Zahl $x \in \mathbb{R}$ identifiziert

offenbar $\iota^2 = (-1, 0) = -1$, d.h. $z = \iota \in \mathbb{C}$ und löst die Gleichung $z^2 = -1$ (nicht eindeutig, auch $(-\iota)^2 = -1$)

Betrag $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ (ist Betrag/Länge des Vektors (x, y))

Satz 8.1

Es gilt:

- a) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2\iota}$
- b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- c) $|z| = 0 \iff z = 0$
- d) $|\bar{z}| = |z|$
- e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- f) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecks-Ungleichung: Mikowski-Ungleichung)

Beweis. SeSt ■

Kapitel III

Metrische Räume und Konvergenz

16. Grundlegende Ungleichungen

Satz 16.1 (geometrisches / arithmetisches Mittel)

Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}}_{\text{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}}_{\text{arithmetisches Mittel}}$$

Beweis. Zeige zunächst mit vollständiger Induktion

$$\prod_{i=1}^n x_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq n, \text{ mit } x_1 = \dots = x_n \quad (1)$$

- (IA) $n = 1$ klar
- (IS) (1) gelte für n , zeige (1) für $n + 1$ d.h. $\prod_{i=1}^{n+1} x_i = 1$, falls alle $x_i = 1 \Rightarrow$ Behauptung. Sonst oBdA $x_n < 1, x_{n+1} > 1$:
mit $y_n := x_n x_{n+1}$ gilt $x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot y_n = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1 + \dots + x_{n+1} &= \underbrace{x_1 + \dots + x_{n-1}}_{\geq (IV)} + y_n - y_n + x_n + x_{n+1} \\ &\geq n + \underbrace{(x_{n+1} - 1)}_{>n} \underbrace{(1 - x_n)}_{>n} \\ &\Rightarrow (1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

allgemein sei nun $g := \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{g} = 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{g} \geq n \Rightarrow \text{Behauptung}$$

Aussage über Gleichheit nach nochmaliger Durchsicht.

□

Satz 16.2 (allgemeine Bernoulli-Ungleichung)

Seien $\alpha, x \in \mathbb{R}$. Dann

- 1) $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \quad \forall x \geq -1, \alpha > 1$
- 2) $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \quad \forall x \geq -1, 0 < \alpha < 1$

Beweis. 2) Sei $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_{<1}$, d.h. $m \leq n$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (1+x)^{\frac{m}{n}} \stackrel{\text{Definition}}{=} \sqrt[n]{(1+x)^m \cdot 1^{n-m}} \\ &\leq \frac{m(1+x) + (n-m) \cdot 1}{n} \\ &= \frac{n+mx}{n} = 1 + \frac{m}{n}x, \text{ für } \alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \text{Behauptung} \end{aligned}$$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ angenommen $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$ ($x \neq 0$ sonst klar!)

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Satz 7.8}}{\Rightarrow} \exists \in \mathbb{Q}_{<1} \begin{cases} x > 0 & \alpha < q < \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \\ x < 0 & \alpha < q \end{cases} \\ &\Rightarrow 1 + qx < (1+x)^\alpha \leq (1+x)^q \stackrel{\text{Satz 7.21}}{\Rightarrow} \Rightarrow \text{Behauptung} \end{aligned}$$

1) Sei $1 + \alpha x \geq 0$, sonst klar

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \alpha x \geq -1 \stackrel{2)}{\Rightarrow} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\geq 1 + \frac{1}{\alpha} \alpha x = 1 + x \\ &\Rightarrow \text{Behauptung und Gleichheit ist Selbststudium.} \quad \square \end{aligned}$$

Satz 16.3 (Young'sche Ungleichung)

Seien $p, q \in \mathbb{R}, p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\Rightarrow a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \forall a, b \geq 0$$

Spezialfall: $p = q = 2 : ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

Beweis.

Sei $a, b > 0$ (sonst klar!)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(\frac{b^q}{a^p}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(1 + \left(\frac{b^q}{a^p} - 1\right)\right)^{\frac{p}{q}} \\ &\stackrel{\text{Bernoulli}}{\leq} 1 + \frac{1}{q} \left(\frac{b^q}{a^p} - 1\right) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{q} \frac{b^q}{a^p} - \frac{1}{q} \\ &\stackrel{\cdot a^p}{\Rightarrow} a^p \frac{b^{\frac{p}{q}}}{a} = a^{p(1-\frac{1}{q})} b = ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \square \end{aligned}$$

Satz 16.4 (Hölder'sche Ungleichung)

Sei $p, q \in \mathbb{R}, p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Beweis. Faktoren rechts seien \mathcal{X} und \mathcal{Y} d.h.

$$\mathcal{X}^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{1}{p}}, \mathcal{Y}^p = \sum_{i=1}^n |y_i|^{\frac{1}{q}}, \text{ falls } \mathcal{X} = 0$$

$$\Rightarrow x_i = 0 \forall i \Rightarrow \text{Behauptung, analog für } \mathcal{Y} = 0$$

Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y} > 0$

$$\stackrel{\text{Young}}{\Rightarrow} \frac{|x_i y_i|}{\mathcal{X} \mathcal{Y}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\mathcal{X}^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\mathcal{Y}^p} \cdot \forall i$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mathcal{X} \mathcal{Y}} \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \frac{1}{p} \frac{\mathcal{X}^p}{\mathcal{X}^p} + \frac{1}{q} \frac{\mathcal{Y}^p}{\mathcal{Y}^p} = 1 \Rightarrow \text{Behauptung} \quad \square$$

► **Bemerkung 16.5**

- Ungleichung gilt auch für $x_i, y_i \in \mathbb{C}$ (nur Beträge gehen ein)
- für $p = q = 2$ heißt Ungleichung CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung (Gleichheit gdw. $\exists x \in \mathbb{R} x_i = \alpha y_i$ oder $y_i = \alpha x_i \forall i$)

Satz 16.6 (Minkowski-Ungleichung)

Sei $p \in \mathbb{R}, p > 1$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Beweis. $p = 1$ Beh. folgt aus Δ -Ungleichung $|x_i + y_i| \stackrel{\text{Satz 7.5}}{\leq} |x_i| + |y_i| \forall i$
 $p > 1$ sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}, z_i := |x_i + y_i|^{p-1} \forall i$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{p \cdot q} &= \sum_{i=1}^n |z_i|^q \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \cdot |z_i|^q \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungleichung}}{=} \sum_{i=1}^n |x_i \cdot z_i| + \sum_{i=1}^n |y_i \cdot z_i| \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} (\mathcal{X} + \mathcal{Y}) \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\mathcal{X} + \mathcal{Y}) \mathcal{S}^{\frac{p}{q}} \\ &\Rightarrow \mathcal{S} \leq \mathcal{X} + \mathcal{Y} \Rightarrow \text{Behauptung} \quad \square \end{aligned}$$

► **Bemerkung 16.7**

- Ungleichung gilt auch für $x_i, y_i \in \mathbb{C}$
- ist Δ -Ungleichung für p -Normen

17. Metrische Räume

Definition (Metrik)

Sei X Menge, Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Metrik auf X , falls $\forall x, y, z \in X$:

- a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- b) $d(x, y) = d(y, x)$ Symmetrie
- c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ Dreiecksungleichung

(X, d) heißt metrischer Raum.

■ Beispiel 17.2

Diskrete Metrik auf bel. Menge X ist

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

ist offenbar Metrik.

■ Beispiel 17.3

Sei (X, d) metrischer Raum, $Y \subset X$

$\Rightarrow (Y, \tilde{d})$ ist metrischer Raum mit induzierte Metrik $\tilde{d}(x, y) := d(x, y) \forall x, y \in Y$.

Definition (Norm)

Sei X Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$.

Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm auf X , falls $\forall x, y \in X$

- a) $\|x\| = 0$ gdw. $x = 0$
- b) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \forall \lambda \in K$ (Homogenität)
- c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungleichung

$(X, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum

Definition (Halbnorm)

$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Halbnorm, falls nur **b)** und **c)** gelten.

Folgerung 17.4

- $\|x\| \geq 0$
- $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

Satz 17.5

Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum.

$\Rightarrow X$ ist metrischer Raum mit Metrik $d(x, y) := \|x - y\| \forall x, y \in X$.

■ Beispiel 17.6

Man hat u.a. folgende Normen auf \mathbb{R}^n :

p-Norm $|x|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ ($1 \leq p < \infty$)

Maximum-Norm $|x|_\infty := \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}$

Standardnorm im \mathbb{R}^n : $|\cdot| := |\cdot|_{p=2}$ heißt euklidische Norm

Definition (Skalarprodukt)

$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ heißt Skalarprodukt (inneres Produkt) von $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Offenbar ist $\langle x, x \rangle = |x|^2 \forall x \in \mathbb{R}^n$ (ausschließlich für Euklidische Norm)

Man hat $|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y| \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (CAUCHY-SCHWARZ'sche Ungleichung)

■ Beispiel 17.7

$X = \mathbb{C}^n$ ist Vektorraum über \mathbb{C} , $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, x_i \in \mathbb{C}$.

Analog zu 17.6 sind $|\cdot|_p$ und $|\cdot|_\infty$ Normen auf \mathbb{C}^n

$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i \forall x, y \in \mathbb{C}$ heißt Skalarprodukt von $x, y \in \mathbb{C}^n$.

$x, y \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ heißen orthogonal, falls $\langle x, y \rangle = 0$.

■ Beispiel 17.8

Sei M beliebige Menge, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

- $\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in M\}$ Supremumsnorm
- $B(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\| < \infty\}$ Menge der beschränkten Funktionen

■ Beispiel 17.9

$\|x\| := |x_1|$ ist Halbnorm auf $X = \mathbb{R}^n$, da $\|(0, 1)\| = 0$, aber $(0, 1) \neq 0$

Definition

Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ auf X heißen äquivalent, falls $\exists \alpha, \beta > 0 : \alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \forall x \in X$

■ Beispiel 17.10

$|x|_\infty \leq |x|_p \leq \sqrt[p]{n} \cdot |x|_\infty$, d.h. $|\cdot|_\infty$ und $|\cdot|_p$ sind äquivalent für alle $p \geq 1$

Beweis. $|x|_\infty = (\max\{|x_1|, \dots\}^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{j=1}^n |x_j|^p)^{\frac{1}{p}} = |x|_p \leq (n \cdot \max\{|x_1|, \dots\}^p)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{n} \cdot |x|_\infty$ □

Folgerung 17.11

$|\cdot|_p, |\cdot|_q$ sind äquivalent auf $\mathbb{R}^n \forall p, q \geq 1$.

Definition

- $B_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$ heißt (offene) Kugel um a mit Radius $r > 0$
- $B_r[a] := \bar{B}_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$ heißt (abgeschlossene) Kugel um a mit Radius $r > 0$

Hinweis: muss keine „übliche“ Kugel sein, zum Beispiel $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(0, x) = \|x\|_\infty < 1\}$ hat die Form eines „üblichen“ Quadrats.

- Menge $M \subset X$ heißt offen, falls $\forall x \in M \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset M$
- Menge $M \subset X$ ist abgeschlossen, falls $X \setminus M$ offen
- $U \subset X$ Umgebung von M , falls $\exists V \subset X$ offen mit $M \subset V \subset U$
- $x \in M$ innerer Punkt, von M , falls $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset M$
- $x \in X \setminus M$ äußerer Punkt von M , falls $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset X \setminus M$
- $x \in X$ heißt Randpunkt, von M , wenn x weder innerer noch äußerer Punkt
- $\text{int}M :=$ Menge aller inneren Punkte von M , heißt Inneres von M
- $\text{ext}M :=$ Menge aller äußeren Punkte von M , heißt Äußeres von M .
- $\partial M :=$ Menge der Randpunkte von M , heißt Rand von M
- $\text{cl} := \bar{M} = \text{int}M \cup \partial M$ heißt Abschluss von M
- $M \subset X$ heißt beschränkt, falls $\exists a \in X, r > 0 : M \subset B_r(a)$
- $x \in X$ heißt Häufungspunkt (HP) von M , falls $\forall \varepsilon > 0$ enthält $B_\varepsilon(x)$ unendlich viele Elemente aus M
- $x \in M$ heißt isolierter Punkt von M , falls x kein Häufungspunkt

■ Beispiel 17.12

1. $X = \mathbb{R}$ mit $d(x, y) = |x - y|$

- (a, b) offen, $[a, b]$ abgeschlossen
- $[a, b)$ halboffen, aber beschränkt
- $\text{int}(a, b) = \text{int}[a, b] = (a, b)$
- $\text{ext}(a, b) = \text{ext}[a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$
- $\partial(a, b) = \partial[a, b] = \{a, b\}$
- $\text{cl}(a, b) = \text{cl}[a, b] = [a, b]$
- \mathbb{Q} weder offen noch abgeschlossen in \mathbb{R} , $\text{int} \mathbb{Q} = \emptyset$, $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ offen, \mathbb{N} in \mathbb{R} abgeschlossen und nicht beschränkt
- $[0, 3]$ ist Umgebung von $[1, 2]$, $B_r(a)$ ist Umgebung von a
- a ist HP von (a, b) und $[a, b]$, wenn $a < b$, aber nicht von $[a, a]$
- alle $a \in \mathbb{R}$ sind HP von \mathbb{Q}

2. für $X = \mathbb{R}$ mit diskreter Metrik: $x \in M \Rightarrow B_{0,5}(x) = \{x\}$
 \Rightarrow alle $M \subset \mathbb{R}$ sind offen und abgeschlossen

Lemma 17.13

Sei (X, d) metrischer Raum. Dann

- 1) $B_r(a)$ offene Menge $\forall r > 0, a \in X$
- 2) $M \subset X$ beschränkt $\Rightarrow \forall a \in X \exists r > 0 : M \subset B_r(a)$

Beweis. 1) Sei $b \in B_r(a), \varepsilon := r - d(a, b) > 0$, dann gilt für beliebige $x \in B_\varepsilon(b)$

$$\begin{aligned} d(a, x) &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(a, b) + d(b, x) \\ &< d(a, b) + r - d(a, b) \\ &= r \Rightarrow B_\varepsilon(b) \subset B_r(a) \Rightarrow \text{Behauptung} \end{aligned}$$

- 2) Sei $M \subset B_\rho(b), a \in X$ beliebig, $r := \rho + d(a, b), m \in M$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(m, a) &\leq d(m, b) + d(b, a) \\ &< \rho + d(b, a) = r \Rightarrow m \in B_r(a) \end{aligned} \quad \square$$

Satz 17.14

Sei (X, d) metrischer Raum, $\tau := \{U \subset X \mid U \text{ offen}\}$. Dann

- 1) $X, \emptyset \in \tau$ offen
- 2) $\bigcap_{i=1}^n U_i \subset \tau$ falls $U_i \in \tau$ für $i = 1, \dots, n$
- 3) $\bigcup_{U \in \tau'} U \in \tau$ falls $\tau' \in \tau$

Beweis. 1) X offen, da stets $B_\varepsilon(x) \subset X$, Definition "offen" wahr für \emptyset

- 2) Sei $X \in \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \exists \varepsilon_i > 0 : B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i \forall i, \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$
 $\Rightarrow B_\varepsilon(x) \in \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow$ Behauptung

- 3) Sei $x \in \bigcup_{U \in \tau'} U \Rightarrow \exists \tilde{U} \in \tau' : x \in \tilde{U} \stackrel{\tilde{U} \text{ offen}}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset \tilde{U} \in \bigcup_{U \in \tau'} U \Rightarrow$ Behauptung. □

Hinweis: Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen im Allgemeinen nicht offen

■ **Beispiel 17.15**

$$\bigcap \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = [0, 1]$$

Folgerung 17.16

Sei (X, d) metrischer Raum, $\sigma := \{V \subset X \mid V \text{ abgeschlossen}\}$. Dann

- 1) $X, \emptyset \in \sigma$ abgeschlossen
- 2) $\bigcup_{i=1}^n V_i \subset \sigma$ falls $V_i \in \sigma_i$ für $i = 1, \dots, n$

3) $\bigcap_{V \in \sigma'} V \in \sigma$ falls $\sigma' \subset \sigma$

Definition (Topologie)

Sei X Menge, und τ Menge von Teilmengen von X , d.h. $\tau \subset \mathcal{P}(X)$.

τ ist Topologie und (X, τ) topologischer Raum, falls 1),2),3) aus 17.14 gelten.

Mengen $U \subset \tau$ heißen dann (per Definition) offene Mengen, folglich in metrischen Räumen definierte offene Mengen sind ein Spezialfall einer Topologie.

beachte: $\tilde{\tau} = \{\emptyset, X\}$ ist stets Topologie für beliebige Menge X

Satz 17.17

Seien $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ äquivalente Normen in X und $U \subset X$. Dann

$$U \text{ offen bezüglich } \|\cdot\|_1 \Leftrightarrow U \text{ offen bzgl. } \|\cdot\|_2$$

Beweis. Übungsaufgabe □

Satz 17.18

Sei (X, d) metrischer Raum und $M \subset X$: Dann

- 1) $\text{int } M, \text{ext } M$ offen
- 2) $\partial M, \text{cl } M$ abgeschlossen
- 3) $M = \text{int } M$, falls M offen, $M = \text{cl } M$ falls M abgeschlossen

Beweis. 1) Seien $x \in \text{int } M$, d.h. innere Punkte von $M \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subset M$, da $B_\varepsilon(x)$ offene Menge, ist jedes $y \in B_\varepsilon(x)$ eine Teilmenge von $\text{int } M \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset M \Rightarrow$ Behauptung (ext M analog)

2) $\partial X \setminus (\text{int } M \cup \text{ext } M)$ ist abgeschlossen, $\text{cl } M = X \setminus \text{ext } M$ abgeschlossen

3) M offen: es ist stets $\int M$ und da M offen $M \subset \text{int } M \Rightarrow$ Behauptung $\Rightarrow X \setminus M = \text{int}(X \setminus M) = \text{ext } M = X \setminus \text{cl } M \Rightarrow$ Behauptung. (M abgeschlossen analog) □

18. Konvergenz

Definition (konvergent)

Sei (X, d) metrischer Raum. Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in X , (d.h. $x_n \in X \forall n$) heißt konvergent, falls $x \in X$ existiert mit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

x heißt dann Grenzwert (auch Limes) der Folge.

Notation: $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

Folge heißt divergent, falls nicht konvergent.

Folgerung 18.1

Für Folge $\{x_n\}$ gilt:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow \text{Jede Kugel } B_\varepsilon(x) \text{ enthält fast alle } x_n$$

■ Beispiel 18.2

- konstante Folge: Sei $\{x_n\}_n = \{x\}_n \in \mathbb{N}$, d.h. $x = x_n$
- $X = \mathbb{R}$: Folge $\{\frac{1}{n}\}$ konvergent, Grenzwert 0
- $X = \mathbb{R}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$
- $X = \mathbb{R}$: $\{-1\}^n$ ist divergent

Satz 18.3 (Eindeutigkeit des Grenzwertes)

Sei (X, d) metr. Raum, $\{x_n\}$ Folge in X . Dann

$$x, x' \text{ Grenzwert von } \{x_n\} \Rightarrow x = x'$$

Beweis. Sei $\varepsilon := \frac{1}{3}$, $d(x, x') > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : d(x_m, x) < \varepsilon, d(x_m, x') < \varepsilon$
 $3\varepsilon = d(x, x') \leq d(x_m, x) + d(x_m, x') < 2\varepsilon \Rightarrow \text{`} \Rightarrow d(x, x') = 0$ □

Satz 18.4

Sei (X, d) metrischer Raum, $\{x_n\}$ konvergente Folge in X
 $\Rightarrow \{x_n\}$ ist beschränkt.

Beweis. Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow$ für $\varepsilon = 1 \exists n_0 : d(x_n, x) < 1$ mit $r = \max\{d(x, x_n)\} + 1$ folgt: $x_n \in B_r(x) \Rightarrow$ beschränkt □

■ Beispiel 18.5

$X = \mathbb{R}$ mit diskreter Metrik: betrachte $\{x_n\}$

angenommen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow$ für $\varepsilon = \frac{1}{2} \exists n_0 : x_n \in B_{0,5}(x) = \{x\}$

\Rightarrow fast alle x_n sind gleich x bei Konvergenz $\Rightarrow \{\frac{1}{n}\}$ ist divergent \Rightarrow Konvergenz ist abhängig von Metrik

■ Beispiel 18.6

$X = \mathbb{C}$ mit $|\cdot|$. betrachte $\{z^n\}$ für $z \in \mathbb{C}$

- $|z| < 1$: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : |z^n - n_0| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$
- $|z| > 1$: $\forall r > 0 \exists n_0 : |z^{n_0} - 0| = |z|^{n_0} > r \Rightarrow$ es gibt also kein $r > 0 \Rightarrow \{z^n\}$ ist nicht beschränkt \Rightarrow divergent
- $z = 1$ offenbar $\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$
- $|z| = 1$, aber $z \neq 1$: angenommen $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \tilde{z} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}|z - 1| \Rightarrow |z - \tilde{z}| < \varepsilon \Rightarrow 2\varepsilon = |z - 1| = |z^{n_0}| \cdot |z - 1| = |z^{n_0} + 1 - \tilde{z} + \tilde{z} - z^{n_0}| \leq |z^{n_0} + 1 - \tilde{z}| + |\tilde{z} - z^{n_0}| < 2\varepsilon \Rightarrow \{z^n\}$ divergent

■ Beispiel 18.7

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, denn:

$$\begin{aligned} x_n &:= \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0 \\ n &= (1 + x_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} \cdot x_n^2 \\ n - 1 &\geq n \frac{n-1}{2x_n^2} \\ x_n = \sqrt[n]{n} - 1 &\leq \sqrt{\frac{2}{n}} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

■ Beispiel 18.8

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ für $a > 1$, denn
 $1 < \sqrt[n]{n} < a^\varepsilon \Rightarrow 0 < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$

Definition (Teilfolge, Häufungswert)

Sei $\{x_n\}$ beliebige Folge in X , $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathbb{N} mit $n_{k+1} > n_k \forall k \in \mathbb{N}$. Dann heißt $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ **Teilfolge (TF)** von $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$\gamma \in X$ heißt **Häufungswert (Hw)** (auch Häufungspunkt) der Folge $\{x_n\}$, falls $\forall \varepsilon > 0$ enthält $B_\varepsilon(\gamma)$ unendlich viele x_n .

beachte: HP der Folge muss nicht HP der Menge $\{x_n\}$ sein, z.B. konstante Folge

Satz 18.9

Sei $\{x_n\}$ Folge im metrischen Raum (X, d) . Dann

- 1) $x_n \rightarrow x \Rightarrow x_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ für jede TF $\{x_{n_k}\}_k$
- 2) γ ist Hw der Folge $\{x_n\} \Leftrightarrow \exists$ TF $\{x_{n_k}\} : x_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma$
- 3) Teilfolgenprinzip: Jede TF $\{x_{k'}\}$ von $\{x_n\}$ hat TF $\{x_{k''}\}$ mit $x_{n''} \rightarrow x \Rightarrow x_n \rightarrow x$

Beweis. 1. folgt aus Definition

2. (\Rightarrow): $\exists n_k : x_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(x), n_{k+1} > n_k \Rightarrow \{x_{n_k}\}$ ist TF mit $x_{n_k} \rightarrow x$
 (\Leftarrow): $x_{n_k} \rightarrow x \Rightarrow B_\varepsilon(x)$ fast alle $x \Rightarrow$ Behauptung

3. Übungsaufgabe

□

■ **Beispiel 18.10**

$\{(-1)^n\}$ hat TF $\{(-1)^{2k}\}$ und $\{(-1)^{2k+1}\}$ mit Grenzwert $+1$ und $-1 \Rightarrow \{(-1)^n\}$ ist divergent, da es 2 HW gibt.

Satz 18.11

Sei (X, d) metrischer Raum, $M \subset X$ Teilmenge. Dann

$$M \text{ abgeschlossen} \Leftrightarrow \text{für jede konv. Folge } \{x_n\} \text{ in } M \text{ gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in M$$

Beweis. (\Rightarrow): sei $\{x_n\} \in M$ mit $x_n \rightarrow x \notin M \Rightarrow \exists \varepsilon : B_\varepsilon \subset X \setminus M \Rightarrow x_n \notin M \Rightarrow$ Behauptung

(\Leftarrow): sei $X \setminus M$ nicht offen, also abgeschlossen $\Rightarrow \exists x \in X \setminus M : B_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap M \Rightarrow x_n \rightarrow x \in M \Rightarrow X \setminus M$ offen \square

18.1. Konvergenz im normierten Raum X

$x_n \rightarrow x$ in $(X, \|\cdot\|)$ und $\lambda_n \rightarrow \lambda$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

Satz 18.12

Sei X normierter Raum, $\{x_n\}, \{y_n\}$ in X , $\{\lambda_n\}$ in K mit $\lim x_n = x, \lim y_n = y$. Dann

- 1) $\{x_n \pm y_n\}$ konvergiert und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$
- 2) $\{\lambda_n x_n\}$ konvergiert und $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$
- 3) $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda}$ (in K) für $\{\frac{1}{\lambda_n}\}_{n \geq \tilde{n}}$ ($\lambda_n \neq 0 \forall n \geq \tilde{n}$)

Beweis. 1. Übungsaufgabe

2. $\{x_n\}$ beschränkt $\Rightarrow \exists r > 0 : \|rx_n\| \leq r$

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 : |\lambda_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2r}, \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2r}$$

$$\Rightarrow \|\lambda x_n - \lambda x\| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda x_n\| + \|\lambda x_n - \lambda x\| = |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x_n\| + |\lambda| \cdot \|x_n - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2r} \cdot r + r \cdot \frac{\varepsilon}{2r} = \varepsilon \Rightarrow \text{Behauptung}$$

3. offenbar: $\exists \tilde{n} : \lambda_n \neq 0$ für $\varepsilon > 0 \exists n_0 : |\lambda - \lambda_n| < m \cdot n \cdot \left\{ \left(\frac{|x|}{2} \right), \left(\frac{\varepsilon \cdot |\lambda|^2}{2} \right) \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot |\lambda| \leq |\lambda| - |\lambda + \lambda_n| \leq \lambda_n \Rightarrow \dots \Rightarrow$ Behauptung \square

Folgerung 18.13

Seien $\{\lambda_n\}, \{\mu_n\}$ Folgen in K mit $\lambda_n \rightarrow \lambda, \mu_n \rightarrow \mu$. Dann

- 1) $\lambda_n + \mu_n \rightarrow \lambda + \mu, \lambda_n \mu_n \rightarrow \lambda \mu$
- 2) falls $\lambda \neq 0$ (oBdA $\lambda_n \neq 0$): $\frac{\mu_n}{\lambda_n} \rightarrow \frac{\mu}{\lambda}$

Definition (Nullfolge)

$\{x_n\}$ im normierten Raum heißt Nullfolge, falls $x_n \rightarrow 0$

Lemma 18.14

- 1) Im metrischen Raum X gilt: $x_n \rightarrow x$ in $X \Leftrightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0$ in \mathbb{R}
- 2) Sei $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}, \beta_n \rightarrow 0$
 $\Rightarrow \alpha_n \rightarrow 0$ Sandwich-Prinzip

Beweis. 1. benutze $d(x_n, x) < \varepsilon \iff |d(x_n, x) - 0| < \varepsilon$

2. $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n : \beta_n = |\beta_n - 0\beta_n| < \varepsilon \Rightarrow \alpha_n = |\alpha_n - 0| \leq \beta_n < \varepsilon \Rightarrow$ Behauptung \square

Satz 18.15

Sei X normierter Raum, $\{x_n\}$ in X . Dann
 $x_n \rightarrow x$ in $X \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x\|$ in \mathbb{R}

Beweis. $0 \leq |\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \rightarrow 0 \stackrel{\text{Lemma 18.14}}{\Rightarrow}$ Behauptung \square

Satz 18.16

Seien $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume mit äquivalenten Normen. Dann
 $x_n \rightarrow x$ in $(X, \|\cdot\|_1) \Leftrightarrow x_n \rightarrow x$ in $(X, \|\cdot\|_2)$

Beweis. Es gibt $a, b > 0 : a \cdot \|y\|_1 \leq \|y\|_2 \leq b \cdot \|y\|_1$

(\Rightarrow): es ist $0 \leq \|x_n - x\|_2 \leq b \cdot \|x_n - x\|_1 \rightarrow 0 \Rightarrow$ Behauptung

(\Leftarrow): analog \square

■ Beispiel 18.17

$X = \mathbb{R}^n$ bzw. \mathbb{C}^n : $x_n \rightarrow x$ bezüglich $\|\cdot\|_1 \iff x_n \rightarrow x$ bezüglich $\|\cdot\|_2$, somit Konvergenz in \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n unabhängig von Norm.

Satz 18.18 (Konvergenz in $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$ bzgl. Norm)

Sei $\{x_n\}$ Folge mit $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^n) \in \mathbb{R}(\mathbb{C}^n)$, $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ in $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_k^j = x^j$ in \mathbb{R} bzw. $\mathbb{C} \forall j = 1, \dots, n$

Beweis. nur in \mathbb{R}^n

(\Rightarrow): sei $x_k \rightarrow x$ in \mathbb{R}^n bezüglich $|\cdot|_p \Rightarrow x_n \rightarrow x$ bezüglich $|\cdot|_\infty$. Wegen $|x_k^j - x^j| \leq |x_k - x|_\infty \rightarrow 0$ hieraus folgt die Behauptung

(\Leftarrow): sei $x_k^j \rightarrow x^j \Rightarrow |x_k - x|_1 = |x_k^1 - x^1| + \dots + |x_k^n - x^n| \rightarrow 0 \Rightarrow x_k \rightarrow x$ bezüglich $|\cdot|_1 \Rightarrow$ Behauptung \square

Hinweis: zukünftig bei Konvergenz in \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n in der Regel keine Angabe der konkreten Norm.

► Bemerkung 18.19

offenbar gilt:

$z_n = x_n + iy_n \rightarrow z = x + iy \iff (x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ in \mathbb{R}^2 bezüglich $|\cdot| \iff \Re(z_n) \rightarrow \Re(z)$ und $\Im(z_n) \rightarrow \Im(z)$

■ Beispiel 18.20

$\{x_k\} = \{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}, \sqrt{k+\sqrt{k}} - \sqrt{k})\}$ Folgen in \mathbb{R}^2

es ist $0 \leq x_k^1 = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}} \rightarrow 0 \Rightarrow x_k^1 \rightarrow 0$

$x_k^2 = \sqrt{k+\sqrt{k}} - \sqrt{k} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+\sqrt{k}} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{k}}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \frac{1}{2}$

■ **Beispiel 18.21**

$z_k = \frac{1+ki}{1+k} \rightarrow i$, denn:

$$\Re(z_n) = \frac{1}{1+k} \rightarrow 0 \text{ und } \Im(z_n) = \frac{k}{k+1} \rightarrow 1 \Rightarrow \rightarrow (0, 1) = i$$

18.2. Konvergenz in \mathbb{R}

Satz 18.22

Seien $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ Folgen in \mathbb{R} . Dann

- 1) $x_n \leq y_n \forall n \geq n_0, x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow x \leq y$
- 2) $x_n \leq y_n \leq z_n \forall n \geq n_0, x_n \rightarrow c, z_n \rightarrow c \Rightarrow y_n \rightarrow c$ (Sandwich-Prinzip)

Beweis. 1. angenommen $x > y$, sei $\varepsilon := \frac{1}{2}(x - y) > 0$

$$\Rightarrow \exists m : x_n \in B_\varepsilon(x), y_n \in B_\varepsilon(y)$$

$$\Rightarrow y_n < y + \varepsilon = x - \varepsilon < x_n \Rightarrow \text{Behauptung}$$

2. offenbar $0 \leq y_n - x_n \leq z_n - x_n \rightarrow 0 \Rightarrow y_n - x_n \rightarrow 0 \Rightarrow c$ □

Definition (monoton)

Folge $\{x_n\}$ heißt wachsend / fallend, falls gilt:

$$x_n \leq x_{n-1} \text{ (} x_n \geq x_{n+1} \text{)} \forall n \in \mathbb{N} \text{ (in beiden Fällen heißt Folge } \underline{\text{monoton}} \text{)}.$$

Falls stets „<“ („>“) ist $\{x_n\}$ strikt

Satz 18.23

Sei $\{x_n\}$ in \mathbb{R} monoton und beschränkt.

$$\{x_n\} \text{ konvergiert gegen } x := \begin{cases} \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}, & \text{falls monoton wachsend} \\ \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}, & \text{fallend} \end{cases}$$

Beweis. Sei $\{x_n\}$ monoton wachsend und beschränkt $\Rightarrow x = \sup\{x_n\}$ existiert $\Rightarrow \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists m : x - \varepsilon \leq x_m \leq x_n \leq x \Rightarrow$ Behauptung

Monoton fallend analog □

■ **Beispiel 18.24**

Sei $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$

vollständige Induktion: $x_n > 0$, somit $\{x_n\}$ rekursiv eindeutig definiert

$$\Rightarrow x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}(x_n + \frac{a}{x_n})^2 - a = \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x_n - x_{n+1} = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - a) \geq 0$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ ist mon. fallend, beschränkt $\Rightarrow x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$

$$\text{da } x_{n+1} \cdot x_n = \frac{1}{2}(x_n^2 + a) \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(x^2 + a) \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$$

Fehlerabschätzung: $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2 \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(x_n - \sqrt{a})^2$, so genannte quadratische Konvergenz (schnelle Konvergenz, vgl. Newton-Verfahren), d.h. die Anzahl der signifikanten Dezimalstellen verdoppelt sich mit jedem Schritt!

■ **Beispiel 18.25**

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^n}{n!} = 0$
 betrachte reelle Folge $a_n := \frac{|z^n|}{n!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{|z|}{n+1} a_n$
 $\Rightarrow \exists \tilde{n} : \{a_n\}$ fallend $\left(\frac{|z|}{\tilde{n}+1} < 1\right) \Rightarrow a_n \rightarrow a$
 $\Rightarrow a = 0 \cdot a = 0 \Rightarrow \left|\frac{z^n}{n!} - 0\right| = \frac{|z|^n}{n!} \rightarrow 0 \Rightarrow$ Behauptung

Theorem 18.26 (Bolzano-Weierstraß)

$\{x_n\}$ beschränkte Folge in $\mathbb{R} \Rightarrow \{x_n\}$ hat konvergente TF.

Beweis. es gibt $y_0, y'_0 : y_0 \leq x_n \leq y'_0$

rekursive Definition von $y_n, y'_n \in \mathbb{R}$

$z_{n+1} := \frac{y_n + y'_n}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{unendlich viele } y_n \in [z_{n+1}, y'_n] & y_{n+1} = z_{n+1} \quad y'_{n+1} = y'_n \\ \text{sonst} & y_{n+1} = y_n \quad y'_{n+1} = z_{n+1} \end{cases} \Rightarrow$ Folge $Y_n = [y_n, y'_n]$ ist

Intervallschachtelung in $\mathbb{R} \Rightarrow \exists y \in \bigcap Y_n \Rightarrow y$ ist HW in $\{x_n\} \Rightarrow$ Behauptung □

■ **Beispiel 18.27**

$\{z_n\}$ für $z \in \mathbb{C}, |z| = 1, z \neq 1$: ist divergent, aber $\{\Re(z_n)\}$ und $\{\Im(z_n)\}$ sind beschränkte Folgen in \mathbb{R}

$\Rightarrow \exists$ TF $\{n'\}$ von $\{n\}$ mit $\Re(z^{n'}) \rightarrow \alpha$

$\Rightarrow \exists$ TF $\{n''\}$ von $\{n\}$ mit $\Im(z^{n''}) \rightarrow \beta$

$\Rightarrow z^n \rightarrow \alpha + i\beta \Rightarrow \{z_n\}$ hat konvergente TF in \mathbb{C} !

18.3. Oberer und Unterer Limes

Definition

Seien $\{x_n\}$ beschränkte Folgen in \mathbb{R} .

$H := \{\gamma \in \mathbb{R} \mid \gamma \text{ ist Hw von } \{x_n\}\}$ ($\neq \emptyset$ nach 18.26)

$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup H$
Limes superior von $\{x_n\}$

$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf H$
Limes inferior von $\{x_n\}$

beachte: \limsup und \liminf existieren stets für beschränkte Folgen!

Satz 18.28

Sei $\{x_n\}$ beschränkte Folge in \mathbb{R} . Dann

- 1) Sei $\{x_{n'}\}$ TF mit $x_{n'} \rightarrow \gamma \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \gamma \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$
- 2) $\gamma' := \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $\gamma'' := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ sind **Hw** von $\{x_n\}$
 (folglich) $\inf H = \min H, \sup H = \max H$ und
 \exists TF $\{x_{n'}\}, \{x_{n''}\}, x_{n'} \rightarrow \gamma', x_{n''} \rightarrow \gamma''$
- 3) $x_n \rightarrow \alpha \Leftrightarrow \alpha = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$

Beweis. 1. $x \in H \stackrel{18.9}{\Rightarrow}$ Behauptung

2. $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x \in H \cap B_\varepsilon(x')$

$B_\varepsilon(x')$ offen $\Rightarrow \exists \tilde{\varepsilon} > 0 : B_{\tilde{\varepsilon}}(x') \subset B_\varepsilon(x') \Rightarrow$ unendlich viele x_n in $B_\varepsilon(x') \Rightarrow$ Behauptung für \liminf

3. Übungsaufgabe, Selbststudium □

■ **Beispiel 18.29**

$\{q_n\} \in \mathbb{R}$ sei Folge alle rationalen Zahlen in $(0, 1)$

\Rightarrow Menge aller HW ist $H = [0, 1] \Rightarrow \liminf q_n = 0$ und $\limsup q_n = 1$

18.4. Uneigentliche Konvergenz

Definition (Uneigentliche Konvergenz)

Folge $\{x_n\}$ in \mathbb{R} konvergiert uneigentlich gegen $+\infty(-\infty)$, falls $\forall R > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \geq R(x_n \leq -R) \forall n \geq n_0$

(heißt auch bestimmt divergent) gegen ∞ , „uneigentlich“ wird meist weggelassen.

Notation: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$ bzw. $\xi_n \rightarrow \pm\infty$

■ **Beispiel 18.30**

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n+1} = +\infty$, denn für $R > 0$ gilt: $\frac{n^2+1}{n+1} = \frac{n+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{2} \geq R$ für $n \geq 2R$

Satz 18.31 (Satz von Stolz)

Sei $\{x_n\}, \{y_n\}$ Folgen in $\mathbb{R}, \{y_n\}$ sei stren monoton wachsend, $\{y_n\} \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$, falls rechter Grenzwert existiert (endlich oder unendlich)

Beweis. Grenzwert rechts sei $g \in \mathbb{R}$, oBdA $y_n > 0$.

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow n_0 : |\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} - g| < \varepsilon \Rightarrow (g-\varepsilon) \cdot (y_{n+1}-y_n) \leq x_{n+1}-x_n \leq (g+\varepsilon) \cdot (y_{n+1}-y_n) \stackrel{(*)}{\Rightarrow} (g-\varepsilon)(y_m - y_{n_0}) \leq x_m - x_{n_0} \leq (g+\varepsilon)(y_m - y_{n_0}) \Rightarrow (g-\varepsilon)(1 - \frac{y_{n_0}}{y_m}) \leq \frac{x_m}{y_m} \leq (g+\varepsilon)(1 - \frac{y_{n_0}}{y_m}) + \frac{x_{n_0}}{y_m} \Rightarrow g-\varepsilon \leq \liminf \frac{x_m}{y_m} \leq \limsup \frac{x_m}{y_m} \leq g+\varepsilon \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x_m}{y_m} = g$

(*) $\sum_{n=n_0}^{m-1}$ □

■ **Beispiel 18.32**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{z^n} = 0 \text{ für } z \in \mathbb{C}, |z| > 1, k \in \mathbb{N}_{>0}$$

$$k = 1: \frac{n+1-n}{|z|^{n+1}-|z|^n} = \frac{1}{|z|} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Behauptung}$$

$$k > 1: \frac{n^k}{|z|^n} = \left(\frac{n}{\sqrt[k]{|z|}} \right)^k \rightarrow 0^k = 0 \Rightarrow \text{Behauptung}$$

Satz 18.33

Sei $\{x_n\}$ mit $x_n \rightarrow x$ im normierten Raum X .

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$$

Beweis. Es ist $\|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j - x\| = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|x_j - x\| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|x_j - x\| =: c_n$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n+1} \|x_j - x\| - \sum_{j=1}^n \|x_j - x\|}{n+1-n} = \frac{\|x_{n+1} - x\|}{1} \rightarrow 0 \Rightarrow c_n \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Behauptung} \quad \square$$

19. Vollständigkeit

Definition (Cauchy-Folge)

Folge $\{x_n\}$ im metrischen Raum (X, d) heißt **CAUCHY-Folge (CF)** (Fundamentalfolge), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Satz 19.1

Sei $\{x_n\}$ Folge im metrischen Raum (X, d) . Dann

- 1) $x_n \rightarrow x \Rightarrow \{x_n\}$ ist CAUCHY-Folge
- 2) $\{x_n\}$ CF $\Rightarrow \{x_n\}$ ist beschränkt und hat maximal einen HW.

Beweis. 1. Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow n_0 : d(x_{n_0}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow d(x_{n_0}, x_m) \leq d(x_{n_0}, x) + d(x, x_m) < \varepsilon \Rightarrow$ Behauptung
 2. $\exists n_0 : d(x_n, x_m) < 1 \Rightarrow$ fast alle $x_n \in B_1(x_{n_0}) \Rightarrow$ Folge beschränkt
 Sei g HW: $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ unendlich viele $x_n \in B_\varepsilon(g) \Rightarrow$ fast alle $x_n \in B_\varepsilon(g) \Rightarrow$ nur 1 HW möglich \Rightarrow Behauptung □

Definition (Durchmesser)

Durchmesser von $M \subset X$ beschränkt, $\neq \emptyset$, (X, d) metrischer Raum ist $\text{diam} M := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in M\}$

Folge $\{A_n\}$ von abgeschlossenen Mengen heißt Schachtelung falls $A_n \neq \emptyset$, $A_{n+1} \subset A_n \forall n \in \mathbb{N}$ und $\text{diam} A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Lemma 19.2

Sei $M \subset X$ beschränkt, $\neq \emptyset \Rightarrow \text{diam} M = \text{diam}(\text{cl} M)$.

Beweis. Übungsaufgabe, Selbststudium □

Theorem 19.3

Sei (X, d) metrischer Raum. Dann: für jede Schachtelung A_n in X gilt:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{jede CF in } \{x_n\} \text{ in } X \text{ ist konvergent}$$

Beweis. (\Rightarrow) Sei $\{x_n\}$ CF in X , setze $A_n := \text{cl}\{x_k \mid k \geq n\} \Rightarrow \text{diam} A_n \rightarrow 0$ und $\{A_n\}$ Schachtelung $\Rightarrow \exists x \in \bigcap A_n$

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \text{diam} A_{n_0} < \varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon \Rightarrow x_n \rightarrow x$

(\Leftarrow) Sei $\{A_n\}$ Schachtelung, wähle $x_n \in A_n \Rightarrow x_k \in A_n (k \geq n) \Rightarrow \{x_n\}$ ist CF $\Rightarrow x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in A_n \Rightarrow$ Behauptung □

Lemma 19.4

In \mathbb{R} gilt:

$$\begin{aligned} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset & \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \neq \emptyset \\ \forall \text{ Schachtelungen } \{A_n\} & \quad \forall \text{ Intervallschachtelungen } \{x_n\} \end{aligned}$$

Beweis. (\Rightarrow) trivial

(\Leftarrow) Zeige: jede CF konvergiert in \mathbb{R} , dann folgt die Behauptung aus Theorem 19.3

Sei $\{x_n\}$ CF in \mathbb{R} , $M_n := \{x_k \mid k \geq n\} \Rightarrow X_n := [\inf M_n, \sup M_n]$ Intervallschachtelung in $\mathbb{R} \Rightarrow \exists x \in \bigcap X_n \Rightarrow x_n \rightarrow x \Rightarrow$ Behauptung \square

Definition (Vollständigkeit)

Metrischer Raum (X, d) heißt Vollständig, falls jede CAUCHY-Folge $\{x_n\}$ in X konvergiert.

Vollständiger, normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt BANACH-Raum.

Folgerung 19.5

Sei $\{x_n\}$ Folge im vollständigen metrischen Raum (X, d) . Dann:

$$\{x_n\} \text{ konvergent} \Leftrightarrow \{x_n\} \text{ CAUCHY-Folge}$$

Beweis. vergleiche Definition Vollständigkeit und Satz 19.1 \square

Theorem 19.6

\mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n mit $|\cdot|_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) sind vollständige, normierte Räume (d.h. BANACH-Räume).

Beweis. für \mathbb{R}^n : $\{x_k\}$ mit $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$ CF in \mathbb{R}^n bezüglich $|\cdot|_p$, offenbar $\{x_k\}$ auch CF bezüglich $|\cdot|_\infty \Rightarrow \{x_k^j\}_k$ CF in \mathbb{R} für jedes $j = 1, \dots, n \Rightarrow \{x_k^j\}_k$ konvergiert in $\mathbb{R} \quad \forall j \Rightarrow \{x_k\}$ konvergiert in $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ Behauptung für \mathbb{C} : Zurückführung auf $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ Realteile und Imaginärteile \square

20. Kompaktheit

Definition

Sei (X, d) metrischer Raum, Mengensystem $\mathcal{U} \subset \{U \subset X \mid U \text{ offen}\}$ heißt offene Überdeckung von $M \subset X$, falls $M \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.

Überdeckung \mathcal{U} heißt endlich, falls \mathcal{U} endlich (d.h. $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$).

Menge $M \subset X$ heißt (überdeckungs-)kompakt, falls jede Überdeckung \mathcal{U} eine endliche Überdeckung $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ enthält (d.h. $\exists U_1, \dots, U_n \subset \mathcal{U}$ mit $M \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$).

Menge $M \subset X$ heißt folgenkompakt, falls jede Folge $\{x_n\}$ aus M (d.h. $x_n \in M \forall n$) eine konvergente Teilfolge $\{x_{n'}\}$ mit Grenzwert in M besitzt (d.h. $\{x_n\}$ hat **Hw** in M nach 18.9).

Warnung: existiert endliche offene Überdeckung $\tilde{\mathcal{U}}$ von $M \Rightarrow M$ nicht unbedingt kompakt

Hinweis: Eine Abbildung $A : I \rightarrow X$ nennt man auch Familie mit Indexmenge I und schreibt $\{A_n\}_{i \in I}$ Definition von "kompakt" in Literatur mittels Familien ist gleichwertig.

Theorem 20.1

Sei (X, d) metrischer Raum, $M \subset X$. Dann:

$$M \text{ kompakt} \Leftrightarrow M \text{ folgenkompakt}$$

Beweis.

- (\Rightarrow) Sei $\{x_n\}$ Folge in M , angenommen $\{x_n\}$ hat keinen HW in M
 $\Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0$: nur endlich viele $x_n \in B_{\varepsilon_x}(x) \Rightarrow M$ kompakt \Rightarrow endlich viele $B_{\varepsilon_x}(x)$ überdecken $M \Rightarrow$ nur endlich viele Glieder x_n in $M \Rightarrow$ aber Folge unendlich vieler Glieder $\Rightarrow \{x_n\}$ hat HW in $M \Rightarrow$ Behauptung
- (\Leftarrow) betrachte für $\varepsilon > 0$ fest offene Überdeckung $U_\varepsilon := \{B_\varepsilon(x) \mid x \in M\}$ von M . Angenommen, es gibt keine endliche Überdeckung $U'_\varepsilon \subset U_\varepsilon$ von M
 $\Rightarrow \exists$ Folge $\{x_n\}$ in M : $x_1 \in M$ und $x_{k+1} \in M \setminus \bigcup_{i=1}^k B_\varepsilon(x_i) \Rightarrow d(x_k, x_l) > \varepsilon \Rightarrow \{x_k\}$ hat keinen HW $\Rightarrow M$ folgenkompakt \Rightarrow
- Sei U beliebige offene Überdeckung von M . Angenommen, es gibt keine endliche Überdeckung $U' \subset U$ von M (1)
 nach 2.: $\varepsilon_k := \frac{1}{k}$ gibt es offene Überdeckung U_k von M mit endlich vielen ε_k -Kugeln $\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \forall k \exists x_k \in M$: $B_k := B_{\varepsilon_k}(x_k) \in U_k$ und es gibt keine endliche Überdeckung $U' \subset U$ von $B_k \cap M$ (2)
 $\Rightarrow M$ folgenkompakt \exists TF $x_{k'} \Rightarrow \tilde{x} \in M \Rightarrow \exists \tilde{U} \in U : \tilde{x} \in \tilde{U} \Rightarrow \tilde{U}$ offen $\Rightarrow \exists \tilde{\varepsilon} > 0 : B_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{x}) \subset \tilde{U} \Rightarrow \exists k_0 : d(x_{k_0}, \tilde{x}) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ und $\frac{1}{k} = \varepsilon_{k_0} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \Rightarrow \forall x \in B_{k_0} : d(x, \tilde{x}) \leq d(x, x_{k_0}) + d(x_{k_0}, \tilde{x}) < \tilde{\varepsilon} \Rightarrow B_{k_0} \subset B_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{x}) \subset \tilde{U} \Rightarrow \{\tilde{U}\} \subset U$ ist endliche Überdeckung von $B_{k_0} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \text{falsch} \Rightarrow$ Behauptung \square

Satz 20.2

Sei (X, d) metrischer Raum, $M \subset X$. Dann

- 1) M folgenkompakt $\Rightarrow M$ beschränkt und abgeschlossen
- 2) M folgenkompakt, $A \subset M$ abgeschlossen $\Rightarrow A$ folgenkompakt.

Beweis. 1. angenommen M unbeschränkt $\Rightarrow \exists$ unbeschränkte Folge $\{x_n\}$ in M ohne HW $\Rightarrow \exists$ keine konvergente TF $\Rightarrow M$ beschränkt

Sei $\{x_n\}$ Folge in M mit $x_n \rightarrow x \Rightarrow M$ folgenkompakt $\Rightarrow x \in M \Rightarrow M$ abgeschlossen

2. Sei $\{x_n\}$ Folge in $A \subset X \Rightarrow M$ folgenkompakt $\Rightarrow \exists$ TF $x_{n'} \rightarrow x \in M \Rightarrow A$ abgeschlossen $\Rightarrow x \in A \Rightarrow$ Behauptung \square

Theorem 20.3 (Heine-Borell kompakt, Bolzano-Weierstraß folgenkompakt)

Sei $X = \mathbb{R}^n$ (bzw. \mathbb{C}^n) mit beliebiger Norm, $M \subset X$. Dann

$$M \text{ kompakt} \Leftrightarrow M \text{ abgeschlossen und beschränkt}$$

Warnung: Theorem gilt nicht in beliebigen metrischen Räumen! Betrachte \mathbb{R} mit diskreter Metrik: $[0, 1]$ nicht folgenkompakt, da $\{\frac{1}{n}\}$ keine HW hat.

Beweis. (\Rightarrow) Folgt aus Theorem 20.1 und Satz 20.2

(\Leftarrow) für \mathbb{R}^n : Norm in \mathbb{R}^n ist äquivalent zu $|\cdot|_\infty$

Sei $\{x_k\}$ Folge in M , $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow M$ beschränkt $\Rightarrow \{x_n|_\infty\}$ beschränkt in $\mathbb{R} \Rightarrow \{x_k^j\}$ beschränkt in \mathbb{R} für $j = 1, \dots, n \Rightarrow$ BOLZANO-WEIERSTRASS in \mathbb{R}

$\Rightarrow \exists$ TF $\{x_{k'}\} : x_{k'}^1 \rightarrow x^1$

$\Rightarrow \exists$ TF $\{x_{k''}\} : x_{k''}^2 \rightarrow x^2$, offenbar $x_{k''}^1 \rightarrow x^1$

\vdots

$\Rightarrow \exists$ TF $\{x_{k^*}\} : x_{k^*}^j \rightarrow x^j \quad \forall j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow x_{k^*} \rightarrow x = (x^1, \dots, x^n)$ in $\mathbb{R}^n \Rightarrow M$ abgeschlossen $\Rightarrow x \in M \Rightarrow M$ kompakt \square

Folgerung 20.4

Sei $\{x_n\}$ Folge in $X = \mathbb{R}^n$ (bzw. \mathbb{C}^n). Dann

$$\{x_n\} \text{ beschränkt} \Rightarrow \{x_n\} \text{ hat konvergente TF}$$

Beweis. folgt direkt aus dem Beweis von Theorem 20.3 \square

Satz 20.5

Je 2 Normen aus \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n sind äquivalent.

Beweis. zeige, dass beliebige Norm $\|\cdot\|$ äquivalent zu $|\cdot|_\infty$ ist

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ Standardbasis, dann für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $B = \sum_{j=1}^n \|e_j\| > 0$ gilt: $\|x\| = \|\sum_{j=1}^n x_j \cdot e_j\| \leq \sum_{j=1}^n \|x_j\| \cdot \|e_j\| \leq B \cdot |x|_\infty$ (3)

Sei $a := \inf\{\|x\| \mid x \in S\}$ mit $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_\infty = 1\}$, angenommen, $a = 0 \Rightarrow \exists \{x_k\}$ in $S : \|x_k\| \rightarrow 0$

S beschränkt und abgeschlossen $\Rightarrow \exists$ TF $x_{k'} \rightarrow \tilde{x} \in S \Rightarrow \|\tilde{x}\| \leq \|\tilde{x} - x_k\| + \|x_{k'}\| \leq B|\tilde{x} - x_{k_0}|_\infty + \|x_{k'}\| \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{x} = 0$, da $|0|_\infty = 0 \Rightarrow \cdot \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a \cdot |x|_\infty \leq \|x\| \Rightarrow$ Behauptung \square

21. Reihen

Definition (Partialsomme)

Sei X normierter Raum. $\{x_n\}$ Folge im normierten Raum.

$s_n := \sum_{k=1}^n x_k = x_0 + \dots + x_n$ heißt Partialsomme.

Folge $\{s_n\}$ der Partialsomme heißt (unendliche)Reihe mit Gliedern x_k .

Notation: durch Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = x_0 + \dots = \sum_k x_k = \{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

Existiert der Grenzwert $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, so heißt der Summe der Reihe.

Notation: $s = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$.

Satz 21.1 (Cauchy-Kriterium)

beweis 73 Sei X normierter Raum, $\{x_k\}$ Folge in X . Dann

- 1) $\sum_k x_k$ konvergiert $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \|\sum_{k=n}^m x_k\| < \varepsilon \forall m \geq n \geq n_0$
- 2) falls X vollständiger, normierter Raum, gilt auch \Leftarrow oben.

Beweis. Übungsaufgabe, benutze $\|s_m - s_{n-1}\| = \|\sum_{k=n}^m x_k\|$ □

Folgerung 21.2

Sei X normierter Raum, $\{x_n\}$ Folge in X . Dann:

$\sum_k x_k$ konvergiert $\Rightarrow x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

Beweis. mit $m = n$ □

■ Beispiel 21.3

geometrische Reihe $X = \mathbb{C}$, $a_k := z^k$, $z \in \mathbb{C}$ fest.

$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ divergent, falls $|z| > 1$

■ Beispiel 21.4

harmonische Reihe $X = \mathbb{R}$, $x_k := \frac{1}{k}$ ($k > 1$). Reihe divergiert.

■ Beispiel 21.5

$X = \mathbb{R}$, $x_k = \frac{1}{k(k+1)}$

$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow$ konvergiert gegen 1

Derartige Reihen heißen auch Teleskopreihen: $\sum_{k=0}^{\infty} (y_k - y_{k+1})$. Diese konvertieren genau dann, wenn $\{y_k\}$ konvergiert.

■ Beispiel 21.6

$X = \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \begin{cases} \text{konvergiert,} & \text{für } s > 1 \\ \text{divergiert,} & \text{für } s \leq 1 \end{cases}$$

Summe heißt RIEMANN'sche Zetafunktion $\zeta(s)$ (für $s > 1$). Diese ist beschränkt und konvergent.

Satz 21.7

Sei X normierter Raum, $\{x_n\}, \{y_n\}$ in $X, \lambda, \mu \in K$ (\mathbb{R} oder \mathbb{C}). Dann:

$$\sum_k x_k, \sum_k y_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \lambda x_k + \mu y_k \text{ konvergent gegen } \lambda \sum_k x_k + \mu \sum_k y_k.$$

Beweis. benutze Rechenregeln für Folgen □

Definition

Reihe $\sum_k x_k$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_k \|x_k\|$ konvergiert.

Satz 21.8

Sei X vollständiger, normierter Raum. Dann:

$$\sum_k x_k \text{ absolut konvergent} \Rightarrow \sum_k x_k \text{ konvergent}$$

Beweis. Es ist $\|\sum_{k=n}^m x_k\| \leq \sum_{k=n}^m \|x_k\|$ (1)

$\Rightarrow \tilde{s}_m = \sum_{k=0}^m \|x_k\|$ ist CF in $\mathbb{R} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^m x_k$ ist CF in $X \Rightarrow$ Behauptung □

Satz 21.9 (Konvergenzkriterien für Reihen)

Sei X normierter Raum, $\{x_k\}$ in $X, k_0 \in \mathbb{N}$

1. Sei $\{x_k\}$ Folge in \mathbb{R}

Majorantenkriterium

a) $\|x_k\| \leq \alpha_k \forall k \geq k_0, \sum_k \alpha_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_k \|x_k\| \text{ konvergent}$

b) $0 \leq \alpha_k \leq \|x_k\| \forall k \geq k_0, \sum_k \alpha_k \text{ divergent} \Rightarrow \sum_k \|x_k\| \text{ divergent.}$

2. Sei $x_k \neq 0 \forall k \geq k_0$

Quotientenkriterium

a) $\frac{\|x_{k+1}\|}{\|x_k\|} \leq q < 1 \forall k \geq k_0 \Rightarrow \sum_k \|x_k\| \text{ konvergiert}$

b) $\frac{\|x_{k+1}\|}{\|x_k\|} \forall k \geq k_0 \Rightarrow \sum_k \|x_k\| \text{ divergiert.}$

3.

Wurzelkriterium

a) $\sqrt[k]{\|x_k\|} \leq q < 1 \forall k \geq k_0 \Rightarrow \sum_k \|x_k\| \text{ konvergiert}$

b) $\sqrt[k]{\|x_k\|} \geq 1 \forall k \geq k_0 \Rightarrow \sum_k \|x_k\| \text{ divergent.}$

Beweis. 1. $s_n = \sum_{k=0}^n \|a_k\|$ monoton wachsend

a) $\{s_n\}$ beschränkt \Rightarrow konvergent

b) $\{s_n\}$ unbeschränkt \Rightarrow divergent

2. a) $\|x_k\| \leq q^2 \|x_{k-2}\| \leq \dots \leq q^k \|x_1\| =: a$, da $\sum_{k=0}^m a_k = \|x_k\| \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergent

b) ist $\|x_k\| \not\rightarrow 0 \stackrel{\text{Folgerung 21.2}}{\Rightarrow}$ Behauptung

3. analog zu 2., verwende $\|x_k\| \leq q^k$ □

■ **Beispiel 21.10**

Exponentialreihe $\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ absolut konvergent $\forall z \in \mathbb{C}$.

$e := \exp(1)$ EULER'sche Zahl

■ **Beispiel 21.11**

Potenzreihe : $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ für $z \in \mathbb{C}, a_k \in \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$.

Sei

$$L := \begin{cases} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, & \text{falls existiert} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} \quad R := \frac{1}{L} \quad (\text{mit } 0 = \frac{1}{\infty}, \frac{1}{0} = \infty)$$

$|z - z_0| < R$: absolute Konvergenz,

$|z - z_0| > R$: Divergenz,

$|z - z_0| = R$: i.A. keine Aussage möglich.

$B_R(z_0)$ heißt Konvergenzkreis, R Konvergenzradius

■ **Beispiel 21.12**

p-adische Brüche. Sei $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$: betrachte $0, x_1 x_2 x_3 \dots := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p^{-k}$ für $x_k \in \{0, 1, \dots, p-1\} \forall k \in \mathbb{N}$.

Satz 21.13 (Leibnitz-Kriterium für alternierende Reihen in \mathbb{R})

Sei $\{x_n\}$ monoton fallende Nullfolge in \mathbb{R} . Dann:

alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x_k = x_0 - x_1 + x_2 - \dots$ ist konvergent.

■ **Beispiel 21.14**

Alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ist konvergent
man kann zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = \ln 2$

Frage: Ist die Summationsreihenfolge bei Reihen wichtig?

Antwort: im Allgemeinen nicht.

Definition (Umordnung)

Sei $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektive Abbildung: $\sum_{k=0}^{\infty} x_{\beta(k)}$ heißt Umordnung der Reihe $\sum_k x_k$.

Satz 21.15

Sei X normierter Raum. Dann:

$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = x$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x_{\beta(k)}$ absolut konvergent für jede Umordnung.

Beweis. wegen Konvergenz der Partialsummen: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \sum_{k=n_0}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon$

da $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv $\exists n_1 : \{0, 1, \dots, n_0\} \subset \{b(0), \dots, b(n_1)\} \Rightarrow \|\sum_{k=0}^{\infty} x_k - \sum_{k=0}^m x_{b(k)}\| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon \Rightarrow$

$\sum_{k=0}^m x_{b(k)} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x_k = x$

wegen $\sum_{k=0}^m \|x_{b(k)}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| \Rightarrow$ Umordnung ist absolut konvergent □

Hinweis: Satz ??? ist falsch, falls $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ nicht absolut konvergent

Satz 21.16

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ konvergierende Reihe in \mathbb{R} , die nicht absolut konvergent ist. Dann:

$\forall s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv mit $s = \sum_{k=0}^{\infty} x_{\beta(k)}$

Beweis. für $s \in \mathbb{R}$: Seien x_k^+ und x_k^- positive bzw. negative Glieder \Rightarrow Reihe konvergent $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x_k^{\pm} = \pm \infty$
 summiere nun in folgender Reihenfolge: $x_1^+ + x_2^+ + \dots + x_n^+$ (Summe erstmals $> s$) $+ x_{n+1}^- + x_{n+2}^- \dots$ (Summe
 erstmals $< s$) \Rightarrow Partialsummen schwanken um $s \Rightarrow$ wegen $x_k \rightarrow 0$ konvergiert umgeordnete Reihe gegen s \square

Satz 21.17 (Cauchy-Produkt)

Sei X normierter Raum über \mathbb{K} , $\sum_j x_j$ und $\sum_i \lambda_i$ absolut konvergent in X bzw. \mathbb{K} . $\beta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 bijektiv, $Y_{\beta(i,j)} = \lambda_i x_j \forall i, j \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} Y_l = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \sum_{j=0}^{\infty} x_j$, wobei linke Reihe absolut konvergiert in X .

Spezialfall: $\beta(i, j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$ liefert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \lambda_k x_{k-l} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \sum_{j=0}^{\infty} x_j$$

Beweis. Sei $m(k, l) = \max\{k, l\} = m$ und $\tilde{b}(k, l) = m(k, l)^2 + m(k, l) + k - l = n$

$\Rightarrow m(\tilde{b} - 1, n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \left\| \sum_{l=0}^n y_l - \sum_{i=0}^{m(k,l)} \lambda_i \cdot \sum_{j=0}^{m(k,l)} x_j \right\| \leq \|x_m\| \cdot \sum_{i=0}^m |\lambda_i| + |\lambda_m| \cdot \sum_{j=0}^m \|x_j\| \leq \tilde{\lambda} \cdot \|x_m\| + \tilde{j} \cdot |\lambda_m| \rightarrow 0 \quad (3)$$

$$\sum_{i=0}^m |\lambda_i| \leq \tilde{\lambda}$$

$$\sum_{j=0}^m \|x_j\| \leq \tilde{j}$$

da $\sum_{i=0}^m \lambda_i := \lambda$, $\sum_{j=0}^m x_j := x$ folgt $\sum_{l=0}^n y_l = \lambda \cdot x$ für $l = \tilde{b}(i, j)$ mit $\|y_l\|, |\lambda_i|, |x_j|$ links in (3) folgt absolute
 Konvergenz von $\sum_{l=0}^n y_l \Rightarrow$ Behauptung für beliebige b folgt mit ??? \square

■ **Beispiel 21.18**

$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$, denn

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_2^l}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{z_1^m \cdot z_2^{n-m}}{m! \cdot (n-m)!} \Rightarrow \text{Erweiterung mit } \frac{n!}{n!} \text{ gibt } \binom{n}{m} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \exp(z_1 + z_2)$$

Satz 21.19 (Doppelreihenproposition)

Sei $\{x_{k,l}\}_{k,l \in \mathbb{N}}$ Doppelfolge im BANACH-Raum X und mögen $\sum_{l=0}^{\infty} \|x_{k,l}\| =: \alpha_k \forall k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} x_k =: \alpha$ existieren.

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{l=0}^{\infty} x_{k,l}) = \sum_{l=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{\infty} x_{k,l})$, wobei alle Reihen absolut konvergent sind.

Beweis. • als Konvergenz der Reihen: links klar nach Voraussetzungen

$$\|x_{kl}\| \leq a_k \xrightarrow{\text{Maj.-Krit.}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \|x_{kl}\| := b_l \text{ absolut konvergent } \sum_{l=0}^n \|b_l\| = \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{\infty} \|x_{kl}\| \leq \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{\infty} \|x_{kl}\| \stackrel{\text{Add.}}{\leq}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \|x_{kl}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} b_l \text{ ist absolut konvergent } \Rightarrow \text{Reihen rechts sind absolut konvergent}$$

- Sei nun $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 : \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k < \frac{\varepsilon}{2}, \sum_{l=n_0+1}^{\infty} \|b_l\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{l=0}^{\infty} x_{kl}) - \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n x_{kl} \right\| =: s - s_n \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k + \sum_{l=n_0+1}^{\infty} \|b_l\| < \varepsilon$
 $\Rightarrow s_n \rightarrow s$, analog $s_n \rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_{kl} =: \tilde{s} \Rightarrow s = \tilde{s} \Rightarrow$ Behauptung \square

Kapitel IV

Funktionen und Stetigkeit

34. Funktionen

Definition

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend / wachsend, falls $x < y, x, y \in M \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ bzw. $f(x) \geq f(y)$

Falls rechts stets $<$ bzw. $>$, sagt man auch streng monoton.

Satz 34.1

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton fallend / wachsend.

\Rightarrow inverse Funktion $f^{-1} : \mathcal{R} \rightarrow M$ existiert und ist streng monoton fallend / wachsend.

■ Beispiel 34.2

Allgemeine Potenzfunktion in \mathbb{R} :

$f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^r$ für $r \in \mathbb{R}$ fest.

- $r > 0$: Satz 7.21 $\Rightarrow f$ streng monoton wachsend
- $r < 0$: $x^r = \frac{1}{x^{-r}} \Rightarrow f$ streng monoton fallend

$\stackrel{\text{Satz 1}}{\Rightarrow} f^{-1}$ existiert für $r \neq 0$ auf $(0, \infty)$, wegen $y = (y^{\frac{1}{r}})^r$ ist $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{r}}$

■ Beispiel 34.3

Allgemeine Exponentialfunktion in \mathbb{R} :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^x$ für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ fest.

7.21 \Rightarrow streng monoton wachsend für $a > 1$ bzw. fallend für $a < 1$ (benutze $\frac{1}{a} > 1$)

$\stackrel{\text{Satz 1}}{\Rightarrow} f^{-1}$ existiert auf $(0, \infty)$ für $a \neq 1$. Wegen $y = a^{\log_a y}$ (7.22) ist $f^{-1}(y) = \log_a y$.

■ Beispiel 34.4

Polynom in \mathbb{C} :

Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Polynom, falls $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ für $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ fest.

- $\text{grad} f = n$ falls $a_n \neq 0$
- f ist Nullpolynom, falls $f(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C}$

Notation: $f = 0$

(Menge der Polynome in \mathbb{C} ist ein Vektorraum über \mathbb{C})

Satz 34.5

Seien f, g Polynome mit $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, g(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$. Dann:

- 1) $f, g \neq 0, \text{grad } f \geq \text{grad } g$
 \Rightarrow existieren eindeutig bestimmte Polynome q, r mit $f = q \cdot g + r$, wobei $r \neq 0$ oder $\text{grad } r < \text{grad } g$
- 2) $z_0 \in \mathbb{C}$ Nullstelle von $f \neq 0 \Leftrightarrow f(z) = (z - z_0)q(z)$ für ein Polynom $q \neq 0$ mit $\text{grad } q = \text{grad } f - 1$
- 3) f hat höchstens $\text{grad } f$ Nullstellen falls $f \neq 0$
- 4) $f(z_i) = g(z_j)$ für $n + 1$ paarweise verschiedene Punkte $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{C}, n = \text{grad } f \geq \text{grad } g$
 $\Rightarrow f(z) = g(z) \forall z \in \mathbb{C}$ (d.h.z. $a_k = b_k \forall k$)

Definition

Abbildung $f : X \rightarrow Y, Y$ metrischer Raum heißt beschränkt auf $M \subset X$, falls Menge $f(M)$ beschränkt in Y ist, sonst unbeschränkt.

Definition

$f : X \rightarrow Y$ heißt konstante Funktion, falls $f(x) = a \forall x \in X$ und $a \in Y$ fest.

Definition

$M \subset X, X$ normierter Raum heißt konvex, falls $x, y \in M \Rightarrow tx + (1 - t)y \in M \forall t \in (0, 1)$

$f : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt strikt konvex, falls $f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y) \forall x, y \in D, t \in (0, 1)$

f heißt konkav (bzw. strikt), falls $-f$ (strikt) konvex.

Lineare Funktionen**Definition**

Seien X, Y normierte Räume über K .

$f : X \rightarrow Y$ heißt linear, falls

- f additiv, d.h. $f(a + b) = f(a) + f(b) \forall a, b \in X$ und
- f homogen, d.h. $f(\lambda a) = \lambda f(a) \forall a \in X, \lambda \in K$

$f : X \rightarrow Y$ heißt affin linear, falls $f + f_0$ linear für eine konstante Funktion f_0

Offenbar f linear $\Rightarrow f(0) = 0$

Definition

Lineare Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt beschränkt, falls f beschränkt auf $\overline{B_1(0)}$, d.h.

$$\exists \text{ konstante } c > 0 : \|f(x)\| \leq c \forall x : \|x\| \leq 1 \quad (1)$$

Wegen $\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|} \|f(x)\|$ ist (1) äquivalent zu

$$\|f(x)\| = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in \overline{B_1(0)}\} \quad (1')$$

Satz 34.9

Seien X, Y normierte Räume über K , dann:

$L(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ linear und beschränkt}\}$ ist normierter Raum über K mit $\|f\| = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in B_1(0)\}$

Exponentialfunktion**Definition**

$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

Satz 34.10

Sei $\{z_n\}$ Folge in \mathbb{C} mit $z_n \rightarrow z$. Dann: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \exp(z)$

Lemma 34.11

Sei $z_n \rightarrow 0$ in $\mathbb{C} \Rightarrow \lim \frac{\exp(z_n) - 1}{z_n} = 1$

Satz 34.12

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z_1 + z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2) \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{z}{n}\right) - 1}{\frac{z}{n}} = \gamma \in \mathbb{C} \forall z \in \mathbb{C}$
 $\Rightarrow f(z) = \exp(\gamma z) \forall z \in \mathbb{C}$

Folgerung 34.13

Funktion \exp ist durch obiges Lemma und Satz eindeutig definiert.

Satz 34.14

Es gilt: $e^x = \exp(x) \forall x \in \mathbb{R}$

Definiert (!) in \mathbb{C} : $e^z := \exp(z) \forall z \in \mathbb{C}$ (als Potenz nicht erklärt)

Definition

natürlicher Logarithmus : $\ln x = \log_e x \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$

Trigonometrische Funktion :

- $\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \forall z \in \mathbb{C}$
- $\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \forall z \in \mathbb{C}$

Satz 34.15

Es gilt:

- 1) EULER'sche Formel : $e^{iz} = \cos z + i \sin z$
- 2) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \forall z \in \mathbb{C}$ (beachte: $\nrightarrow |\sin z| \leq 1, |\cos z| \leq 1$, \sin, \cos unbeschränkt auf \mathbb{C})
- 3) $\sin(-z) = -\sin z, \cos z = \cos(-z)$
- 4) (Additionstheoreme)
 - $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z \forall z, w \in \mathbb{C}$
 - $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w \forall z, w \in \mathbb{C}$
- 5) $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z, \cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z \forall z \in \mathbb{C}$
- 6) $\sin z - \sin w = 2 \cos \frac{z+w}{2} - \sin \frac{z+w}{2}$
 $\cos z - \cos w = -2 \sin \frac{z+w}{2} \sin \frac{z-w}{2}$

Satz 34.16Es gilt $\forall x \in \mathbb{R}$:
 $|e^{ix}| = 1, \sin x = \Im e^{ix}, \cos x = \Re e^{ix}$ (insbesondere $\sin x, \cos x \in \mathbb{R}$), somit $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
Lemma 34.17Es gilt in \mathbb{R} :

- 1) \cos streng fallend auf $[0, 2]$
- 2) $\cos 2 < 0$ und $\sin x > 0 \forall x \in (0, 2]$
- 3) $\varphi(x) = \varphi(1) \forall x \in [0, 2]$ und $45 < \varphi(x) < 90$ (d.h. $\varphi(x)$ proportional zu x)
- 4) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ für $\pi := \frac{180\bar{r}}{\varphi(1)}$ ($= 3, 1415 \dots$), $\frac{\pi}{2}$ einzige Nullstelle in $[0, 2]$

Satz 34.19Für alle $z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$ gilt:

- 1) $e^{z+2k\pi i} = e^z$, d.h. Periode $2\pi i$
 $\sin(z + 2k\pi) = \sin z$ (d.h. Periode 2π)
 $\cos(z + 2k\pi) = \cos z$ (d.h. Periode 2π)
- 2) $e^{z+i\pi/2} = ie^z, e^{z+i\pi} = -e^z$
- 3) $\sin(z + \pi) = -\sin z, \cos(z + \pi) = -\cos z$
 $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z, \cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin z$

Satz 34.20Auf \mathbb{C} gilt:

- $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

sin / cos in \mathbb{R}

| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

Definition

$\sin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ streng monoton und surjektiv,

$\cos[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ streng monoton und surjektiv

\Rightarrow Umkehrfunktion existiert: Arcussinus, Arcuscosinus :

- $\arcsin := \sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $\arccos := \cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

Tangens und Cotangents**Definition**

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Offenbar } \tan(z + \pi) &= \frac{\sin(z + \pi)}{\cos(z + \pi)} = \frac{-\sin z}{-\cos z} = \tan z \\ \cot(z + \pi) &= \cot(z) \end{aligned} \right\} \forall z \in \mathbb{C}, \text{ d.h. Periode } \pi$$

Tangens auf \mathbb{R} **Definition**

$$0 \leq x_1 < x_2 < \pi/2 \Rightarrow \tan x_1 = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2} = \tan x_2$$

$$\Rightarrow \tan(-x) = -\tan(x) \Rightarrow \text{streng wachsend auf } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \arctan = \tan^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ existiert.}$$

Satz 34.21

Es gilt:

1) $\Re e(exp) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

2) (Polarkoordinaten auf \mathbb{C})Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert eindeutiges $\gamma \in [0, 2\pi]$ mit $z = |z|e^{i\gamma} = |z|(\cos \gamma + i \sin \gamma)$ (auch $[-\pi, \pi]$)3) (Wurzeln)Für $Z = |z|e^{i\gamma} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, n \geq 2$ gilt: $w^n = z \Leftrightarrow w \in \left\{ \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\gamma}{n} + \frac{2k\pi}{n}} =: w_k \mid k = 1, \dots, n \right\}$ (Lösungen bilden ein regelmäßiges N -Eck auf dem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{|z|}$)**Logarithmen in \mathbb{C}**

(sog. Hauptzweig)

Definition $exp(\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z < \pi\}) \rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist bijektiv \Rightarrow Umkehrabbildung $\ln : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ gilt: $e^{\ln |z| + i\gamma} = |z|e^{i\gamma} = z$ $\Rightarrow \ln z = \ln |z| + i\gamma \forall z = |z|e^{i\gamma} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ $\Rightarrow \ln z$ stimmt auf $\mathbb{R}_{>0}$ mit reellen \ln überein.**Hyperbolische Funktionen****Definition**

- $\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \forall z \in \mathbb{C}$ (Sinus Hyperbolicus)
- $\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \forall z \in \mathbb{C}$ (Cosinus Hyperbolicus)
- $\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ (Tangens Hyperbolicus)
- $\coth(z) = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (Cotangens Hyperbolicus)

Satz 34.22Es gilt $\forall z, w \in \mathbb{C}$

- 1) $\sin h = -i \sin(z), \cos(z) = \cosh(iz), \sinh(-z) = -\sinh(z), \cosh(-z) = \cosh(z)$ (gibt auch Nullstellen vom \sinh / \cosh)
- 2) \sinh, \cosh haben Periode $2\pi i$, \tanh, \coth haben Periode πi
- 3) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
- 4) $\sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$
 $\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w$

Definition

Sei $f_n : X \rightarrow Y$, Y metrischer Raum (X beliebige Menge), $n \in \mathbb{N}$. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Funktionenfolge.

Funktionenfolge $\{f_n\}$ konvergiert punktweise gegen $f : X \rightarrow Y$ auf $M \subset X$, falls $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \forall x \in M$

Funktionenfolge $\{f_n\}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f : X \rightarrow Y$ auf $M \subset X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \forall x \in M$$

Notation: $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ bzw. $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig auf M .

Lemma 34.23

$f_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf $M \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in M$ (d.h. punktweise auf M)

Satz 34.24

Seien $f_n, f \in B(X, Y)$. Dann (X metrischer Raum):

$$f_n \rightarrow f \text{ gleichmäßig auf } X \Leftrightarrow f_n \rightarrow f \text{ in } (B(X, Y), \|\cdot\|_{1\infty})$$

Definition

Sei $f_n : X \rightarrow Y$, Y normierter Raum (X beliebige Menge), $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ heißt Funktionenreihe

Reihe $\sum_n f_n$ heißt punktweise (gleichmäßig) konvergent gegen $f : X \rightarrow Y$ auf $M \subset X$, falls dies für die zugehörige Folge (Partialsumme!) $\{s_n\}$ gilt.

Satz 34.25

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ Potenzreihe in \mathbb{C} mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$ und sei $M \subset B_R(z_0)$ kompakt

\Rightarrow Potenzreihe konvergiert gleichmäßig auf M .

35. Stetigkeit

Definition

Sei stets $f : D \subset X \rightarrow Y$, X, Y metrischer Raum, $D = \mathcal{D}(f) \neq \emptyset, y_0 \in Y$ heißt Grenzwert der Funktion f im Punkt $x_0 \in \overline{D}$, falls gilt:

$$\{x_n\} \text{ Folge in } D \text{ mit } x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow y_0$$

Notation: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$

► Bemerkung 35.2

Falls $x_0 \in D$ isolierter Punkt von D , d.h. kein **HP** von D , dann ist stets $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Satz 35.3 ($\varepsilon\delta$ -Kriterium)

Sei $f : D \subset X \rightarrow Y, x_0 \in \overline{D}$. Dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x_0) \cap D) \subset B_\varepsilon(y_0)$$

Satz 35.4 (Rechenregeln)

1) Sei Y normierter Raum über $\mathbb{R}, f, g : D \subset X \rightarrow Y, \lambda : D \rightarrow K, x_0 \in \overline{D}, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y, g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \tilde{y}, \lambda(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \alpha$. Dann:

- $(f + g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y + \tilde{y}$
- $(\lambda \cdot f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \alpha \cdot y$
- $(\frac{1}{\lambda})(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\alpha}$ falls $\alpha \neq 0$

2) Sei $f : D \subset X \rightarrow Y, g : \tilde{D} \subset Y \rightarrow Z, \mathfrak{Re}(f) \subset \tilde{D}, X, Y, Z$ metrische Räume, $x \in \overline{D}, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y, g(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} z_0$. Dann:
 $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} z_0$

Definition

Für $f : D \subset X \rightarrow Y$ mit $X = \mathbb{R}$ definieren wir einen einseitigen Grenzwert $y_0 \in Y$ heißt linksseitig bzw. rechtsseitig von f im **HP** x_0 von $D \cap (-\infty, x_0)$ bzw. $D \cap (x_0, \infty)$, falls gilt: $x_n \in D \cap (-\infty, x_0)$ bzw. $x_n \in D \cap (x_0, \infty)$ mit $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow y_0$

Notation: $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = y_0 =: f(x_0^-)$ $f(x) \xrightarrow{x \uparrow x_0} y_0$

$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = y_0 =: f(x_0^+)$ $f(x) \xrightarrow{x \downarrow x_0} y_0$

► Bemerkung 35.5

Satz 35.4 gilt sinngemäß auch für einseitige Grenzwerte.

Für $f : D \subset X \rightarrow Y$ mit $X = \mathbb{R}$ bzw. $Y = \mathbb{R}$ heißt der Grenzwert uneigentlich :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = y_0, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

indem wir einen Grenzwert definiert als $x_0 = \pm\infty$ bzw. $y_0 = \pm\infty$ wählen und bestimmte divergenzte Folgen $x_n \rightarrow \pm\infty$ mit $x_n \in D$) bzw. $f(x_n) \rightarrow \pm\infty$ betrachten.

Landau-Symbole

(Vgl. von „Konvergenzgeschwindigkeiten“)

Definition

Sei $f : D \subset X \rightarrow Y$, X metrischer Raum, Y normierter Raum, $g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D}$.

- $f(x)$ ist „klein o“ von $g(x)$ für $x \rightarrow x_0$, falls

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\|f(x)\|}{g(x)} = 0$$

Notation: $f(x) = o(g(x))$ (meist $x \neq x_0$ im „lim“ weggelassen)

- $f(x)$ ist „groß O“ von $g(x)$ für $x \rightarrow x_0$, falls

$$\exists \delta > 0, c \geq 0 : \frac{\|f(x)\|}{|g(x)|} \leq c \quad \forall x \in (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$$

Notation: $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \rightarrow x_0$

Relativtopologie

Definition

Sei (X, d) metrischer Raum, für $D \subset X$ ist (D, d) ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik.

- $M \subset D$ heißt offen bzw. abgeschlossen relativ zu D , falls M offen bzw. abgeschlossen im metrischen Raum (D, d) .
- $M \subset D$ heißt Umgebung von $x \in D$ relativ zu D , falls M Umgebung von x im metrischen Raum (D, d) .

Definition

Sei $f : D \subset X \rightarrow Y$ metrischer Raum, $D = \mathcal{D}(f)$, Fkt. f heißt folgenstetig im Punkt $x_0 \in D$, falls

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0) \quad \forall \text{ Folgen } x_n \rightarrow x_0 \text{ in } D$$

Definition

Funktion f heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls \forall Umgebungen V von $f(x_0) \exists$ Umgebung U von x_0 in $D : f(U) \subset V$.

Interpretation: Input / Output Steuerung besteht Forderung, dass beliebig kleine Output-Toleranzen ε stets durch hinreichend kleine Input-Toleranzen δ erreicht werden können.

Satz 35.11

Sei $f : D \subset X \rightarrow Y$, X, Y metrischer Raum, $x_0 \in D$. Dann:

$$f \text{ stetig in } x_0 \Leftrightarrow f \text{ } \varepsilon\delta\text{-Stetig in } x_0 \Leftrightarrow f \text{ folgenstetig in } x_0$$

Definition

Funktion f heißt stetig (folgen- / $\varepsilon\delta$ -stetig) auf $M \subset D$, falls f stetig (folgen-/ $\varepsilon\delta$ -stetig) in jedem Punkt $x_0 \in M$.

Satz 35.13

Sei $f : D \subset X \rightarrow Y$, X, Y metrische Räume, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) f stetig auf D
- 2) $f^{-1}(V)$ offen in $D \forall V \subset Y$ offen
- 3) $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in $D \forall A \subset Y$ abgeschlossen

Satz 35.14 (Rechenregeln)

- 1) Sei Y normierter Raum über K , $f, g : D \subset X \rightarrow Y, \lambda : D \rightarrow U, f, g, \lambda$ stetig in $x_0 \in D$
 $\Rightarrow f + g, \lambda \cdot f$ stetig in $x_0, \frac{1}{\lambda}$ stetig in x_0 falls $\lambda(x_0) \neq 0$
- 2) Sei $f : D \subset X \rightarrow Y, y : \tilde{D} \subset Y \rightarrow Z, X, Y, Z$ metrischer Raum, f stetig in x_0, g stetig in $f(x_0) \in \tilde{D}$
 $\Rightarrow g \circ f$ stetig in x_0

■ Beispiel 35.18 (Dirichlet-Funktion)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

in keinem $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

Satz 35.19

Sei $f_n, f : D \subset X \rightarrow X, f_n$ stetig in $x_0 \in D, \forall n \in \mathbb{N}, f_n \rightarrow f$ gleichmäßig

$\Rightarrow f$ stetig in x_0

Folgerung 35.20

Falls alle f_n stetig auf $M \subset D$ und $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf M

$\Rightarrow f$ stetig auf M .

Satz 35.21

Sei $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \forall z \in B_r(z_0), R \in (0, \infty]$ Konvergenzradius, $a_k \in \mathbb{C} \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig auf $B_r(z_0)$

Definition

Bijektive Abbildung $f : D \subset X \rightarrow R \subset Y$, X, Y metrische Räume, $D = \mathcal{D}(f)$, $R = \mathcal{R}(f)$ heißt Homöomorphismus, falls f und f^{-1} stetig.

Mengen D und R heißen homöomorph zueinander, falls es einen Homöomorphismus $f : D \rightarrow R$ mit $D = \mathcal{D}(f)$, $R = \mathcal{R}(f)$ gibt.

beachte: Homöomorphismus bildet offene (abgeschlossene) Mengen auf offene (abgeschlossene) Mengen ab.

■ **Beispiel 35.25**

stereographische Projektion

$X = \mathbb{R}^{n+1}$, $X_0 := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$, $N = (0, \dots, 0, 1)$ (Nordpol), $S_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ n -dimensionale Einheitssphäre.

Betrachte $\sigma : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\sigma(x) = N \frac{2}{(x-N)^2} \langle x - N \rangle$ stetig. σ ist Homöomorphismus mit $\sigma^{-1}(y) = N - \frac{2}{(y-N)^2} \langle Y - N \rangle$

Satz 35.26

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und stetig, D Intervall
 $\Rightarrow f^{-1}$ existiert und ist stetig auf $\mathcal{R}(f)$.

Satz 35.28

Sei $f : X \rightarrow Y$ linear, X, Y normierte Räume, $X = \mathcal{D}(f)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) f stetig in x_0
- 2) f ist stetig auf X
- 3) f ist beschränkt

Definition

Funktion $f : D \subset X \rightarrow Y$, X, Y metrische Räume, heißt gleichmäßig stetig auf $M \subset D$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon \quad \forall x, \tilde{x} \in M \text{ mit } d(x, \tilde{x}) < \delta,$$

d.h. f ist $\varepsilon\delta$ -stetig in jedem $\tilde{x} \in M$ und $\delta > 0$ kann unabhängig von $x \in M$ gewählt werden.

Satz 35.29

Sei $f : D \subset X \rightarrow Y$, X, Y metrischer Raum, f stetig auf kompakten $M \subset D$
 $\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig auf M

Definition

Funktion $f : D \subset X \rightarrow Y, X, Y$ metrischer Raum, heißt LIPSCHITZ-stetig auf $M \subset D$, falls LIPSCHITZ-Konstante $L > 0$ existiert mit

$$d(f(x), f(\tilde{x})) \leq Ld(x, \tilde{x}) \quad (\text{L})$$

Spezialfall: X, Y normierte Räume, dann hat L die Form

$$\|f(x) - f(\tilde{x})\| \leq L\|x - \tilde{x}\| \quad \forall x, \tilde{x} \in M \quad (\text{L}')$$

Interpretation: für $X = Y = \mathbb{R}$ fixiere \tilde{x}

- Graph von f liegt im schraffierten Kegel
- muss $\forall \tilde{x} \in M$ gelten mit gleichem L

Satz 35.30

Sei $f : D \subset X \rightarrow Y$ LIPSCHITZ-stetig auf M, X, Y metrische Räume
 $\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig auf M (und damit auch stetig)

Definition (Fortsetzung, Einschränkung)

Funktion $\tilde{f} : D(\tilde{f}) \rightarrow Y$ heißt Fortsetzung (bzw. Einschränkung) von $f : \mathcal{D}(f) \rightarrow Y$ auf $\mathcal{D}(\tilde{f})$ falls $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(\tilde{f})$ (bzw. $\mathcal{D}(\tilde{f}) \subset \mathcal{D}(f)$) und $\tilde{f}(x) = f(x) \forall x \in \mathcal{D}$ (bzw. $\forall x \in \mathcal{D}(\tilde{f})$). Für eine eingeschränkte Funktion f auf $\mathcal{D}(f)$, schreibe $\tilde{f} = f|_{\mathcal{D}(\tilde{f})}$.

Satz 35.33

Sei $f : D \subset X \rightarrow Y$ gleichmäßig stetig auf D , wobei X, Y sind metrische Räume, Y ist vollständig
 \Rightarrow es existiert eindeutige stetige Fortsetzung \tilde{f} von f auf \bar{D} und \tilde{f} ist auf gleichmäßige stetige auf \bar{D} .

► Bemerkung

Falls x_0 kein Häufungspunkt von D ist, so kann man stets stetig auf $D \cup \{x_0\}$ fortsetzen (aber nicht eindeutig).

Folgerung 35.40

Sei $f : D \subset X \rightarrow Y$ linear, stetig, Y vollständig \Rightarrow es existiert eindeutig stetige Fortsetzung von f auf \bar{D} .

36. Anwendung

Sei stets $f : D \subset X \rightarrow Y$, X, Y metrische Räume, $D = \mathcal{D}(f)$.

Satz 36.1

Sei $f : D \subset Y \rightarrow Y$ stetig, $M \subset D$ kompakt $\Rightarrow f(M)$ ist kompakt.

Satz 36.2

Sei $f : D \subset X \rightarrow Y$ stetig, injektiv, D kompakt $\Rightarrow f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ ist stetig.

Theorem 36.3 (Weierstraß)

Sei $f : D \subset X \rightarrow Y$ stetig, X metrischer Raum, $M \subset D$ kompakt, $M \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \exists x_{min}, x_{max} : \begin{cases} f(x_{min}) = \min \{f(x) \mid x \in M\} = \min_{x \in M} f(x), \\ f(x_{max}) = \max \{f(x) \mid x \in M\} = \max_{x \in M} f(x) \end{cases} \quad (1)$$

► Bemerkung 36.4

Theorem 36.3 ist wichtiger Satz für Existenz von Optimallösungen (stetige Funktion besitzt auf kompakter Menge eine Minimum und Maximum). Folglich sind stetige Funktionen auf kompakten Mengen.

Satz 36.5

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ linear, Y normierter Raum $\Rightarrow f$ ist stetig auf \mathbb{R}^n .

Hinweis: Etwas allgemeiner hat man sogar $f : X \rightarrow Y$ linear, X, Y normierte Räume, $\dim X < \infty \Rightarrow f$ ist stetig. (Ist i.a nicht richtig für $\dim X = \infty$.)

Definition (Kurve)

Eine stetige Abbildung $f : I \subset X \rightarrow Y$, wobei I Intervall und Y metrischer Raum ist heißt Kurve in Y (gelegentlich wird auch Menge $f(I)$ als Kurve und f also zugehörige Parametrisierung bezeichnet).

Definition (bogenzusammenhängende Menge)

Menge $M \subset X$, wobei X ist metrische Raum, heißt bogenzusammenhängend (bogenweise zusammenhängend) falls $\forall a, b \in M \exists$ Kurve $f : [a, b] \rightarrow M$ mit $f(\alpha) = a, f(\beta) = b$.

Bemerkung: Eigentlich ist das die Definition für Wegzusammenhängend, leider ist das in der Literatur nicht eindeutig und manchmal wird zwischen Wegzusammenhängend und zusammenhängend noch das „echt“ bogenzusammenhängend unterschieden.

Definition (zusammenhängende Menge)

Menge $M \subset X$ heißt zusammenhängend, falls

$$A, B \subset M \text{ sind offen in } M, \text{ disjunkt, } \emptyset \Rightarrow M \neq A \cup B. \quad (2)$$

■ **Beispiel 36.6**

- 1) $x \in [0, 2\pi] \rightarrow (x, \sin x) \in \mathbb{R}^2$ ist Kurve in \mathbb{R}^2
- 2) $x \in [0, 1] \rightarrow e^{i\pi x} \in \mathbb{C}$ oder $x \in [0, \pi] \rightarrow e^{ix} \in \mathbb{C}$ sind Kurven in \mathbb{C}
- 3) Sei Y normierter Raum, $a, b \in Y, f : [0, 1] \rightarrow Y$ mit $f(t) = (1-t) \cdot a + t \cdot b$ ist Kurve (Strecke von a nach b)

■ **Beispiel 36.7**

Sei $X = \mathbb{R}^2, M = \{(x, \sin x) \mid x \in (0, 1]\} \cup \{(0, 0)\}$. Dann ist M zusammenhängend aber nicht bogenzusammenhängend.

Satz 36.9

Sei X metrischer Raum, $M \subset X$. Dann

- 1) $X = \mathbb{R} : M$ ist zusammenhängend $\Leftrightarrow M$ ist Intervall (offen, abgeschlossen, halboffen, beschränkt, unbeschränkt).
- 2) M ist bogenzusammenhängend $\Rightarrow M$ ist zusammenhängend.
- 3) Sei X normierter Raum, dann: M ist offen, zusammenhängend $\Rightarrow M$ ist bogenzusammenhängend.

Definition (Gebiet)

Sei X metrischer Raum, $M \subset X$ heißt Gebiet falls M offen und zusammenhängend ist.

Beachte: Gebiet in einem normiertem Raum ist sogar bogenzusammenhängend.

Offenbar: $M \subset X$ ist konvex $\Rightarrow M$ ist bogenzusammenhängend.

Satz 36.10

Sei $f : D \subset X \rightarrow Y$ stetig, wobei X, Y metrische Räume sind, dann gilt: $M \subset D$ ist zusammenhängend $\Rightarrow f(M)$ ist zusammenhängend.

Theorem 36.11 (Zwischenwertproposition)

Sei $f : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}, M \subset D$ zusammenhängend, $a, b \in M \Rightarrow f$ nimmt auf M jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

■ **Beispiel 36.13**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig mit $f([a, b]) \subset [a, b] \Rightarrow$ besitzt Fixpunkt, d.h. $\exists x \in [a, b] : f(x) = x$.

Theorem 36.14 (Fundamentalproposition der Algebra)

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ Polynom vom Grad $n \geq 1$ (d.h. $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0, a_j \in \mathbb{C}, a_n \neq 0, n \geq 1$) $\Rightarrow f$ besitzt (mindestens eine) Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ (d.h. $f(z_0) = 0$).

Folgerung 36.15

Jedes Polynom $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ von Grad $n, f \neq 0$ besitzt genau n Nullstellen in \mathbb{C} gezählt mit

Vielfachen, d.h. $\exists z_1, \dots, z_l \in \mathbb{C}$, paarweise verschieden (=verschieden) $k_1, \dots, k_l \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $k_1 + \dots + k_l = n$ und $f(z) = a_n \cdot (z - z_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (z - z_l)^{k_l} \forall z \in \mathbb{C}$. Hier heißt k_j Vielfachheit der Nullstelle z_j .

Hinweis: In dem Satz 34.5 wurde gezeigt, dass f höchstens n Nullstellen besitzt.

Definition (analytische Funktion)

Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt analytisch auf $B_R(z_0) \subset \mathbb{C}$ falls f auf $B_R(z_0)$ durch Potenzreihe in z_0 darstellbar ist, d.h.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \forall z \in B_R(z_0).$$

Satz 36.16

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch auf $B_R(z_0)$ und sei $B_r(z_1) \subset B_R(z_0)$ für $z_1 \in B_R(z_0), r > 0 \Rightarrow f$ ist analytisch auf $B_r(z_1)$.

Satz 36.17 (Identitätsproposition)

Seien $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch auf $B_R(z_0)$, sei $z_n \rightarrow \tilde{z}, z_n \in B_R(z_0) \setminus \{\tilde{z}\}$ und $f(z_n) = g(z_n) \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(z) = g(z) \forall z \in B_R(z_0)$.

► Bemerkung 36.18

Analytische Funktionen sind durch Werte auf „sehr kleinen“ Mengen bereits festgelegt (z.B. \exp, \sin, \cos sind auf \mathbb{C} eindeutig durch Werte auf \mathbb{R} festgelegt).

Überblick

Sei X metrischer Raum, Y normierter Raum.

- $B(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid \|f\|_{\infty} < \infty\}$ ist normierter Raum der beschränkten Funktionen mit $\|f\|_{\infty} = \sup\{\|f\|_Y \mid x \in X\}$.
- $C_b(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid \|f\|_{\infty} < \infty, f \text{ stetig}\}$ ist Menge der beschränkten stetigen Funktionen und offenbar ein linearer Unterraum von $B(X, Y)$ und damit auch Kern von R mit $\|\cdot\|_{\infty}$.
- $C(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ stetig}\}$, Menge der stetigen Funktionen ist offenbar ein Vektorraum (enthält unbeschränkte Funktionen, z.B. $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $x \in X = (0, 1)$).

► Bemerkung 36.20

Falls X kompakt ist, dann kann man den Ausdruck $\|f\|_{\infty} < \infty$ in der Definition von $C_b(X, Y)$ weglassen (vgl. Theorem 36.3), d.h. $C_b(X, Y) = C(X, Y)$, f stetig $\Rightarrow X \rightarrow \|f(x)\|$ ist stetig $\stackrel{\text{Theorem 15.3}}{\Rightarrow} f$ ist beschränkt auf X . In diesem Fall ist auch $C(X, Y)$ mit $\|\cdot\|_{\infty}$ normierter Raum und $\|f\|_{\infty} = \max_{x \in M} \|f(x)\|_Y$.

Satz 36.21

Sei X metrischer Raum, Y Banachraum $\Rightarrow B(X, Y)$ und $C_b(X, Y)$ sind Banachräume (mit $\|\cdot\|_{\infty}$).

Definition (Kontraktion)

Funktion $f : D \subset X \rightarrow X$, wobei X metrischer Raum ist, heißt Kontraktion (bzw. kontraktiv) auf $M \subset D$ falls

$$\exists L, 0 \leq L < 1: d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in M.$$

D.h. f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$, folglich ist f auch stetig.

Theorem 36.22 (Banacherscher Fixpunktproposition)

Sei $f : D \subset X \rightarrow Y$ Kontraktion auf $M \subset D, X$ vollständiger metrischer Raum (z.B. Banachraum), M abgeschlossen und $f(M) \subset M$. Dann

- (1) f besitzt genau einen Fixpunkt \tilde{x} auf M (d.h. \exists genau ein $\tilde{x} \in M: f(\tilde{x}) = \tilde{x}$).
- (2) Für $\{x_n\}$ in M mit $x_{n+1} = f(x_n), x_0 \in M$ (beliebig) gilt:

$$x_n \rightarrow \tilde{x} \text{ und } d(x_n, \tilde{x}) \leq \frac{L^n}{1-L} \cdot d(x_0, x_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Theorem 36.22 ist eine wichtige Grundlage für Iterationsverfahren in der Numerik.

Partialbruchzerlegung**Definition (Pol der Ordnung k)**

Sei $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ rationale Funktion, d.h. $R(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ für Polynome f, g existieren mit

$$R(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{(z - z_0)^k \cdot \tilde{g}} \quad \text{und} \quad \tilde{f}(z_0) \neq 0, \tilde{g}(z_0) \neq 0.$$

Motivation: Gelgentlich ist gewisse additive Zerlegung von rationalen Funktionen wichtig (Integration) z.B.

$$\frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2x}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 1}.$$

Lemma 36.23

Sei $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ rationale Funktion, $z_0 \in \mathbb{C}$ Pol der Ordnung $k \geq 1 \Rightarrow \exists! a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}, a_k \neq 0$ und $\exists!$ Polynom \tilde{p} mit

$$R(z) = \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{(z - z_0)^i} + \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{g}(z)} = H(z) + \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{g}(z)} \quad (3)$$

$H(z)$ heißt Hauptteil von R in z_0 . Beachte das $\frac{\tilde{p}}{\tilde{g}}$ keine Pole in z_0 hat.

Satz 36.24 (Partialbruchzerlegung)

Sei $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ rationale Funktion, $R(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ für Polynome f, g . Sei $g(z) = \prod_{i=1}^l (z - z_i)^{k_i}$ gemäß Fundamentalproposition der Algebra (Theorem 36.14). Seien z_1, \dots, z_l keine Nullstellen von f und seien H_1, \dots, H_l Hauptteile von R in $z_1, \dots, z_l \Rightarrow$

$$\exists \text{ Polynom } p : R(z) = H_1(z) + \dots + H_l(z) + p(z) \quad \forall z \neq z_j \forall j = 1, \dots, l$$

wobei $f(z) = p(z) \cdot g(z) + r(z) \forall z$ für Polynom r . $p = 0$ falls $\text{grad}(f) < \text{grad}(g)$ (vgl Satz 34.5 Polynomdivision)

Teil B

2. Semester

Kapitel V

Differentiation

52. Wiederholung und Motivation

Sei K^n n -dim. **Vektorraum (VR)** über Körper mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.

- Elemente sind alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ mit $x_1, \dots, x_n \in K$.
- Standardbasis ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ mit $e_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)$
- alle Normen auf K^n sind äquivalent (Satz 20.5)
 \Rightarrow Konvergenz unabhängig von der Norm

Verwende in der Regel euklidische Norm $\|x\|_2 = |x| = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$

- Skalarprodukt

$$- \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j \text{ in } \mathbb{R}^n$$

$$- \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j \cdot y_j \text{ in } \mathbb{C}^n$$

- CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung ($|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in K^n$)

52.1. Lineare Abbildungen

Eine lineare Abbildung ist homogen und additiv (siehe Abschnitt 34).

- Lineare Abbildung $A : K^n \rightarrow K^m$ ist darstellbar durch $m \times n$ -Matrizen bezüglich der Standardbasis (beachte: A sowohl Abbildung als auch Matrix)
 - lineare Abbildung ist stetig auf endlich-dimensionalen Räumen (unabhängig von der Norm, siehe Satz 36.5)
 - transponierte Matrix: $A^T \in K^{n \times m}$
- Hinweis: $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ idR platzsparender als Zeilenvektor geschrieben, aber bei Matrix-Multiplikation x Spalten-Vektor, x^T Zeilenvektor, d.h.

$$x^T \cdot y = \langle x, y \rangle,$$

falls $m = n$

$$x \cdot y^T = x \otimes y \in K^{m \times n},$$

sog. Tensorprodukt

- $L(K^n, K^m) = \{A : K^n \rightarrow K^m, A \text{ linear}\}$ (Menge der linearen Abbildung, ist normierter Raum)
 - $\|A\| = \sup\{|Ax| \mid |x| \leq 1\}$ (Operatornorm, $\|A\|$ hängt i.A. von Normen auf K^n, K^m ab)

- $L(K^n, K^m)$ ist isomorph zu $K^{m \times n}$ als **VR**
 $\Rightarrow L(K^n, K^m)$ ist $m \cdot n$ -dim. **VR** (\Rightarrow alle Normen äquivalent, \Rightarrow Konvergenz von $\{A_n\}$ von linearer Abbildungen in $L(K^n, K^m)$ ist normunabhängig)

Nehmen in der Regel statt $\|A\|$ euklidische Norm $|A| = \sqrt{\sum_{k,l} |a_{kl}|^2}$.

Es gilt:

$$|Ax| \leq \|A\| \cdot |x| \text{ und } |Ax| \leq |A| \cdot |x|$$

- Abbildung $\tilde{f} : K^n \rightarrow K^m$ heißt affin linear, falls $\tilde{f}(x) = Ax + a$ für lineare Abbildung $A : K^n \rightarrow K^m, a \in K^m$

52.2. Landau-Symbole

Anmerkung

Eine Approximation besitzt zwangsläufig immer einen Fehler. Eine gute Approximation zeichnet sich dadurch aus, dass der Fehler bzw. Rest möglichst klein wird. Dieser Fehler wird mit LANDAU-Symbolen beschrieben. Dabei bedeutet anschaulich:

- $f = o(g)$: f wächst langsamer als g
- $f = \mathcal{O}(g)$: f wächst nicht wesentlich schneller als g

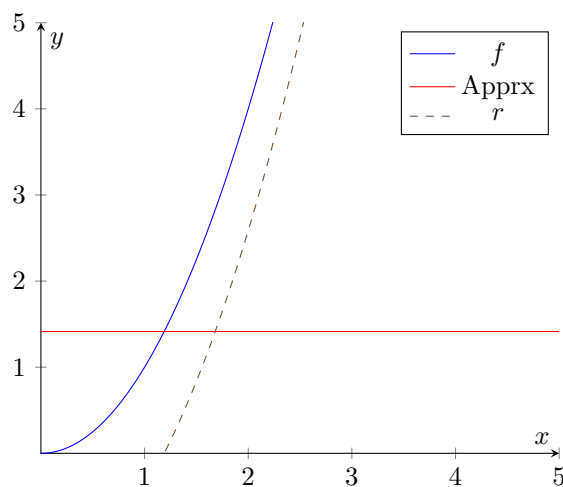
Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m, g : D \subset K^n \rightarrow K, x_0 \in \overline{D}$. Dann:

- $f(x) = o(g(x))$ für $x \rightarrow x_0$ **gdw.** $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$
- $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \rightarrow x_0$ **gdw.** $\exists \delta > 0, c \geq 0 : \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq c \forall x \in (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$
wichtiger Spezialfall: $g(x) = |x - x_0|^k, k \in \mathbb{N}$

■ Beispiel 52.1 (gute Approximation durch konstante Funktion nahe $x = x_0$)

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m, x_0 \in D$ **HP** von D . Dann:

$$\begin{aligned} f \text{ stetig in } x_0 &\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0) \\ &\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{f(x) = f(x_0) + o(1)} \text{ für } x \rightarrow x_0 \end{aligned} \quad (1)$$



Interpretation von (1): Setze $r(x) := f(x) - f(x_0)$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} r(x) = o(1) \text{ für } x \rightarrow x_0$$

$$\Rightarrow r(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0, \quad (2)$$

d.h. $o(1)$ ersetzt eine „Rest-Funktion“ $r(x)$ mit Eigenschaft (2).

Anmerkung

Man kann als Approximation auch $x = 3$ wählen, allerdings stimmt dann die Aussage $r \rightarrow 0$ für $x \rightarrow x_0$ nicht mehr.

Wegen $o(1) = o(|x - x_0|^0)$ (d.h. $k = 0$) sagt man auch, Gleichung (1) ist die Approximation 0. Ordnung der Funktion f in der Nähe von x_0 .

■ Beispiel 52.2 (gute Approximation durch (affin) lineare Funktion nahe $x = x_0$)

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, D offen. Was bedeutet

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + A(x - x_0)}_{\tilde{f} \text{ affin lineare Funktion}} + o(|x - x_0|), \quad x \rightarrow x_0? \quad (3)$$

Zentrale Frage: Wie sollte ein guter Rest sein?

graph \tilde{f} ist die n -dimensionale Ebene in K^{n+m} (affin-lin. UR)

graph f sollte sich an diese Ebene anschmiegen (graph \tilde{f} =Tangentialebene)

\Rightarrow Rest sollte sich an den Grafen der Nullfunktion anschmiegen

Sei

$$g(t) = \sup_{|x-x_0| \leq t} |r(x)| \Rightarrow |r(x)| \leq g(|x - x_0|) \quad \forall x \quad (4)$$

anschmiegen: $g(t) = o(1), t \rightarrow 0$ nicht ausreichend

angenommen $g(t) = o(t), t \rightarrow 0$: dann ist für ein festes $v \in K^n$ mit $\|v\| = 1$

$$|r(x_0 + tv)| \leq g(t) \Rightarrow \frac{|r(x_0 + tv) - r(x_0)|}{t} \leq \frac{g(t)}{t} \rightarrow 0$$

\Rightarrow anschmiegen

Wegen Gleichung (4) folgt: $\frac{|r(x)|}{|x-x_0|} \leq \frac{g(|x-x_0|)}{|x-x_0|} \rightarrow 0$

$\Rightarrow r(x) = o(|x - x_0|)$ für $x \rightarrow x_0 = o(1)|x - x_0|$

\Rightarrow betrachte \tilde{f} als gute lineare Approximation von f nahe $x = x_0$ falls Fehler = $f(x) - (f(x_0) + A(x - x_0)) = o(|x - x_0|)$ für $x \rightarrow x_0$

man sagt: Fehler wird schneller kleiner als $|x - x_0|!$ \tilde{f} heißt Approximation 1. Ordnung von f in x_0

Definition (Anschmiegen)

$$f(x) + \underbrace{f(x_0) + A(x - x_0)}_{\tilde{A}(x)} = o(|x - x_0|),$$

d.h. die Abweichung wird schneller klein als $|x - x_0|!$

☺ Vielleicht hatten Sie eine andere Vorstellung von “anschmiegen“, aber wir machen hier Mathematik ☺

Satz 52.3 (Rechenregeln für Landau-Symbole)

Für $r_k, \tilde{r}_l, R_l : D \subset K^n \rightarrow K^m, x_0 \in D, k, l \in \mathbb{N}$ mit

$$r_k(x) = o(|x - x_0|^k), \tilde{r}_l = o(|x - x_0|^l), R_l(x) = \mathcal{O}(|x - x_0|^l), x \rightarrow x_0$$

1. $r_k(x) = o(|x - x_0|^j) = \mathcal{O}(|x - x_0|^j) \quad j \leq k$
 $R_l(x) = o(|x - x_0|^j) = \mathcal{O}(|x - x_0|^j) \quad j < l$
2. $\frac{r_k(x)}{|x-x_0|^j} = o(|x - x_0|^{k-j}) \quad j \leq k$
 $\frac{R_l(x)}{|x-x_0|^j} = \mathcal{O}(|x - x_0|^{l-j}) = o(|x - x_0|^{l-j-1}) \quad j \leq l$
3. $r_k(x) \pm \tilde{r}_l(x) = o(|x - x_0|^k) \quad k \leq l$
4. $r_k(x) \cdot \tilde{r}_l(x) = o(|x - x_0|^{k+l}), r_k(x) \cdot R_l(x) = o(|x - x_0|^{k+l})$

Beweis. Sei $\frac{|R_l(x)|}{|x-x_0|^l} \leq c$ nahe x_0 , d.h. auf $(B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$ für ein $\delta > 0$

1. $\frac{r_k(x)}{|x-x_0|^j} = \frac{r_k(x)}{|x-x_0|^k} |x - x_0|^{k-j} \rightarrow 0$, folgl. $\frac{r_k(x)}{|x-x_0|^\delta}$ auch beschränkt nahe x_0
 $\frac{R_l(x)}{|x-x_0|^j} = \frac{R_l(x)}{|x-x_0|^l} |x - x_0|^{l-j} \rightarrow 0$, Rest wie oben
2. $\frac{r_k(x)}{|x-x_0|^j |x-x_0|^{k-j}} = \frac{r_k(x)}{|x-x_0|^k} \rightarrow 0$
 $\frac{R_l(x)}{|x-x_0|^j |x-x_0|^{l-j}} = \frac{R_l(x)}{|x-x_0|^l} \leq c$ nahe x_0 , Rest wie oben
3. $\frac{r_k(x)}{|x-x_0|^k} \pm \frac{\tilde{r}_l(x)}{|x-x_0|^k} \stackrel{(2)}{=} o(1) \pm \underbrace{o(|x - x_0|^{l-k})}_{o(1)} \rightarrow 0$
4. $\frac{r_k(x) \cdot \tilde{r}_l(x)}{|x-x_0|^{k+l}} = \frac{r_k(x)}{|x-x_0|^k} \cdot \frac{\tilde{r}_l(x)}{|x-x_0|^l} \rightarrow 0$
 $\frac{r_k(x) \cdot R_l(x)}{|x-x_0|^{k+l}} = \frac{|r_k(x)|}{|x-x_0|^k} \cdot \frac{|R_l(x)|}{|x-x_0|^l} \rightarrow 0$ □

■ **Beispiel 52.4**

- offenbar in $K^n: |x - x_0|^k = \mathcal{O}(|x - x_0|^k) = o(|x - x_0|^{k-1}), x \rightarrow x_0$

- sei $f : D \subseteq K^n \rightarrow K^m$ stetig in $x_0 \in D$, dann gilt für $x \rightarrow x_0$
 - $f(x) \cdot o(|x - x_0|^k) = (f(x_0) + o(1)) \cdot o(|x - x_0|^k) = o(|x - x_0|^k)$
 - $\frac{1}{f(x)+o(1)} = \frac{1}{f(x)} + o(1) = \frac{1}{f(x_0)} + o(1)$, da alle Terme gegen $\frac{1}{f(x_0)}$ konvergieren.
beachte: $o(1)$ steht jeweils für verschiedene Funktionen mit dieser Eigenschaft
- in \mathbb{R} gilt für $x \rightarrow 0$:
 - $x^5 = o(|x|^4)$, $x^5 = o(|x|)$, $x^5 = \mathcal{O}(|x|^5)$, $x^5 = \mathcal{O}(|x|^3)$
 - $e^x = \mathcal{O}(1) = 3 + \mathcal{O}(1)$, $e^x = 1 + o(1) \neq 2 + o(1)$
 - $\sin(x) = \mathcal{O}(|x|)$, $\sin(x) = o(1)$, $x^3 \cdot \sin(x) = o(|x|^3)$, $e^x \cdot \sin(x) = o(1)$
 - $(1 - \cos(x))x^2 = \mathcal{O}(|x|^2)x^2 = o(|x|^3)$
 - $\frac{1}{o(1)+\cos(x)} = e^x + o(1) = 1 + o(1)$

53. Ableitung

Definition (differenzierbar, Ableitung)

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow K^m$, D offen, heißt differenzierbar in $x \in D$, falls es lineare Abbildung $A \in L(K^n, K^m)$ gibt mit

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(|x - x_0|), x \rightarrow x_0} \quad (1)$$

Abbildung A heißt dann Ableitung von f in x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bzw. $Df(x_0)$ bezeichnet (statt dem Terminus Ableitung auch (totales) Differential, FRECHET-Abbildung, JACOBI-Matrix, Funktionalmatrix).

Andere Schreibweisen: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$, $\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0}$, $df(x_0), \dots$

Somit ist Gleichung (1) gleichwertig mit

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), \text{ für } x \rightarrow x_0} \quad (2)$$

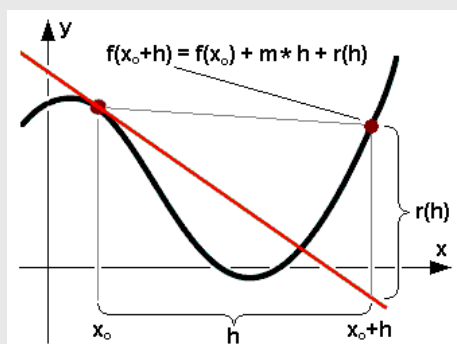
Anmerkung

Eine andere Erklärung der oben stehenden Definition wäre folgende:

Eine Funktion f ist genau dann differenzierbar an der Stelle x_0 , wenn eine reelle Zahl m (die von x_0 abhängen darf) und eine (ebenfalls von x_0 abhängige) Funktion r (Fehler der Approximation) mit folgenden Eigenschaften existieren:

- $f(x_0 + h) = f(x_0) + m \cdot h + r(h)$
- Für $h \rightarrow 0$ geht $r(h)$ schneller als linear gegen 0, d.h. $\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$

Die Funktion f lässt sich also in der Nähe von x_0 durch eine lineare Funktion g mit $g(x_0 + h) = f(x_0) + m \cdot h$ bis auf den Fehler $r(h)$ approximieren. Den Wert m bezeichnet man als Ableitung von f an der Stelle x_0 .



Anmerkung

Neben der oben genannten Definition gibt es noch eine weitere Definition, die sich des Differentialquotienten bedient:

$$f \text{ differenzierbar in } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ existiert}$$

Diese Definition lässt sich im Kontext komplexer oder mehrdimensionaler Funktionen nicht anwenden, zudem sind Beweise wegen des Quotienten leichter zu führen.

► Bemerkung

Affin lineare Abbildung $\tilde{A}(x) := f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ approximiert die Funktion f in der Nähe von x_0 und heißt Linearisierung von f in x_0 (man nennt Gleichung (1) auch Approximation 1. Ordnung von f in der Nähe von x_0).

Satz 53.1

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen. Dann:

f ist differenzierbar in $x_0 \in D$ mit Ableitung $f'(x_0) \in L(K^n, K^m)$ **gdw.** eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r(x) \quad \forall x \in D & (3) \\ &\text{für ein } r : D \rightarrow K^m \text{ mit } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{r(x)}{|x - x_0|} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + R(x)(x - x_0) \quad \forall x \in D & (4) \\ &\text{für ein } R : D \rightarrow L(K^n, K^m) (\cong K^{m \times n}) \text{ mit } \lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0 \text{ (d.h. Matrizen } R(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \\ &\text{Nullmatrix in } K^{m \times n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) &= f(x_0) + Q(x)(x - x_0) \quad \forall x \in D & (5) \\ &\text{für ein } Q : D \rightarrow L(K^n, K^m) (\cong K^{m \times n}) \text{ mit } \lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = f'(x_0) \text{ (d.h. Matrizen } Q(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \\ &\text{Matrix } f'(x_0) \text{ in } K^{m \times n}) \end{aligned}$$

► Bemerkung

Es gilt:

$$\text{Gleichung (3)} \iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

Beweis. Aussage **a)** ist leicht zu zeigen, anschließend erfolgt per Ringschluss die Äquivalenz der anderen Definitionen.

zu a) Offensichtlich ist $r(x) = o(|x - x_0|)$, $x \rightarrow x_0$
 \Rightarrow **a)** $\Leftrightarrow f$ ist differenzierbar in x_0 mit Ableitung $f'(x_0)$

Ringschluss:

a) \Rightarrow b): Sei $R : D \rightarrow K^{m \times n}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} R(x) &= \begin{cases} 0, & x = x_0 \\ \frac{r(x)}{|x-x_0|} \otimes (x-x_0)^T, & x \neq x_0 \end{cases} \\ \Rightarrow R(x)(x-x_0) &= \left(\frac{r(x)}{|x-x_0|^2} \otimes (x-x_0)^T \right) \cdot (x-x_0) \\ &= \frac{r(x)}{|x-x_0|^2} \cdot \langle x-x_0, x-x_0 \rangle = r(x) \quad \forall x \neq x_0 \end{aligned}$$

Wegen $0 = r(x_0) = R(x_0) \cdot (x-x_0)$ folgt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} |R(x)| = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{|r(x) \otimes (x-x_0)^T|}{|x-x_0|^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{|r(x)|}{|x-x_0|} = 0$$

b) \Rightarrow c): Setzte $Q(x) := f'(x_0) + R(x) \forall x \in D \Rightarrow$ Gleichung (5). Wegen $\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = f'(x_0)$ folgt c).

c) \Rightarrow a): Setzte $r(x) := (Q(x) - f'(x_0)) \cdot (x-x_0) \forall x \in D \Rightarrow$ Gleichung (3). Wegen $|r(x)| \leq |Q(x) - f'(x_0)| \cdot |x-x_0|$ folgt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{|r(x)|}{|x-x_0|} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} |Q(x) - f'(x_0)| = 0$$

□

Satz 53.2

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann:

- 1) f ist stetig in x_0
- 2) Die Ableitung $f'(x_0)$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis. 1. Sei $A, \tilde{A} \in L(K^n, K^m)$ Ableitungen von f in x_0 , betrachte $x = x_0 + ty$, wobei $y \in K^n$ mit $|y| = 1$ fest, $t \in \mathbb{R}_{>0}$ (offenbar $|x-x_0| = t$)

$$\Rightarrow (A - \tilde{A})(ty) = o(|ty|) \Rightarrow (A - \tilde{A})(y) = \frac{o(t)}{t} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow (A - \tilde{A})(y) = 0 \Rightarrow A - \tilde{A} = 0 \Rightarrow A = \tilde{A} \Rightarrow \text{Behauptung}$$

2. $\lim f(x) = 1 = \lim (f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|)) = f(x_0) \Rightarrow$ Behauptung □

53.1. Spezialfälle für $K = \mathbb{R}$

1) $m = 1$: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$f'(x_0) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ist Zeilenvektor, $f'(x_0)$ betrachtet als Vektor im \mathbb{R}^n auch Gradient genannt.

Offenbar gilt $f'(x_0) \cdot y = \langle f'(x_0), y \rangle \forall y \in \mathbb{R}^n$ (Matrizenmultiplikation = Skalarprodukt)

\Rightarrow Gleichung (4) hat die Form

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \langle f'(x_0), x-x_0 \rangle}_{\text{affin lineare Funktion: } \tilde{A}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ (in } x)} + o(|x-x_0|) \quad (6)$$

Graph von f ist Fläche im $\mathbb{R}^{n \times 1}$, genannt Tangentialebene vom Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$.

2) $n = 1$: $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

f (bzw. Bild $f[D]$) ist Kurve im \mathbb{R}^n ($\cong \mathbb{R}^{m \times 1}$). Gleichung (4) kann man schreiben als

$$\begin{aligned} f(x_0 + t) &= \underbrace{f(x_0) + t \cdot f'(x_0)}_{\text{Affin lineare Abb. } \tilde{A}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ (in } t)} + o(t), t \rightarrow 0, t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}}_{\text{Differenzenquotient von } f \text{ in } x_0} &= f'(x_0) + o(1), t \rightarrow 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}}_{\text{Differentialquotient}} &= f'(x_0) \end{aligned} \quad (7)$$

beachte:

- f **differenzierbar (diffbar)** in $x_0 \Leftrightarrow$ Differentialquotient existiert in x_0
- Gleichung (7) nicht erklärt im Fall von $n > 1$

Interpretation für $m > 1$:

$f'(x_0)$ heißt Tangentenvektor an die Kurve in $f(x_0)$. Falls f nicht **diffbar** in x_0 bzw. x_0 Randpunkt in D und ist $f(x_0)$ definiert, so betrachtet man in Gleichung (7) auch einseitige Grenzwerte (vgl. Definition 78).

$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} = f'_r(x_0)$ heißt rechtsseitige Ableitung von f in x_0 (falls existent), analog ist $\lim_{t \uparrow 0}$ die linksseitige Ableitung $f'_l(x_0)$.

3) $n = m = 1$: $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (vgl. Schule)

$f'(x_0) \in \mathbb{R}$ ist Zahl und Gleichung (7) gilt (da Spezialfall von Punkt 2)).

Beobachtung: Punkt 2) gilt allgemein für $n = 1$, nicht für $n > 1$!

Folgerung 53.3

Sei $f: D \subset K \rightarrow K^n$, D offen. Dann:

$$\begin{aligned} f \text{ ist differenzierbar in } x_0 \in D \text{ mit Ableitung } f'(x_0) \in L(K, K^m) \\ \Leftrightarrow \exists f'(x_0) \in L(K, K^m) : \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + y) - f(x_0)}{y} = f'(x_0) \end{aligned} \quad (8)$$

alternativ: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

53.2. Einfache Beispiele für Ableitungen

■ Beispiel 53.4 (affin lineare Funktionen)

Sei $f: K^n \rightarrow K^m$ affin linear, d.h.

$$f(x) = A \cdot x + a \quad \forall x \in K^n, \text{ mit } A \in L(K^n, K^m), a \in K^m \text{ fest}$$

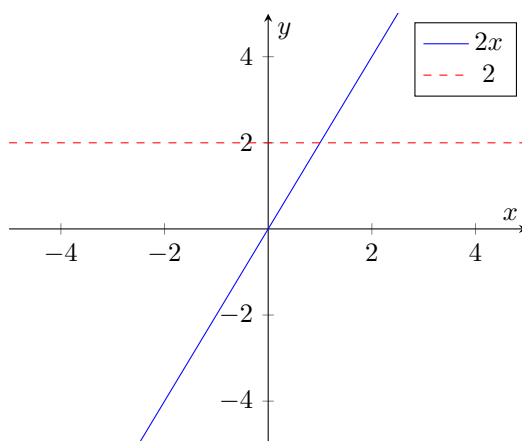
Dann gilt für beliebiges $x_0 \in K^n$:

$$f(x) = A \cdot x_0 + a + A(x - x_0)$$

$$= f(x_0) + A(x - x_0)$$

$$\stackrel{(1)}{\implies} f \text{ ist diffbar in } x_0 \text{ mit } f'(x_0) = A$$

Insbesondere gilt für konstante Funktionen $f'(x_0) = 0$



■ Beispiel 53.5 (quadratische Funktion)

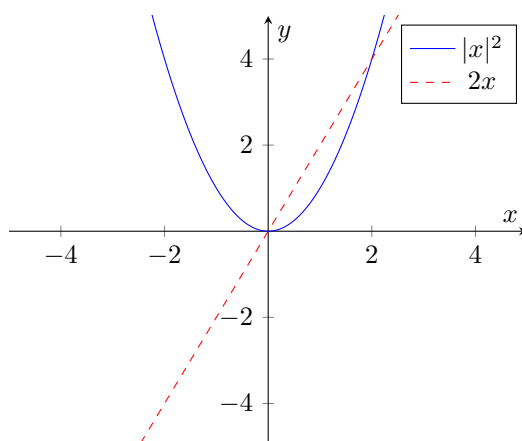
Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|^2$

für beliebiges x_0 gilt:

$$\begin{aligned} |x - x_0|^2 &= \langle x - x_0, x - x_0 \rangle \\ &= |x|^2 - |x_0|^2 - 2\langle x_0, x - x_0 \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + 2 \underbrace{\langle x_0, x - x_0 \rangle}_{\text{Ableitung}} + \underbrace{|x - x_0|^2}_{o(|x - x_0|)}$$

$\Rightarrow f$ ist differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = 2x_0$, offenbar ist f' stetig, also $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$



■ Beispiel 53.6 (Funktionen mit höherem Exponent)

Sei $f : K \rightarrow K$, $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$.

$k = 0$: $f(x) = 1 \forall x \Rightarrow f'(x_0) = 0 \forall x_0 \in \mathbb{C}$ (vgl. Beispiel 53.4)

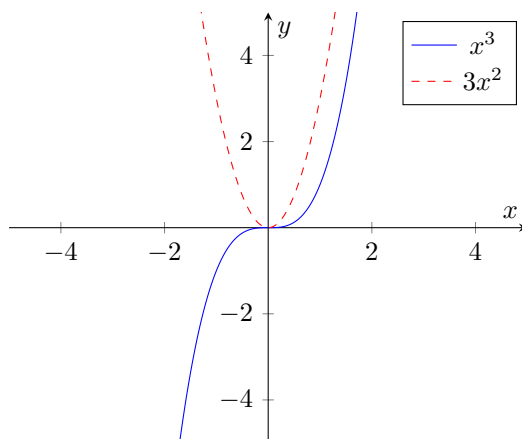
$k \geq 1$: Es gilt

$$(x_0 + y)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x_0^{k-j} \cdot y^j = x_0^k + k \cdot x_0^{k-1} \cdot y + o(y), y \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f(x_0 + y) = f(x_0) + k \cdot x_0^{k-1} \cdot y + o(y), y \rightarrow 0$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} f'(x_0) = k \cdot x_0^{k-1}$$

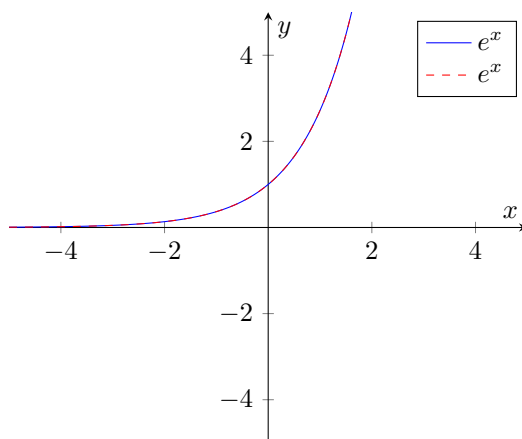
beachte: gilt in \mathbb{C} und \mathbb{R} .



■ Beispiel 53.7 (Exponentialfunktion)

$f: K \rightarrow K$ mit $f(x) = e^x$

mit Differentialquotient $\Rightarrow f$ ist differenzierbar mit $f'(x_0) = e^{x_0} \Rightarrow f \in C^1(K)$



■ Beispiel 53.8 (Betragsfunktion)

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$

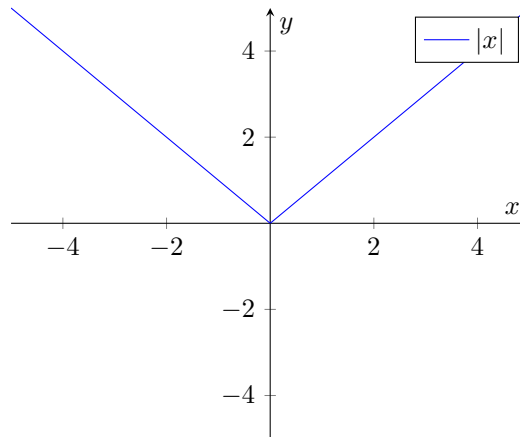
f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, denn angenommen, $f'(x_0) \in \mathbb{R}^n$ existiert und fixiere $y \in \mathbb{R}^n$, $|y| = 1$

$\Rightarrow |ty| = 0 + \langle f'(0), ty \rangle + o(|t|), t \rightarrow 0$

$\Rightarrow t \neq 0 \Rightarrow \frac{|t|}{t} = \langle f'(0), y \rangle + \frac{o(t)}{t} \Rightarrow \pm 1 = \text{feste Zahl in } \mathbb{R}_+ \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Behauptung}$

Folglich: f stetig in $x_0 \not\Rightarrow f$ differenzierbar in x_0 , das heißt Umkehrung von Satz 53.2 gilt nicht!

Hinweis: Es gibt stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die in keinem Punkt x **diffbar** ist (siehe Hildebrand, Analysis 1 S. 192 oder Königsberger Analysis 1, Kap. 9.11)



Satz 53.9 (Rechenregeln)

Sei $D \subseteq K^n$ offen, $f, g : D \rightarrow K^m$, $\lambda : D \rightarrow K$ **diffbar** in $x_0 \in D$

$\Rightarrow (f \pm g) : D \rightarrow K^m$, $(\lambda \cdot f) : D \rightarrow K^m$, $(f \cdot g) : D \rightarrow K$ sind **diffbar** in $x_0 \in D$ und $\frac{1}{\lambda} : D \rightarrow K$ ist **diffbar** in x_0 , falls $\lambda(x_0) \neq 0$ mit

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0) \in K^{m \times 1}$
- $(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot \lambda'(x_0) \in K^{m \times n}$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0)^\top \cdot g'(x_0) + g(x_0)^\top \cdot f'(x_0) \in K^{m \times n}$
- $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)'(x_0) = \frac{\mu'(x_0) \cdot \lambda(x_0) - \mu(x_0) \cdot \lambda'(x_0)}{(\lambda(x_0))^2}$

Beweis. • $f(x_0) \pm g(x_0) + (f'(x_0))(x - x_0) \pm (g'(x_0))(x - x_0) + o(|x - x_0|) = f(x_0) \pm g(x_0) + (f'(x_0) \pm g'(x_0))(x - x_0) + o(|x - x_0|) \Rightarrow$ Behauptung

• $\lambda(x)f(x) = (\lambda(x_0) + \lambda'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)) \cdot (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)) = \lambda(x_0)f(x_0) + (\lambda'(x_0)f(x_0) + \lambda(x_0)f'(x_0))(x - x_0) + o(|x - x_0|) \Rightarrow$ Behauptung

• analog

• zeige $\left(\frac{1}{\lambda}\right)'(x_0) = -\frac{\lambda'(x_0)}{\lambda(x_0)^2}$, Rest folgt mit $f = \mu$

$\frac{1}{\lambda(x)} - \frac{1}{\lambda(x_0)} = \frac{\lambda(x_0) - \lambda(x)}{\lambda(x)\lambda(x_0)} = \dots = \left(\frac{-\lambda'(x_0)}{\lambda(x_0)^2}\right)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \Rightarrow$ Behauptung □

■ Beispiel 53.10

Sei $f : D \subseteq K^n \rightarrow K^m$, $c \in K$, f **diffbar** in $x_0 \in D$

$\xrightarrow{53.9 \text{ b)}} (c \cdot f) = c \cdot f'(x_0)$ (da c konst. Funktion $D \rightarrow K$)

■ Beispiel 53.11 (Polynom)

Sei $f : K \rightarrow K$, Polynom $f(x) = \sum_{l=0}^k a_l x^l$

$\Rightarrow f$ **diffbar** $\forall x_0 \in K$ mit $f'(x_0) = \sum_{l=1}^k l a_l x_0^{l-1}$

■ Beispiel 53.12

Sei $f = \frac{f_1}{f_2}$ rationale Funktion auf \mathbb{R} (d.h. $f_1, f_2 : K \rightarrow K$ Polynom)
 $\Rightarrow f$ ist **diffbar** auf $K \setminus \{\text{Nullstellen von } f_2\}$

■ Beispiel 53.13 (Sinus und Cosinus)

$\sin, \cos : K \rightarrow K$ (\mathbb{R} bzw. \mathbb{C}) $\forall x_0 \in K$.

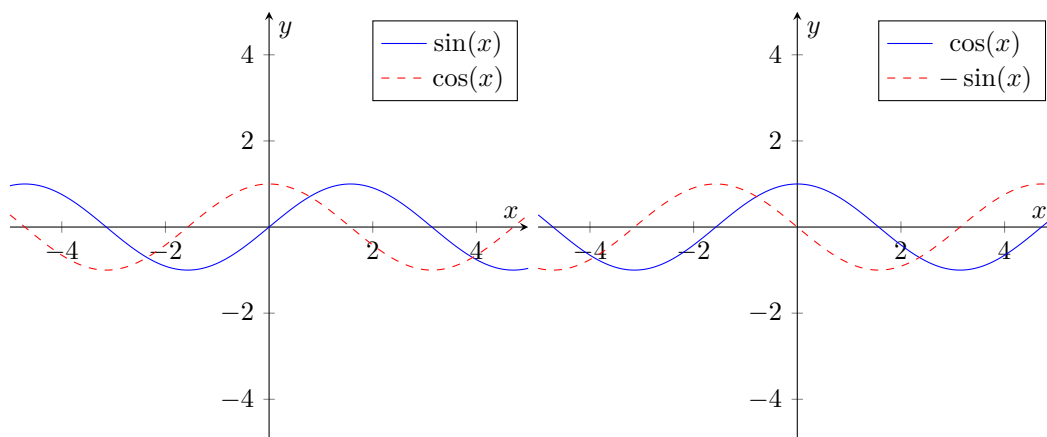
Denn:

$$\frac{\sin y}{y} = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2iy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^{iy} - 1}{iy} + \frac{e^{-iy} - 1}{-iy} \right) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1, \quad \text{vgl. (??)}$$

folglich

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + y) - \sin(x_0)}{y} &\stackrel{*}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{y} \cos\left(x_0 + \frac{y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y}{2}\right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{y} \cdot \sin\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \cos\left(x_0 + \frac{y}{2}\right) \\ &= \cos x_0 \quad \forall x_0 \in K \end{aligned}$$

Analog für den Kosinus.



53.3. Rechenregeln

Definition

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen.

Falls f **diffbar** in allen $x_0 \in D$, dann heißt f differenzierbar auf D und Funktion $f' : D \rightarrow L(K^n, K^m)$ heißt Ableitung von f .

Ist zusätzlich Funktion $f' : D \rightarrow L(K^n, K^m)$ stetig, dann heißt Funktion f stetig differenzierbar (auf D) bzw. C^1 -Funktion (auf D).

$$C^1(D, K^m) := \{f : D \rightarrow K^m \mid f \text{ stetig diffbar auf } D\}$$

■ Beispiel 53.14

- a) $f(x) = x^k \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$
 $\Rightarrow f'(x) = k \cdot x^{k-1} \forall x \in \mathbb{R}$

⇒ offenbar stetige Funktion

⇒ $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

b) $f(x) = e^x \forall x \in \mathbb{C}$

⇒ $f'(x) = e^x \forall x \in \mathbb{C}$ stetig

⇒ $f \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$

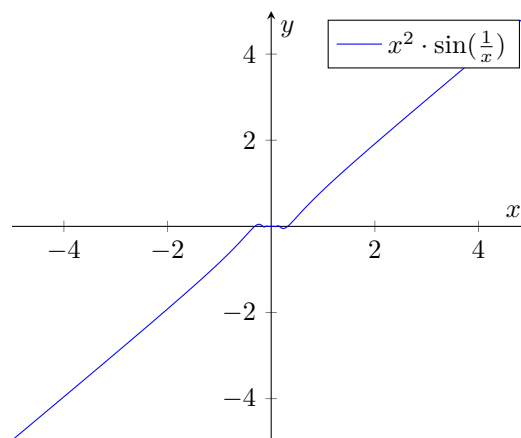
c) $f(x) = |x|^2 \forall x \in \mathbb{R}^n$

⇒ $f(x) = 2x \forall x \in \mathbb{R}^n$, offenbar stetig

⇒ $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

■ Beispiel 53.15

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$, $f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \forall x \neq 0$.



Wegen

$$\frac{|x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}|}{|x|} \leq |x| \xrightarrow{x \neq 0} 0$$

folgt

$$f(x) = o(|x|), x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f(x) = f(0) + 0 \cdot (x - 0) + o(|x - 0|), x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f \text{ diffbar in } x = 0 \text{ mit } f'(0) = 0$$

Rechenregeln liefern $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

Für $x_k := \frac{1}{k\pi}$ gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} 2x_k \cdot \sin \frac{1}{x_k} &= 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x_k} = \pm 1 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &\text{ existiert nicht} \\ \Rightarrow f &\notin C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

d.h. Ableitung einer stetigen Funktion muss nicht stetig sein.

Man beobachtet:

- Gleichung (1) bzw. ??? sind häufig ungeeignet zum Bestimmen von $f'(x_0)$
 - Gleichung (8) ist durchaus nützlich für konkrete Fälle im Fall $n = 1$
- Strategie: Zurückführung auf einfachere Fälle durch Rechenregeln und Reduktion

Folgerung 53.16

Seien $\lambda, \mu : D \rightarrow K$ diffbar in x_0 , D offen und $\lambda(x_0) \neq 0$
 $\Rightarrow \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) : D \rightarrow K$ diffbar in x_0 mit

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)'(x_0) = \frac{\lambda(x_0) \cdot \mu'(x_0) - \mu(x_0) \cdot \lambda'(x_0)}{\lambda(x_0)^2} \in K^{1 \times n}$$

Beweis (Folgerung 53.16). Setzte in Satz 53.9 $f = \mu$ (d.h. $m = 1$) und betr. Produkt $\frac{1}{\lambda} \cdot \mu$. □

Satz 53.17 (Kettenregel)

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, $g : \tilde{D} \subset K^m \rightarrow K^l$, D, \tilde{D} offen, f diffbar in $x_0 \in D$, g diffbar in $f(x_0) \in \tilde{D}$
 $\Rightarrow g \circ f : D \rightarrow K^l$ diffbar in x_0 mit $(g \circ f)' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) (\in K^{l \times n})$

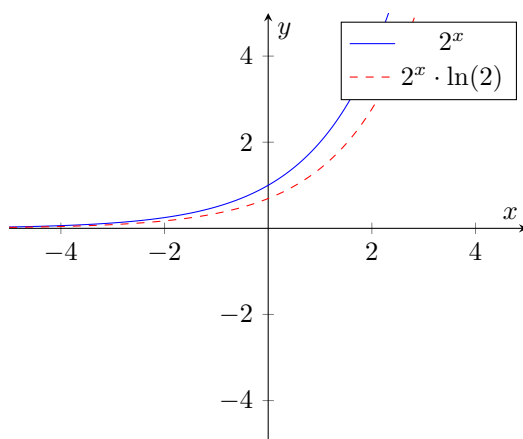
Beweis.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + o(|f(x) - f(x_0)|) \\ &= (g \circ f)(x_0) + g'(f(x_0)) \cdot f(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \end{aligned} \tag{9}$$

\Rightarrow Behauptung □

■ **Beispiel 53.18 (x im Exponenten)**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ ($a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $a \neq 1$). Offenbar $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a}$
 $\Rightarrow f(x) = g(h(x))$ mit $g(y) = e^y$, $h(x) = x \cdot \ln a \Rightarrow g'(y) = e^y$, $h'(x) = \ln a \Rightarrow f'(x) = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$



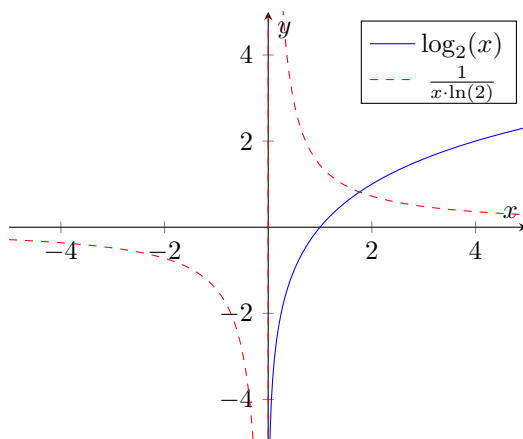
■ **Beispiel 53.19 (Logarithmus)**

$f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a \neq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$

mit $y = \log_a x$, $y_0 = \log_a x_0$ ist $x - x_0 = a^y - a^{y_0}$

Differentialquotient $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, also $f \in C^1(\mathbb{R}_{>0})$

Spezialfall: $(\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$



■ **Beispiel 53.20**

Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^r$ ($r \in \mathbb{R}$)

Wegen $x^r = e^{r \cdot \ln x}$ liefert Kettenregeln (analog zu Beispiel 53.18)

$$f'(x_0) = \frac{r \cdot e^{r \cdot \ln x_0}}{x_0} = \frac{r \cdot x_0^r}{x_0} = r \cdot x_0^{r-1} \quad \forall x_0 > 0$$

Spezialfall: $f(x) = \frac{1}{x^k} \Rightarrow f'(x) = -\frac{k}{x^{k+1}}$

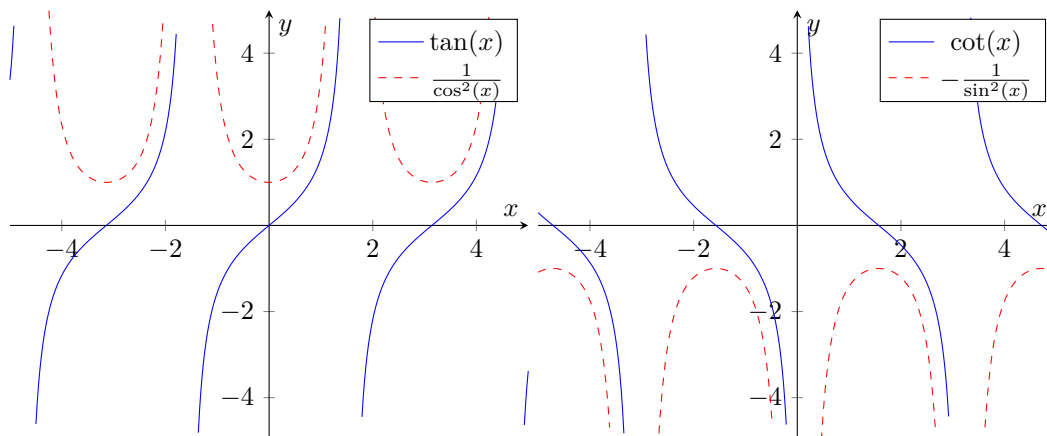
Zu Beispiel 53.15:

$$f'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

■ **Beispiel 53.21 (Tangens und Cotangens)**

$$\tan : K \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow K, \cot : K \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow K$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{Quotientenregel}} \tan'(x_0) &= \frac{\sin'(x_0) \cos(x_0) - \cos(x_0) \cdot \sin(x_0)}{(\cos(x_0))^2} \\ &= \frac{\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \frac{1}{\cos^2(x_0)} \quad \forall x_0 \in \text{Definitionsbereich} \\ \cot'(x_0) &= -\frac{1}{\sin^2(x_0)} \quad \forall x_0 \in \text{Definitionsbereich} \end{aligned}$$



Satz 53.22 (Reduktion auf skalare Funktionen)

Sei $f = (f_1, \dots, f_m) : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, $x_0 \in D$. Dann gilt:

$$f \text{ diffbar in } x_0 \Leftrightarrow \text{alle } f_j \text{ diffbar in } x_0 \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Im Fall der Differenzierbarkeit hat man:

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f'_1(x_0) \\ \vdots \\ f'_m(x_0) \end{pmatrix} \in K^{m \times n} \quad (10)$$

☺ Wenn Sie das nächste mal aus der Disko kommen, zuviel getrunken haben und den Namen ihrer Freundin nicht mehr kennen, sollten sie sich daran aber noch erinnern: ☺

► **Bemerkung 53.23**

Mit Satz 53.22 kann man die Berechnungen der Ableitungen stets auf skalare Funktionen $f : D \subset K^n \rightarrow K$ zurückführen. Die Matrix in Gleichung (10) besteht aus m Zeilen $f'_j(x_0) \in K^{1 \times n}$.

■ **Beispiel 53.24**

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \cos(2\pi t) \\ t \cdot \sin(2\pi t) \end{pmatrix}, \quad f'(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) - t \cdot \sin(2\pi t) \cdot 2\pi \\ \sin(2\pi t) + t \cdot \cos(2\pi t) \cdot 2\pi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1},$$

und $f'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\pi \end{pmatrix}$.

Lemma 53.25

Sei $f = (f_1, f_2) : D \subset K^n \rightarrow K^k \times K^l$, D offen, $x_0 \in D$.

Funktion f ist **diffbar** in x_0 genau dann, wenn $f_1 : D \rightarrow K^k$ und $f_2 : D \rightarrow K^l$ **diffbar** in x_0 .

Im Falle der Differenzierbarkeit gilt

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f'_1(x_0) \\ f'_2(x_0) \end{pmatrix} \in K^{(k+l) \times n} \quad (11)$$

Hinweis: Da $K^k \times K^l$ mit K^{k+l} identifiziert werden kann, kann man f auch als Abbildung von D nach K^{k+l} ansehen. Dementsprechend kann die Matrix in Gleichung (11) der Form

$$\begin{pmatrix} (k \times n) \text{ Matrix} \\ (l \times n) \text{ Matrix} \end{pmatrix}$$

auch als $((k+l) \times n)$ -Matrix aufgefasst werden.

Beweis.

„ \Rightarrow “ Man hat

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + R(x) \cdot (x - x_0), \quad R(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \quad (12)$$

da $f'(x_0), R(x) \in L(K^n, K^k \times K^l)$

$$\Rightarrow f'(x_0) = (A_1, A_2), \quad R(x) = (R_1(x), R_2(x))$$

mit $A_1, R_1(x) \in L(K^n, K^k)$, $A_2, R_2(x) \in L(K^n, K^l)$

$$\stackrel{(12)}{\Rightarrow} f_j(x) = f_j(x_0) + A_j \cdot (x - x_0) + R_j(x)(x - x_0), \quad R_j(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \quad (13)$$

$$\Rightarrow f_j \text{ ist } \text{diffbar} \text{ in } x_0 \text{ mit } f'_j(x_0) = A_j, \quad j = 1, 2$$

\Rightarrow Behauptung

„ \Leftarrow “ (es gilt auch (13) mit $A_j = f'_j(x_0)$)

Setze

$$A = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix}, \quad R(x) = \begin{pmatrix} R_1(x) \\ R_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{(13)}{\implies} A, R(x) \in L(K^n, K^k \times K^l)$$

$$\stackrel{\text{mit } A_j=f_j'(x_0)}{\implies} f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + R(x)(x - x_0), \quad R(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

$\Rightarrow f$ diffbar in x_0 und (11) gilt. □

Beweis (Satz 53.22). Mehrfache Anwendung von Lemma 53.25 (z.B. mit $k = 1, l = m - j$ für $j = 1, \dots, m - 1$) □

54. Richtungsableitung und partielle Ableitung

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, $x \in D$.

Ziel: Zurückführung der Berechnung der Ableitung $f(x)$ auf die Berechnung der Ableitung für Funktionen $\tilde{f} : \tilde{D} \subset K \rightarrow K$

- Reduktionssatz \Rightarrow man kann sich bereits auf $m = 1$ einschränken
- für Berechnung der Ableitung von f ist neben den Rechen- und Kettenregeln auch der Differentialquotient verfügbar

Idee: Betrachte f auf Geraden $t \rightarrow x + t \cdot z$ durch $x \Rightarrow$ skalares Argument t , $t \in K \Rightarrow$ Differentialquotient.

Spezialfall: $z = e_j \Rightarrow$ Partielle Ableitung

Definition (Richtungsableitung)

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, $x \in D$, $z \in K^n$.

Falls $a \in L(K, K^m) (\cong K^m)$ existiert mit

$$f(x + t \cdot z) = f(x) + t \cdot a + o(t), \quad t \rightarrow 0, \quad t \in K, \quad (1)$$

dann heißt f **diffbar** in x in Richtung z und $D_z f(x) := a$ heißt Richtungsableitung von f in x in Richtung z (andere Bezeichnungen: $f(x; z)$, $\partial_z f(x)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x)$, $\partial f(x, z)$, ...)

► Bemerkung

- Wegen $B_\varepsilon(x) \subset D$ für ein $\varepsilon > 0$ existiert $\tilde{\varepsilon}$ mit $x + t \cdot z \in D \quad \forall t \in B_{\tilde{\varepsilon}}(0) \subset K$
- $f'(x; 0)$ existiert offenbar stets für $z = 0$ mit $f'(x; 0) = 0$

Satz 54.1

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, $x \in D$, $z \in K^n$. Dann:

$$\begin{aligned} & f \text{ diffbar in } x \text{ in Richtung } z \text{ mit } D_z f(x) \in L(K, K^m) \\ \Leftrightarrow & \text{ für } \varphi(t) = f(x + t \cdot z) \text{ existiert } \varphi'(0) \text{ und } D_z f(x) = \varphi'(0) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cdot z) - f(x)}{t} = a \quad (a \in L(K, K^m)) \text{ existiert und } D_z f(x) = a \quad (3)$$

■ Beispiel 54.2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x_1^2 + |x_2|$. Existiert eine Richtungsableitung in $x = (x_1, 0)$ in Richtung $z = (z_1, z_2)$?

$$\text{Sei } \varphi(t) := f(x + t \cdot z) = (x_1 + t \cdot z_1)^2 + |t \cdot z_2| = \underbrace{x_1^2 + 2t \cdot x_1 z_1 + t^2 z_1^2}_{=\varphi_1(t)} + \underbrace{|t| \cdot |z_2|}_{=\varphi_2(t)}$$

$\Rightarrow \varphi_1'(0) = 2 \cdot x_1 z_1$ existiert $\forall x_1, z_1 \in \mathbb{R}$

$\varphi_2'(0) = 0$ existiert nur für $z_2 = 0$ (vgl. Beispiel 53.8)

$\Rightarrow \varphi_1'(0) = 2x_1 z_1$ existiert nur für $x_1, z_1 \in \mathbb{R}$, $z_2 = 0$

$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}$ Richtungsableitung von f existiert für alle $x = (x_1, 0)$ nur in Richtung $z = (z_1, 0)$ mit $D_z f(x) =$

$$2x_1z_1$$

Frage: Existiert $D_z f(x) \forall z$, falls f **diffbar** in x ?

Satz 54.3

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, f **diffbar** in $x \in D$.

\Rightarrow Richtungsableitung $D_z f(x)$ existiert $\forall z \in K^n$ und

$$D_z f(x) = f'(x) \cdot z \quad (\in K^{m \times 1}) \quad (4)$$

Hinweis: Richtungsableitung ist linear in z !

Beweis. f **diffbar** in x

$$\Rightarrow f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + o(|y-x|), \quad y \rightarrow x$$

$$\xrightarrow{y=x+tz} f(x+tz) = f(x) + t \cdot f'(x) \cdot z + o(t), \quad t \rightarrow 0$$

$\xrightarrow{(1)}$ Behauptung □

■ **Beispiel 54.4**

Betrachte $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|^2 \quad \forall x$

a) Es gilt

$$\varphi(t) = |x + tz|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i + tz_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2tx_i z_i + t^2 z_i^2$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) = \sum_{i=1}^n 2x_i z_i + 2tz_i^2$$

$$\xrightarrow{(2)} \varphi'(0) = 2 \sum_{i=1}^n x_i z_i = 2\langle x, z \rangle = D_z f(x) \quad \forall x, z \in \mathbb{R}^n$$

b) Beispiel 53.5 liefert $f'(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\xrightarrow{(4)} D_z f(x) = 2x \cdot z = 2\langle x, z \rangle \quad \forall x, z \in \mathbb{R}^n$$

folglich gilt: $|z| = 1$ und $x \in \mathbb{R}^n$ fest

- $D_z f(x) = 0 \Leftrightarrow x \perp z$
- $D_z f(x) = \text{maximal } (x \text{ fest}) \Leftrightarrow z = \frac{x}{|x|}$

54.1. Anwendung: Eigenschaften des Gradienten

Definition (Niveaumenge)

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D offen, f **diffbar** in $x \in D$.

$N_C := \{y \in D \mid f(x) = f(y)\}$ heißt Niveaumenge von f für $x \in \mathbb{R}$.

Definition (Tangentialvektor)

Sei $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow N_C$ ($\delta > 0$) Kurve mit $\gamma(0) = 0$, γ diffbar in 0.

Ein $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $z = \gamma'(0)$ für eine derartige Kurve γ heißt Tangentialvektor an N_C in x .

Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(\gamma(t)) = c \\ \Rightarrow \varphi'(0) &= f'(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0 \\ \Rightarrow D_{\gamma'(0)} f(x) &\stackrel{*}{=} \langle f'(x), \gamma'(0) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Satz 54.5 (Eigenschaften des Gradienten)

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D offen, f diffbar in $x \in D$. Dann:

- 1) Gradient $f'(x)$ steht senkrecht auf der Niveaumenge $N_{f(x)}$, d.h. $\langle f'(x), z \rangle = 0 \forall$ Tangentialvektoren z an $N_{f(x)}$ in x
- 2) Richtungsableitung $D_z f(x) = 0 \forall$ Tangentialvektoren z an $N_{f(x)}$ in x
- 3) Gradient $f'(x)$ zeigt in Richtung des steilsten Anstieges von f in x und $|f'(x)|$ ist der steilste Anstieg, d.h. falls $f'(x) \neq 0$ gilt für Richtung $\tilde{z} := \frac{f'(x)}{|f'(x)|}$

$$D_{\tilde{z}} f(x) = \max \{D_z f(x) \in \mathbb{R} \mid z \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |z| = 1\} = |f'(x)|$$

(beachte: EUKLIDISCHE Norm wichtig!)

Beweis.

- 1) folgt direkt aus (5),(4)
- 2) analog oben
- 3) für $|z| = 1$ gilt

$$\begin{aligned} D_z f(x) &= \langle f'(x), z \rangle = |f'(x)| \langle \tilde{z}, z \rangle \\ &\stackrel{*}{\leq} |f'(x)| |\tilde{z}| |z| = |f'(x)| = \frac{\langle f'(x), f'(x) \rangle}{|f'(x)|} = \langle f'(x), \tilde{z} \rangle \stackrel{(4)}{=} D_{\tilde{z}} f(x) \end{aligned}$$

\Rightarrow Behauptung □

Feststellung: für $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$: die lineare Abbildung $f'(x) : K^n \rightarrow K^m$ ist durch Kenntnis für n linear unabhängige Vektoren bestimmt

$\stackrel{(4)}{\Rightarrow} f'(x)$ eindeutig bestimmt durch Kenntnis von

$$D_{e_j} f(x) = f'(x) \cdot e_j \quad (\in K^{m \times 1}) \text{ für } j = 1, \dots, n$$

Definition (partielle Ableitung)

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, $x \in D$ (nicht notwendigerweise diffbar in x).

Falls Richtungsableitung $D_{e_j} f(x)$ existiert, heißt f partiell diffbar bezüglich x_j im Punkt x und $D_{e_j} f(x)$ heißt partielle Ableitung von f bezüglich x_j in x .

Schreibweisen: $\frac{\partial}{\partial z} f(x)$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $D_j f(x)$, $f_{x_j}(x), \dots$

Wegen $f(x + te_j) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \dots, x_n)$ liefert Satz 54.1:

Folgerung 54.6

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow K^m$, D offen. Dann:

$$\begin{aligned} & f \text{ ist partiell diffbar bezüglich } x_j \text{ in } x \text{ mit Ableitung } \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \\ \Leftrightarrow & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{t} = a \text{ existiert} \quad (6) \\ & \text{und } \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = a \end{aligned}$$

► Bemerkung 54.7

Zur Berechnung von $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$ differenziert man skalare Funktionen $x_j \rightarrow f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ (d.h. alle x_k mit $k \neq j$ werden als Parameter angesehen).

■ Beispiel 54.8

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \sin x_2 + e^{x_3 - x_1}$, damit

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) = 2x_1 \sin x_2 - e^{x_3 - x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) = x_1^2 \cos x_2 \quad \frac{\partial}{\partial x_3} f(x) = e^{x_3 - x_1}$$

Folgerung 54.9

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, f diffbar in $x \in D$

$$\Rightarrow D_z f(x) = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \quad \forall z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Beweis. (4) liefert

$$D_z f(x) = f'(x) \cdot z = f'(x) \cdot \sum_{j=1}^n z_j \cdot e_j = \sum_{j=1}^n z_j (f'(x) \cdot e_j) = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \quad \square$$

■ Beispiel 54.10

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$. f ist diffbar nach Beispiel 54.4

$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = 2x_j$ und $j = 1, \dots, n$

$\stackrel{(7)}{\Rightarrow} D_z f(x) = \sum_{j=1}^n 2x_j \cdot z_j = 2\langle x, z \rangle$ (vgl. Beispiel 54.4)

Theorem 54.11 (Vollständige Reduktion)

Sei $f = (f_1, \dots, f_m) : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, f diffbar in $x \in D$. Dann:

$$f'(x) \stackrel{(a)}{=} \begin{pmatrix} f'_1(x) \\ \vdots \\ f'_m(x) \end{pmatrix} \stackrel{(b)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \right) \stackrel{(c)}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(x) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(x) \end{pmatrix}}_{\text{JACOBI-Matrix}} \in K^{m \times n} \quad (8)$$

► Bemerkung 54.12

Falls f diffbar in x , dann reduziert Theorem 54.11 die Berechnung von $f'(x)$ auf Ableitung skalarer Funktionen $\tilde{f} : \tilde{D} \subset K \rightarrow K$.

Beweis (Theorem 54.11).

zu a) Satz 53.22

zu b) Benutze $f'(x) \cdot z = D_z f(x)$ und Folgerung 54.9

zu c) Entweder $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_1(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_j} f_n(x) \right)^\top$ oder $f'_j(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f_j(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f_j(x) \right)$, sonst analog zu b) \square

][Frage] Gilt die Umkehrung von Theorem 54.11 (Satz 54.3), d.h. falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$ bzw. alle Richtungsableitungen $D_z f(x)$ existieren, ist dann f **diffbar** in x ? Nein!

■ Beispiel 54.13

Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_2^2}{x_1}, & x_1 \neq 0 \\ 0, & x_1 = 0 \end{cases}$$

Berechne Richtungsableitungen in $x = 0$ mittels (3).

$$\begin{aligned} D_z f(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tz) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tz)}{t} \\ \Rightarrow D_z f(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 z_2^2}{t^2 z_1^2} = \frac{z_2^2}{z_1^2} \quad \forall z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2, z = 0 \end{aligned}$$

Betrachte möglicherweise problematische Richtung $z = (0, z_2)$

$$\begin{aligned} D_{(0, z_2)} f(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0 \\ \Rightarrow D_z f(0) &\text{ existiert } \forall z \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

aber ist f überhaupt **diffbar**? $\lim_{n \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0 = f(0)$

$\Rightarrow f$ nicht stetig in $x = 0 \xrightarrow{\text{Satz 53.2}} f$ nicht diffbar.

Ausblick: Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_j} f_j(x)$ stetige Funktionen in $x \in D$

$\Rightarrow f$ **diffbar** in x und Gleichung (8) gilt.

54.2. \mathbb{R} -differenzierbar und \mathbb{C} -differenzierbar

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$ ist **diffbar** in $z_0 \in D$, D offen

\Leftrightarrow eine k -lineare Abbildung $A : K^n \rightarrow K^m$ existiert, die die Funktion f in z_0 „lokal approximiert“.

\rightarrow man müsste eigentlich genauer sagen: f ist **k -diffbar** in z_0 wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Jeder **VR** über \mathbb{C} kann auch als **VR** über \mathbb{R} betrachtet werden (nicht umgekehrt!) und jede \mathbb{C} -lineare Abbildung zwischen \mathbb{C} -VR kann auch als \mathbb{R} -linear betrachtet werden

\Rightarrow jede **\mathbb{C} -diffbare** Funktion $f : D \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ ist auch **\mathbb{R} -diffbar**.

Die Umkehrung gilt i.A. nicht!

■ **Beispiel 54.14**

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \bar{z}$.

a) f ist additiv und $f(tz) = t \cdot f(z) \forall t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f$ ist \mathbb{R} -linear.

Wegen $f(z) = \bar{z} = \overline{z_0 + z - z_0} = \overline{f(z_0) + f(z - z_0) + 0}$ folgt: \mathbb{R} -diffbar in $z_0 \forall z - 0 \in \mathbb{C}$ mit \mathbb{R} -Ableitung $f'(z_0) = 1$

b) Angenommen, f ist \mathbb{C} -diffbar in $z_0 \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z_0 + z - \bar{z}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = \pm 1 \Rightarrow \text{!}$ (Grenzwert existiert nicht)

$\Rightarrow f$ nicht \mathbb{C} -diffbar

Definition (\mathbb{R} -differenzierbar)

$f : D \subset X \rightarrow Y$, D offen, $(X, Y) = (\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ bzw. $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}^m)$ oder $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ heißt \mathbb{R} -diffbar in $z_0 \in D$, falls (1) im Abschnitt 53 gilt mit entsprechender \mathbb{R} -linearer Abbildung $A : X \rightarrow Y$ gibt.

beachte: falls X oder Y nur VR über \mathbb{R} , dann \mathbb{C} -diffbar nicht erklärt.

Spezialfall: Sei $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, D offen, $z_0 \in D$. Vergleiche \mathbb{R} -diffbar und \mathbb{C} -diffbar:

Sei f \mathbb{R} -diffbar in z_0 , d.h. es existiert eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + A \cdot z + o(|z|), \quad z \rightarrow z_0 \quad (9)$$

$$\text{für } z = x, \quad x \in \mathbb{R} : A(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + x) - f(z_0)}{x} =: f_x(z_0)$$

$$\text{für } z = iy, \quad y \in \mathbb{R} : A(i) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + iy) - f(z_0)}{y} =: f_y(z_0) \quad (10)$$

Nenne $f_x(z_0)$, $f_y(z_0)$ partielle Ableitung von f in z_0 . Sei f \mathbb{C} -diffbar in x_z , d.h.

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + \underbrace{f'(z_0)}_{\in \mathbb{C}} \cdot z + o(|z|)$$

$$\stackrel{(10)}{\implies} f'(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0) \quad (11)$$

Satz 54.15

Sei $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, D offen, $z_0 \in D$. Dann:

$$f \text{ } \mathbb{C}\text{-diffbar in } z_0 \Leftrightarrow f \text{ } \mathbb{R}\text{-diffbar in } z_0 \text{ mit } f_x(z) = -if_y(z_0) \quad (12)$$

Beweis.

„ \Rightarrow “ vgl. oben (11)

„ \Leftarrow “ mit $z = x + iy$ liefert (9)

$$\begin{aligned} f(z_0 + z) &= f(z_0) + A(x + iy) + o(|z|) &&= f(z_0) + x \cdot A(1) + yA(i) + o(|z|) \\ &= f(z_0) - f_x(z_0)x + f_y(z_0)y + o(|z|) \stackrel{(12)}{=} f(z_0) + f_x(z_0)(x + iy) + o(|z|) \\ &= f(z_0) + \underbrace{f_x(z_0)} \cdot z + o(|z|) \\ &=: f'(z_0) \in \mathbb{C} \text{ als } \mathbb{C}\text{-Ableitung} \end{aligned}$$

□

54.3. Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

Identifiziere $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tilde{f} : \tilde{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gemäß $z = x + iy \hat{=} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \hat{=} \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \tilde{f}(x, y)$

Lineare Algebra: $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ linear $\Leftrightarrow \exists w \in \mathbb{C} : Az = wz \forall z \in \mathbb{C}$

$$\tilde{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ } \mathbb{R}\text{-linear} \Leftrightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ bezüglich Standardbasis.}$$

Lemma 54.16

Sei $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ \mathbb{R} -linear. Dann:

$$\begin{aligned} &A \text{ ist auch } \mathbb{C}\text{-linear, d.h. } \exists w = \alpha + i\beta : Az = wz \forall z \in \mathbb{C} \\ \Leftrightarrow &\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : A(x + iy) \hat{=} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Beweis. Selbststudium

□

Somit: \mathbb{C} -lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ entspricht spezieller \mathbb{R} -linearen Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Definition (Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen)

Falls \mathbb{R} -diffbar in z_0 liefert (11)

$$f_x(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0), \quad f_y(z_0) = u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)$$

folglich

$$\text{Gleichung (12)} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{matrix} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{matrix}}_{\text{CAUCHY-RIEMANN-Differentialgleichungen}} \tag{13}$$

Somit: \mathbb{C} -lineare Abbildung $z \rightarrow f'(z_0)$ entspricht \mathbb{R} -linearer Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -v_y & v_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hinweis: \mathbb{C} -diffbare Funktionen $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ werden in der Funktionentheorie untersucht.

Es gilt z.B. f \mathbb{C} -diffbar auf $D \Rightarrow$ Ableitung $f' : D \rightarrow \mathbb{C}$ auch \mathbb{C} -diffbar auf $D \Rightarrow f$ beliebig oft diffbar auf D !

55. Mittelwertsatz und Anwendung

Definition (Maximum, Minimum)

Wir sagen, $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt Minimum bzw. Maximum auf D , falls eine Minimalstelle bzw. Maximalstelle $x_0 \in D$ existiert mit

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in D \qquad (1)$$

f hat ein lokales Minimum bzw. lokales Maximum in $x_0 \in D$ falls

$$\exists \varepsilon > 0 : f(x_0) \leq f(x) \qquad f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in B_\varepsilon(x_0 \cap D) \qquad (2)$$

Hat man in (1) bzw. (2) für x und x_0 „ $<$ “ bzw. „ $>$ “, so sagt man strenges (lokales) Minimum bzw. Maximum.

Hinweis: Es gilt:

$$f \text{ hat Minimum auf } D \xLeftrightarrow{\text{vgl. Abschnitt 36}} \min\{f(x) \mid x \in D\} \text{ existiert (das heißt, } \inf\{\dots\} \text{ wird angenommen)}$$

Analog für Maximum.

Theorem 55.1 (notwendige Optimalitätsbedingung)

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D offen, f sei diffbar in $x \in D$ und habe lokales Minimum bzw. Maximum in x_0 . Dann:

$$f'(x_0) = 0 \quad (\in \mathbb{R}^{1 \times n}) \qquad (3)$$

► Bemerkung 55.2

- Theorem 55.1 ist neben dem Satz von Weierstraß (Theorem 36.3) der wichtigste Satz für Optimierungsprobleme, denn (3) dient der Bestimmung von „Kandidaten“ für Minimal- und Maximalstellen.
- (3) besagt, dass die Tangentialebene an den Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$ horizontal ist.

Beweis. Für Minimum (Maximum analog) fixiere beliebiges $z \in \mathbb{R}^n$.

D offen

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : x_0 + t \cdot z \in D \quad \forall t \in (-\delta, \delta)$$

f diffbar in x_0 , Minimum in x_0

$$\Rightarrow 0 \leq f(x_0 + t \cdot z) - f(x_0) = t \cdot f'(x_0) \cdot z + o(t), \quad t \rightarrow 0$$

$$\xrightarrow{t > 0} 0 \leq f'(x_0) \cdot z + o(1)$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \leq f'(x_0) \cdot z \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

$$\xrightarrow{\pm z} f'(x_0) \cdot z = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0 \qquad \square$$

Einfache, aber wichtige Anwendung:

Satz 55.3 (Satz von Rolle)

Sei $f : [a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $-\infty < a < b < \infty$, f diffbar auf (a, b) und $f(a) = f(b)$.
 $\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

Beweis. f stetig, $[a, b]$ kompakt

Theorem 36.3 $\rightarrow \exists x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \forall x$

- Angenommen, $f(x_1) = f(x_2) = f(a) \Rightarrow f$ konstante Funktion $\Rightarrow f'(\xi) = 0 \forall \xi \in (a, b)$
- Andernfalls sei $f(x_1) < f(a) \Rightarrow \xi := x_1 \in (a, b) \xrightarrow{\text{Theorem 55.1}} f'(\xi) = 0$
- analog $f(x_2) > f(a)$ □

Definition (abgeschlossenes, offenes Segment)

Setze für $x, y \in K^n$

- $[x, y] := \{x + t(y - x) \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0, 1]\}$ abgeschlossenes Segment (abgeschlossene Verbindungsstrecke)
- $(x, y) := \{x + t(y - x) \in \mathbb{R}^n \mid t \in (0, 1)\}$ offenes Segment (offene Verbindungsstrecke)

Theorem 55.4 (Mittelwertsatz)

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D offen, f diffbar auf D und seien $x, y \in D$ mit $[x, y] \subset D$. Dann

$$\exists \xi \in (x, y) : f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot (y - x) \quad (4)$$

► Bemerkung 55.5

- Für $n = 1$ schreibt man (4) auch als

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad \text{falls } x \neq y.$$

- Der Mittelwertsatz (MWS) gilt nicht für \mathbb{C} oder $m \neq 1$.
- Theorem 55.4 gilt bereits für $D \subset \mathbb{R}^n$ beliebig, f stetig auf $[x, y] \subset D$, f diffbar auf $(x, y) \subset \text{int } D$.

Beweis. Setze $\varphi(t) = f(x + t(y - x)) - (f(y) - f(x))t \forall t \in [0, 1]$

f diffbar $\rightarrow \varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\varphi(0) = \varphi(1) = f(x)$

φ diffbar auf $(0, 1)$ (verwende Kettenregel) mit

$$\varphi'(t) = f'(x + t(y - x)) \cdot (y - x) - (f(y) - f(x)) \quad (5)$$

$$\xrightarrow{(5)} f(y) - f(x) = f'(\underbrace{x + \tau(y - x)}_{=: \xi \in (x, y)}) \cdot (y - x)$$

\Rightarrow Behauptung □

Satz 55.6 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz in \mathbb{R})

Seien $f, g : [x, y] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und **diffbar** auf (x, y) ($x, y \in \mathbb{R}, x < y$). Dann

$$\exists \xi \in (x, y) : (f(y) - f(x)) \cdot g'(\xi) = (g(y) - g(x))f'(\xi)$$

Beweis. Sei $h(t) := (f(y) - f(x))g(t) - (g(y) - g(x))f(t) \forall t \in [x, y]$

$\Rightarrow h : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, **diffbar** auf (x, y) , $h(x) = h(y)$

Satz 55.3 $\Rightarrow \exists \xi \in (x, y) : 0 = h'(\xi) = (f(y) - f(x))g'(\xi) - (g(y) - g(x))f'(\xi)$

\Rightarrow Behauptung □

Frage: Der **MWS** gilt für $m = 1$. Was ist bei $m > 1$?

Folgerung 55.7

Sei $f = (f_1, \dots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, D offen, **diffbar** auf D , $[x, y] \subset D$. Dann

$$\exists \xi_1, \dots, \xi_m \in (x, y) : f(y) - f(x) = \begin{pmatrix} f'_1(\xi_1) \\ \vdots \\ f'_m(\xi_m) \end{pmatrix} \cdot (y - x) \quad (6)$$

Beweis. Gleichung (6) ist äquivalent zu m skalaren Gleichungen

$$f_j(y) - f_j(x) = f'_j(\xi_j) \cdot (y - x), \quad j = 1, \dots, m$$

und diese folgen direkt aus Theorem 55.4 für $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}$. □

Frage: Ist in (6) auch $\xi_1 = \dots = \xi_m$ möglich? Im Allgemeinen nein.

■ Beispiel 55.8

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \forall x \in \mathbb{R}$.

Angenommen, $\exists \xi \in (0, 2\pi) : f(2\pi) - f(0) = f'(\xi) \cdot (2\pi - 0) = 0$

$$\Rightarrow 0 = f'(\xi) = \begin{pmatrix} -\sin \xi \\ \cos \xi \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \sin \xi = \cos \xi = 0$$

$\Rightarrow \text{!}$

$\Rightarrow \xi_1 = \xi_2$ in (6) ist nicht möglich.

Ausweg: Für $m > 1$ gilt statt (4) Abschätzung (7), die meist ausreicht und ebenso richtig ist wie der **MWS**.

Theorem 55.9 (Schränkensatz)

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, f **diffbar** auf D . Seien $x, y \in D$, $[x, y] \subset D$. Dann

$$\exists \xi \in (x, y) : |f(y) - f(x)| \leq |f'(\xi)(y - x)| \leq \|f'(\xi)\| \cdot |y - x| \quad (7)$$

beachte: Theorem 55.9 gilt auch für $K = \mathbb{C}$.

Beweis. Sei $f(x) \neq f(y)$ (sonst klar). Setze $v := \frac{f(y) - f(x)}{|f(y) - f(x)|} \in K^m$, offenbar $|v| = 1$.

Betrachte $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) := \Re \langle f(x + t(y - x)), v \rangle$. Da f **diffbar**, gilt

$$\langle f(x + s(y - x)), v \rangle = \langle f(x + t(y - x)), v \rangle + \langle f'(x + t(y - x)) \cdot (s - t)(y - x), v \rangle + \underbrace{o(|s - t| \cdot |y - x|)}_{=o(|s-t|)}, \quad s \rightarrow t$$

und damit ist auch φ **diffbar** auf $(0, 1)$ mit

$$\varphi'(t) = \Re \langle f'(x + t(y - x)) \cdot (y - x), v \rangle \quad \forall t \in (0, 1)$$

Theorem 55.4 liefert: $\exists \tau \in (0, 1) : \underbrace{\varphi(1) - \varphi(0)}_{= \Re \langle f(y) - f(x), v \rangle} = \varphi(\tau) \cdot (1 - 0)$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\xi = x + \tau(y - x)} |f(y) - f(x)| &= \Re \langle f(y) - f(x), v \rangle = \varphi(1) - \varphi(0) = \Re \langle f'(\xi) \cdot (y - x), v \rangle \\ &\leq |\langle f'(\xi) \cdot (y - x), v \rangle| \stackrel{*}{\leq} |f'(\xi) \cdot (y - x)| \cdot \underbrace{|v|}_{=1} \\ &\leq \|f'(\xi)\| \cdot |y - x| \end{aligned}$$

□

Wiederholung: $M \subset K^n$ heißt **konvex**, falls $[x, y] \subset M \quad \forall x, y \in M$

Satz 55.10 (Lipschitz-Stetigkeit)

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, f stetig **diffbar** auf D . Sei $M \subset D$ kompakt und konvex. Dann

$$|f(y) - f(x)| \leq L \cdot |y - x| \quad \forall x, y \in M \quad (8)$$

mit $L = \max_{\xi \in M} \|f'(\xi)\| \leq +\infty$, d.h. f ist LIPSCHITZ-stetig auf M mit LIPSCHITZ-Konstante L .

► Bemerkung 55.11

Wegen $\|f'(\xi)\| \leq |f'(\xi)|$ (vgl. ???) kann man in (7) und (8) auch $|f'(y)|$ benutzen.

Beweis. Seien $x, y \in M \xrightarrow{M \text{ konvex}} [x, y] \subset M$

$f' : M \rightarrow L(K^n, K^m)$ stetig, M kompakt

Theorem 36.3 $\Rightarrow \|f'(\xi)\|$ besitzt Maximum auf M und die Behauptung folgt aus Theorem 55.9. □

bekanntlich: $f(x) = \text{const } \forall x \Rightarrow f'(x) = 0$

Satz 55.12

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, und zusammenhängend.

$$f \text{ diffbar auf } D \text{ mit } f'(x) = 0 \forall x \in D \Rightarrow f(x) = \text{const } \forall x \in D.$$

Beweis.

- D offen, zusammenhängend, K^n normierter Raum $\xrightarrow{\text{Theorem 36.11}}$ D bogenzusammenhängend
 - Wähle nun $x, y \in D \Rightarrow \exists \varphi : [0, 1] \rightarrow D$ stetig, $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$
 - D offen $\Rightarrow \forall t \in [0, 1]$ existiert $r(t) > 0 : B_{r(t)}(\varphi(t)) \subset D$
 - Nach Satz 36.1 ist $\varphi([0, 1])$ kompakt und $\{B_{r(t)}(\varphi(t)) \mid t \in [0, 1]\}$ ist offene Überdeckung von $\varphi([0, 1])$
 \Rightarrow existiert endliche Überdeckung, d.h. $\exists t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ mit $\varphi([0, 1]) \subset \bigcup_{i=1, \dots, n} B_{r(t_i)}(\varphi(t_i))$.
- Falls wir noch zeigen, dass f konstant ist auf jeder Kugel $B_r(z) \subset D$ ist, dann wäre $f(x) = f(y)$
 $\xrightarrow{x, y \text{ bel.}}$ Behauptung.
- Sei $B_r(z) \subset D$, $x, y \in B_r(z)$
 $\xrightarrow{\text{Theorem 55.9}} |f(y) - f(x)| \leq \underbrace{\|f'(\xi)\|}_{=0} \cdot |y - x| = 0$
 $\Rightarrow f(x) = f(y)$
 $\xrightarrow{x, y \text{ bel.}}$ f konst. auf $B_r(z)$ □

■ **Beispiel 55.13**

Sei $f : D = (0, 1) \cup (2, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar, sei $f'(x) = 0$ auf D

$\xrightarrow{\text{Satz 55.12}}$ $f(x) = \text{const}$ auf $(0, 1)$ und $(2, 3)$, aber auf jedem Intervall kann die Konstante anders sein.

Zurück zur Frage nach 18.11:

partielle Ableitung existiert \Rightarrow Ableitung existiert?

Nein! Aber:

Theorem 55.14

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, $x \in D$.

Falls partielle Ableitung $f_{x_j}(y)$, $j = 1, \dots, n$ für alle $y \in B_r(x) \subset D$ für ein $r > 0$ existierten und falls $y \rightarrow f_{x_j}(y)$ stetig in x für $j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow f$ ist differentierbar in x mit $f'(x) = (f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x)) \in K^{m \times n}$

Beweis. Fixiere $y = (y_1, \dots, y_n) \in B_r(0)$.

Betrachte die Eckpunkt eines Quaders in D : $a_0 = x$, $a_k := a_{k-1} + y_k e_k$ für $k = 1, \dots, n$

$\Rightarrow a_n = x + y$.

Offenbar $\varphi_k(t) = f(a_{k-1} + te_k y_k) - f(a_{k-1}) - t f_{x_k}(a_{k-1}) y_k$ stetig auf $[0, 1]$, **diffbar** auf $(0, 1)$ mit

$$\varphi'_k(t) = f_{x_k}(a_{k-1} + te_k y_k) y_k - f_{x_k}(a_{k-1}) y_k$$

$$\xrightarrow{\text{Theorem 55.9}} |\varphi_k(1) - \varphi_k(0)| = |f(a_k) - f(a_{k-1}) - f_{x_k}(a_{k-1}) y_k| \leq \sup_{t \in (0,1)} |\varphi'_k(\xi)|, k = 1, \dots, n$$

Es gilt mit $A := (f_1(x), \dots, x_{x_n}(x))$:

$$\begin{aligned} |f(x+y) - f(x) - Ay| &= \left| \sum_{k=1}^n f(a_k) - f(a_{k-1}) - f_{x_k}(x) y_k \right| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} \sum_{k=1}^n |f(a_k) - f(a_{k-1}) - f_{x_k}(x) y_k| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} \sum_{k=1}^n |\varphi_k(1) - \varphi_k(0)| + |f_{x_k}(a_{k-1}) y_k - f_{x_k}(x) y_k| \\ &\leq |y| \sum_{k=1}^n \sup_{t \in (0,1)} |f_{x_k}(a_{k-1} + t \cdot e_k y_k) - f_{x_k}(a_{k-1})| + |f_{x_k}(a_{k-1}) - f_{x_k}(x)| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} |y| \underbrace{\sum_{k=1}^n \sup_{t \in (0,1)} |f_{x_k}(a_{k-1} + te_k y_k) - f_{x_k}(x)| + 2|f_{x_k}(a_{k-1}) - f_{x_k}(x)|}_{=: \rho(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0, \text{ da part. Ableitung } f_{x_k} \text{ stetig in } x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + Ay + R(y) \text{ mit } \frac{|R(y)|}{y} \leq \rho(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \text{ (d.h. } R(y) = o(|y|))$$

$$\stackrel{53.1}{\Leftrightarrow} f \text{ ist diffbar in } x \text{ mit } f'(x) = A$$

□

55.1. Anwendung des Mittelwertsatzes in \mathbb{R}

Satz 55.15 (Monotonie)

Sei $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **diffbar**, dann gilt:

- i) $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) $\forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ monoton wachsend (monoton fallend)
- ii) $f'(x) > 0$ (< 0) $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ streng monoton wachsend (fallend)
- iii) $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ konst.

► Bemerkung 55.16

In ii) gilt die Rückrichtung nicht! (Betr. $f(x) = x^3$ und $f'(0) = 0$)

Beweis (jeweils für wachsend, fallend analog). Sei $x, y \in (a, b)$ mit $x < y$.

„ \Rightarrow “ in i), ii), iii)

Nach Theorem 55.4 $\exists \xi \in (a, b) : f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) \geq 0 \xrightarrow{x, y \text{ bel.}}$ Behauptung

„ \Leftarrow “ in i), iii)

$$0 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \xrightarrow{y \rightarrow x} f'(x) \Rightarrow \text{Behauptung}$$

□

Satz 55.17 (Zwischenwertsatz für Ableitungen)

Sei $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **diffbar**, $a < x_1 < x_2 < b$. Dann

$$f'(x_1) < \gamma < f'(x_2) \Rightarrow \exists \tilde{x} \in (x_1, x_2) : f'(\tilde{x}) = \gamma$$

(analog $f(x_2) < \gamma < f(x_1)$)

Beweis. Sei $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) - \gamma x$ ist **diffbar** auf (a, b)

Weierstraß $\Rightarrow \exists \tilde{x} \in [x_1, x_2]$ mit $g(\tilde{x}) \leq g(x) \forall x \in [x_1, x_2]$

Angenommen, $\tilde{x} = x_1$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} \xrightarrow{x \rightarrow x_1} g'(x_1) = f'(x_1) - \gamma < 0$$

$$\Rightarrow \text{! (für Minimum: } f'(x) \geq 0)$$

$$\Rightarrow x_1 < \tilde{x}, \text{ analog } \tilde{x} < x_2$$

Theorem 55.1 $\Rightarrow 0 = g'(\tilde{x}) = f'(\tilde{x}) - \gamma \Rightarrow$ Behauptung □

Betrachte nun „unbestimmte Grenzwerte“ $\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)}{g(y)}$ der Form $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, wie z.B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Satz 55.18 (Regeln von de l'Hospital)

Seien $f, g : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **diffbar**, $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ und entweder

i) $\lim_{x \downarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$, oder

ii) $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \downarrow a} g(x) = \infty$

Dann gilt:

$$\text{Falls } \lim_{y \downarrow a} \frac{f'(y)}{g'(y)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ ex.} \Rightarrow \lim_{y \downarrow a} \frac{f(y)}{g(y)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ ex. und } \lim_{y \downarrow a} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y \rightarrow a} \frac{f'(y)}{g'(y)} \quad (9)$$

(Analoge Aussagen für $x \uparrow b, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$)

► Bemerkung 55.19

- 1) Vgl. Analgie zum Satz von Stolz und Folgen (9.34)
- 2) Satz kann auch auf Grenzwerte der Form $0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0, \infty - \infty$ angewendet werden, falls man folgende Identitäten verwendet:

$$\alpha \cdot \beta = \frac{\alpha}{\frac{1}{\beta}} \quad \alpha^\beta = e^{\beta \cdot \ln \alpha} \quad \alpha - \beta = \alpha \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

Beweis.

zu i) Mit $f(a) := 0, g(a) := 0$ sind f, g stetig auf $[a, b]$

Satz 55.6 $\Rightarrow \forall x \in (a, b) \exists \xi = \xi(x) \in (a, x) : \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Wegen $\xi(x) \rightarrow a$ für $x \rightarrow a$ folgt die Behauptung

zu ii) Sei $\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \gamma \in \mathbb{R}$ ($\gamma = \pm\infty$ ähnlich)

Sei **oBdA** $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ auf (a, b) . Sei $\varepsilon > 0$ fest

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \gamma \right| < \varepsilon \quad \forall \xi \in (a, a + \delta) \text{ und}$$

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} - \gamma \right| \stackrel{55.6}{\leq} \underbrace{\left| \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right|}_{=0} + \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \gamma \right| < \varepsilon \quad \forall x, y \in (a, a + \delta), g(x) \neq g(y)$$

Fixiere $y \in (a, a + \delta)$, dann $f(x) \neq f(y), g(x) \neq g(y) \quad \forall x \in (a, a + \delta_1)$ für ein $0 < \delta_1 < \delta$ und

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}}}_{\xrightarrow{x \downarrow a} 1}$$

$$\Rightarrow \exists \delta_2 > 0 : \delta_2 < \delta_1 \text{ und } \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} \right| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, a + \delta_2)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \gamma \right| \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} \right| + \left| \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} - \gamma \right| < 2\varepsilon \quad \forall x \in (a, a + \delta_2)$$

$\xrightarrow{\varepsilon > 0 \text{ beliebig}}$ Behauptung

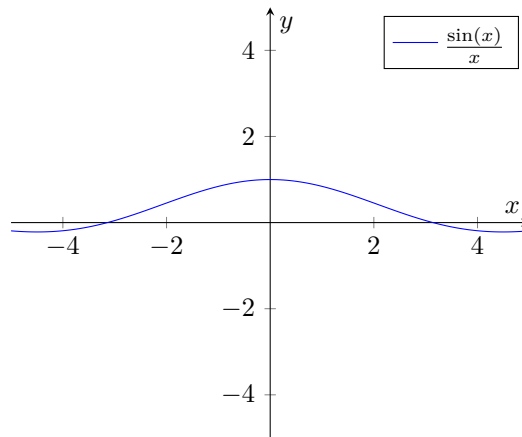
andere Fälle:

- $x \uparrow b$ analog
- $x \rightarrow +\infty$ mittels Transformation $x = \frac{1}{y}$ auf $y \downarrow 0$ zurückführen
- $x \rightarrow -\infty$ analog

□

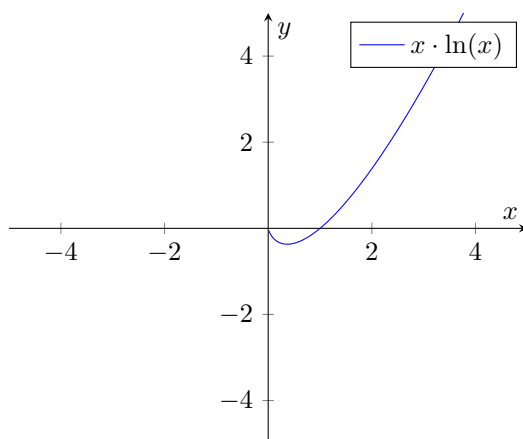
■ **Beispiel 55.20**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ denn } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$



■ **Beispiel 55.21**

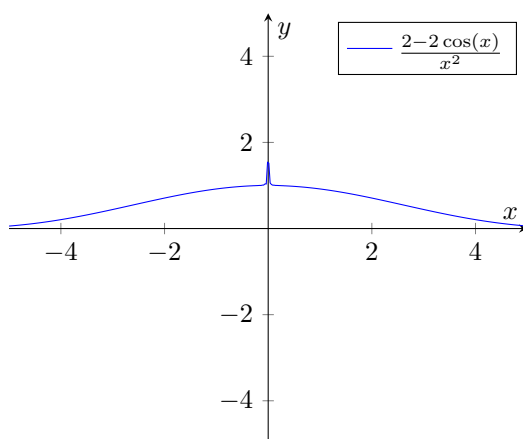
$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0, \text{ denn } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$



■ **Beispiel 55.22**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-2\cos x}{x^2} = 1, \text{ denn es ist } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-2\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x}{2x} \stackrel{55.20}{=} 1.$$

beachte: Satz 55.18 wird in Wahrheit zweimal angewendet.



■ **Beispiel 55.23**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x = e^y \quad \forall y \in \mathbb{R} \text{ mit}$$

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right)^x = e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)} = e^{\frac{\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)}{1/x}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y x^2}{\left(1 + \frac{y}{x}\right) x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{1 + \frac{y}{x}} = y$$

(vgl. Satz 13.9)

56. Stammfunktionen

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^{m \times n}$ ($\cong L(K^n, K^m)$)

Frage: Existiert eine Funktion F mit $F' = f$ auf D ?

Definition (Stammfunktion, unbestimmtes Integral)

$F : D \subset K^n \rightarrow K^m$ heißt Stammfunktion oder unbestimmtes Integral von f auf D , falls F **diffbar** und $F'(x) = f(x) \forall x \in D$

Satz 56.1

Sei $F : D \subset K^n \rightarrow K^m$ Stammfunktion von $f : D \rightarrow K^{m \times n}$ und sei $D \subset K^n$ Gebiet. Dann:

$$\tilde{F} \text{ ist Stammfunktion von } f \text{ auf } D \Leftrightarrow \tilde{F} = F + c \text{ f\u00fcr } c \in K^m$$

Falls f eine Stammfunktion besitzt, dann gibt es eine Menge von Stammfunktionen, die auf einem Gebiet bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt sind. F\u00fcr eine Stammfunktion schreibt man auch

$$\int f \, dx \text{ bzw. } \int f(x) \, dx$$

Das Symbol steht f\u00fcr die Menge aller Stammfunktionen. Man schreibt aber auch

$$F = \int f \, dx,$$

falls es eine Stammfunktion gleich F gibt.

Weiterhin verwendet man $\int f \, dx$ auch als Bezeichnung f\u00fcr den Funktionswert $F(x)$ einer Stammfunktion F von f . Somit Vorsicht bei der Bezeichnung (vgl. Kontext).

Beweis.

„ \Leftarrow “ Offenbar F **diffbar** mit $\tilde{F}' = F' = f$

„ \Rightarrow “ Offenbar $\tilde{F}'(x) - F'(x) = 0 \forall x \in D \xrightarrow{\text{Satz 55.12}} \tilde{F}(x) - F(x) = c$ f\u00fcr ein $c \in K^m$ □

Sei $f, g : D \subset K^n \rightarrow K^{m \times n}$, D Gebiet, $c \in K$. Dann liefert Satz 56.1 und Differentiationsregeln

$$\begin{aligned} \int (f \pm g) \, dx &= \int f \, dx \pm \int g \, dx \\ \int cf \, dx &= c \int f \, dx \end{aligned} \tag{1}$$

Falls jeweils die rechte Seite existiert, d.h. $f \rightarrow \int f \, dx$ ist in gewisser Weise linear.

Aussage bleibt richtig, wenn D nur offen, wir beschr\u00e4nken uns meist aber auf Gebiete.

Betrachte zun\u00e4chst den Spezialfall $n = m = 1$. Sei $f : D \subset K \rightarrow K$, D offen. Die Beispiele zur Differentiation liefern folgende Stammfunktionen

für $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$:

| $f(x)$ | Stammfunktion $F(x)$ |
|----------|--|
| $\sin x$ | $-\cos x$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ |
| e^x | e^x |
| x^k | $\frac{1}{k+1}x^{k+1} \quad (k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$ |

für $K = \mathbb{R}$:

| $f(x)$ | Stammfunktion $F(x)$ |
|-------------------|--|
| a^x | $\frac{a^x}{\ln a}$ |
| x^α | $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \quad (x > 0, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan x$ |

Strategie: Rechenregeln für weitere Stammfunktionen**Satz 56.2 (partielle Integration)**Seien $f, g : D \subset K \rightarrow K$, D Gebiet mit zugehörigen Stammfunktion $F, G : D \rightarrow K$.Falls $f \cdot G : D \rightarrow K$ Stammfunktion, dann auch $(F \cdot g) : D \rightarrow K$ mit

$$\int F \cdot g \, dx = F(x)G(x) - \int f \cdot G \, dx \quad (2)$$

Interpretation von (2): Es gibt eine Stammfunktion $\widehat{F \cdot g}$ von $F \cdot g$ und eine Stammfunktion $\widehat{f \cdot G}$ von $f \cdot G$ mit

$$\widehat{F \cdot g}(x) = F(x)G(x) - \widehat{f \cdot G}(x) \quad (2')$$

► Bemerkung 56.3

(2) kann als Umkehrung der Produktregel betrachtet werden.

Beweis. Sei $H : D \rightarrow K$ Stammfunktion von $f \cdot G$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(F(x)G(x) - H(x)) = F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x) - H'(x) = f(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot G(x) = F(x) \cdot g(x)$$

 \Rightarrow Behauptung □**■ Beispiel 56.4**Zeige $\int \ln x \, dx = x \ln x - x$ auf $\mathbb{R}_{>0}$, denn

$$\int \ln x \, dx = \int \underbrace{1 \cdot \ln x}_{g \cdot F} \stackrel{(2)}{=} x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \cdot \ln x - x$$

■ Beispiel 56.5Bestimme $\int x^2 e^x \, dx$.

Es ist

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2 e^x}_{F \cdot g} \, dx &\stackrel{(2)}{=} x^2 e^x - \int \underbrace{2x \cdot e^x}_{f \cdot G} \\ \int \underbrace{2x \cdot e^x}_{\tilde{F} \cdot \tilde{g}} \, dx &\stackrel{(2)}{=} \underbrace{2x \cdot e^x}_{\tilde{F} \cdot \tilde{G}} - \int \underbrace{2e^x}_{\tilde{f} \cdot \tilde{G}} \, dx = 2xe^x - 2e^x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x = e^x(x^2 - 2x + 2)$$

Satz 56.6 (Integration durch Substitution)

Sei $f : D \subset K \rightarrow K$, D Gebiet, mit Stammfunktion $F : D \rightarrow K$ und sei $\varphi : D \rightarrow D$ **diffbar**. Dann hat $f(\varphi(\cdot)) \cdot \varphi'(\cdot) : D \rightarrow K$ eine Stammfunktion mit

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx = F(\varphi(x)) \quad (3)$$

Interpretation: analog zu (2)

► Bemerkung 56.7

(3) kann als Umkehrung der Kettenregel angesehen werden.

Beweis. $F(\varphi(\cdot))$ ist nach der Kettenregel auf D **diffbar** mit

$$\frac{d}{dx} F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \quad \square$$

■ Beispiel 56.8

Bestimme $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ auf $\mathbb{R}_{>0}$:

- Offenbar ist $\frac{\ln x}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln \frac{1}{x}$.
- Wähle $\varphi(x) := \frac{1}{x}$, $f(y) := \ln y$
 $\Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $F(y) = y \cdot \ln y - y$ Stammfunktion von f (siehe Beispiel 56.4),
- $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln \frac{1}{x}$
 $\stackrel{(3)}{\implies} F(\varphi(x)) = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{1 + \ln x}{x} = \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

Weitere Regeln prüft man leicht durch Differentiation:

Satz 56.9

Sei $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I offenes Intervall, $f(x) \neq 0$ auf I , dann gilt

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| \quad (4)$$

■ Beispiel 56.10

Betrachte $f(x) = \tan x \, \forall x \in I_k := (-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Dann

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} = - \ln |\cos x|$$

Wieder der allgemeine Fall: mit $f : D \subset K^n \rightarrow K^{m \times n}$

Reduktion: Nach Theorem 54.11 kann man sich auf $m = 1$ beschränken, d.h. falls

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}$$

reicht eine Untersuchung der Zeilen.

Ziel: Reduktion auf $n = 1$. Betrachte somit $f : D \subset K^n \rightarrow K^n$, D Gebiet ($m = 1$, n beliebig).

Sei $F : D \subset K^n \rightarrow K$ Stammfunktion von $f = (f_1, \dots, f_n)$

$$\xrightarrow{54.11} F_{x_j}(x) = f_j(x) \quad \forall x \in D, j = 1, \dots, n$$

$\Rightarrow x_j \rightarrow F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ ist Stammfunktion von $x_j \rightarrow f_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$. Hierbei sind x_i mit $i \neq j$ als Parameter anzusehen.

\Rightarrow Ist $x_j \rightarrow F_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ eine Stammfunktion von $x_j \rightarrow f_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$, dann erhält man alle Stammfunktionen durch Addition einer Konstanten, die jedoch von den Parametern abhängen kann, d.h. durch

$$x_j \rightarrow F_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) + \varphi_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \quad (6)$$

mit beliebiger Funktion φ_j . Schließlich muss gelten

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (F_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)) = f_i(x) \quad \forall i \neq j, j = 1, \dots, n \quad (7)$$

■ **Beispiel 56.11**

Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha xy \\ x\check{s} + y^2 \end{pmatrix}$ (α ist Parameter)

1) Suche eine Stammfunktion von $x \rightarrow f_1(x, y)$:

$$F(x, y) = \underbrace{\frac{\alpha}{2} x^2 y}_{=F_1(x, y)} + \varphi_1(y) \quad \varphi_1 \text{ unbekannte Funktion}$$

2) Suche eine Stammfunktion von $y \rightarrow f_2(x, y)$:

$$F(x, y) = \underbrace{x^2 y + \frac{1}{3} y^3}_{F_2(x, y)} + \varphi_2(x) \quad (\varphi_2 \text{ unbekannte Funktion})$$

$$3) \stackrel{(7)}{\implies} F_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (F_1(x, y) + \varphi_1(y)) \stackrel{(7)}{=} f_2(x, y), \text{ d.h.}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2}x^2 + \varphi_1'(y) &= x^2 + y^2 \\ \varphi_1'(y) &= \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)x^2 + y^2 \quad \forall x, y \end{aligned} \tag{8}$$

Offenbar kann (8) nur gelten, falls rechte Seite unabhängig von x , d.h. für $\alpha = 2$ (für $\alpha \neq 2$ existiert keine Stammfunktion von f).

$$\stackrel{(8)}{\implies} \varphi_1(y) = \frac{1}{3}y^3 + c_1 \quad (c_1 \text{ Konstante})$$

$$\begin{aligned} 4) \text{ analog: } F_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (F_2(x, y) + \varphi_2(x)) = f_1(x, y) \\ \Rightarrow \varphi_2'(x) &= (\alpha - 2)xy \stackrel{\alpha=2}{=} 0 \\ \Rightarrow \varphi_2(x) &= c_2 \quad (c_2 \text{ Konstante}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow F(x, y) = F_1(x, y) + \varphi_1(y) = F_2(x, y) + \varphi_2(x) = x^2y + \frac{1}{3}y^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$ beliebig, sind alle Stammfunktionen von f (Probe!).

► **Bemerkung 56.12**

- Mit obiger Strategie wird die Bestimmung einer Stammfunktion auf $n = 1$ zurückgeführt.
- Nicht alle Funktionen besitzen eine Stammfunktion

Ausblick: In Abschnitt 105 formulieren wir eine notwendige Bedingung in Satz 105.19 („Integrabilitätsbedingung“) für die Existenz einer Stammfunktion (die in gewissen Mengen D auch hinreichend ist):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x) \quad \forall i, j, x \in D$$

Kapitel VI

Integration

Integration kann betrachtet werden als

- verallgemeinerte Summation, d.h. $\int_{\mu} f \, dx$ ist Grenzwert von Summen
- lineare Abbildung $\int : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ über $\int_a^b (\alpha f + \beta g) \, dx = \alpha \int_a^b f \, dx + \beta \int_a^b g \, dx$ Funktionen, d.h. als Grundlage benötigt man ein „Volumen“ (Maß) für allgemeine Mengen $M \subset \mathbb{R}$.

Wir betrachten Funktionen $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, welche komponentenweise auf $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow K^k$ erweitert werden kann. Benutze $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$ für $K = \mathbb{C}$.

Vgl. Buch: Evans, Lawrence C.; Gariepy, Ronald F.: Measure theory and fine properties of functions

77. Messbarkeit

Wir führen zunächst das LEBESGUE-Maß ein und behandeln dann messbare Mengen und messbare Funktionen.

77.1. Lebesgue-Maß

Definition (Quader, Volumen)

Wir definieren die Menge

$$\mathcal{Q} := \{I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n \mid I_j \subset \mathbb{R} \text{ beschränktes Intervall}\}$$

\emptyset ist auch als beschränktes Intervall zugelassen. $Q \in \mathcal{Q}$ heißt Quader.

Sei $|I_j| :=$ Länge des Intervalls $I_j \subset \mathbb{R}$ (wobei $|\emptyset| = 0$), dann heißt

$$v(Q) := |I_1| \cdot \dots \cdot |I_n| \quad \text{für } Q = I_1 \times \dots \times I_n \in \mathcal{Q} \quad (1)$$

Volumen von Q

beachte: $v(q) = 0$ für „dünne“ Quader (d.h. falls ein $|I_j| = 0$). Insbesondere $v(\emptyset) = 0$.

Wir möchten für beliebige Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ ein „Volumenmaß“ definieren, das mit dem Volumen für Quader kompatibel ist.

Definition (Lebesgue-Maß)

Dafür betrachte eine (Mengen-) Funktion $|\cdot| : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$|\mu| = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) \mid M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, Q_j \in \mathcal{Q} \text{ Quader} \right\} \quad \forall M \subset \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

die man LEBESGUE-Maß auf \mathbb{R}^n nennt.

$|\mu|$ heißt (LEBESGUE-Maß) von M , oft schreibt man auch $\mathcal{L}^\mu(M)$.

Anmerkung

Man versucht das zu untersuchende Intervall mit Quadern zu überdecken und sucht dabei die Überdeckung, bei der die Summe der Volumen am kleinsten wird. Also z.B. $|[2, 3]| \in \mathbb{N} = |\{2, 3\}| = 0$, da man für jede der beiden Zahlen genau einen Punkt als Quader braucht. Der Punkt hat per Definition keine Dimension, also auch ein Volumen von 0. Damit gilt: $|[2, 3]| = 0 + 0 = 0$. Mit der gleichen Begründung gilt auch $|\mathbb{N}| = 0$.

Hinweis: Das LEBESGUE-Maß wird in der Literatur vielfach nur für messbare Mengen definiert ($M \subset \mathbb{R}^n$) und die Erweiterung auf alle $M \subset \mathbb{R}^n$ wie in (2) wird dann als äußeres LEBESGUE-Maß bezeichnet.

Lemma 77.1

Mann kann sich in (2) auf offene Mengen beschränken.

Beweis. Fixiere $\varepsilon > 0$. Sei $M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, $Q_j \in \mathcal{Q}$ und $\alpha := \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) < |M| + \varepsilon$.

Wähle offene Quader $\tilde{Q}_j \in \mathcal{Q}$ mit $Q_j \subset \tilde{Q}_j$, $v(\tilde{Q}_j) < v(Q_j) + \frac{\varepsilon}{\alpha}$
 $\Rightarrow M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{Q}_j$ und $|M| \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(\tilde{Q}_j) < \alpha + \varepsilon < |M| + 2\varepsilon$.

Wegen $\varepsilon > 0$ beliebig folgt die Behauptung. \square

Satz 77.2

Es gilt:

$$M_1 \subset M_2 \Rightarrow |M_1| \leq |M_2| \quad (3)$$

und die Abbildung $\mu \mapsto |\mu|$ ist σ -subadditiv, d.h.

$$\left| \bigcup_{j=1}^{\infty} M_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |M_k|, \quad \text{für } M_j \subset \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}_{\geq 1} \quad (4)$$

Beweis. (3) folgt direkt aus (2) (Definition, das Infimum über eine größere Menge ist größer).

Für (4) fixiere $\varepsilon > 0$. Dann

$$\exists Q_{k_j} \in \mathcal{Q} : M_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_{k_j}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_{k_j}) \leq |M_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Wegen $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} v(Q_{k_j}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |M_k| + \varepsilon$ folgt

$$\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \right| \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} v(Q_{k_j}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |M_k| + \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt die Behauptung. \square

Definition (Nullmenge)

$N \subset \mathbb{R}^n$ heißt Nullmenge, falls $|N| = 0$. Offenbar gilt:

$$\tilde{N} \subset N, |N| = 0 \Rightarrow |\tilde{N}| = 0 \quad (5)$$

$$|N_k| = 0 \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \right| = 0 \quad (6)$$

Nach (3) und (4) gilt:

$$M \subset \mathbb{R}^n, |N| = 0 \Rightarrow |M| = |M \setminus N| \quad (7)$$

Beweis. Dann $|M \setminus N| \stackrel{(3)}{\leq} |M| \leq \underbrace{|M \cap N|}_{=0} + |M \setminus N| = |M \setminus N| \Rightarrow$ Behauptung. \square

■ Beispiel 77.3

Es sind Nullmengen

(a) $|\emptyset| = 0$

(b) $|\{x\}| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

|abzählbar viele Punkte| = 0, folglich $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) = 0$, $\mathcal{L}^1(\mathbb{N}) = 0$ (d.h. wir betrachten \mathbb{Q}, \mathbb{N} als Teilmengen von \mathbb{R} , d.h. $n = 1$)

(c) $|M| = 0$ falls $M \subsetneq \mathbb{R}^n$ (echter affiner Unterraum)

(d) $|\partial Q| = 0$ für $Q \in \mathcal{Q}$

(e) „schöne“ Kurven im \mathbb{R}^2

„schöne“ Kurven und Flächen im \mathbb{R}^3

Folgerung 77.4

Es ist $v(q) = |Q| \quad \forall Q \in \mathcal{Q}$

Damit im folgenden Stets $|Q|$ statt $v(Q)$

Beweis. Sei $Q \in \mathcal{Q}$. Da offenbar $v(Q) = v(\text{cl } Q)$ und $|Q| = |\text{cl } Q|$ können wir Q als abgeschlossen annehmen.

Für ein fixiertes $\varepsilon > 0$ existieren nach Lemma 77.1 offene $Q_j \in \mathcal{Q}$ mit

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) \leq |Q| + \varepsilon$$

Da Q kompakt ist, wird es durch endlich viele Q_j überdeckt d.h. **oBdA** $Q \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$. Mittels einer geeigneten Zerlegung der Q_j folgt aus (1), dass $v(Q) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j)$. Somit gilt:

$$|Q| \stackrel{(2)}{\leq} v(Q) \leq |Q| + \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt die Behauptung. □

Definition

Eine Eigenschaft gilt **fast überall (f.ü.)** auf $M \subset \mathbb{R}^n$, falls eine Nullmenge existiert, sodass die Eigenschaft $\forall x \in M \setminus N$ gilt. Man sagt auch, dass die Eigenschaft für **fa.** $x \in M$ gilt.

■ Beispiel 77.5

Für die DIRICHLET-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist $f = 0$ **f.ü.** auf \mathbb{R} .

77.2. Messbare Mengen

Frage: gilt für paarweise disjunkte Mengen M_k in (4) Gleichheit?

Obwohl es wünschenswert wäre, gibt es „sehr exotische“ Mengen, für die dies nicht gilt (vgl. Bemerkung zum Auswahlaxiom in Kap. 2).

Deshalb betrachten wir „gutartige“ Mengen.

Definition (messbar)

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt messbar, falls

$$|\tilde{M}| = |\tilde{M} \cap M| + |\tilde{M} \setminus M| \quad \forall \tilde{M} \in \mathbb{R} \quad (8)$$

Man beachte, dass nach (4) stets

$$|\tilde{M}| \leq |\tilde{M} \cap M| + |\tilde{M} \setminus M| \quad \forall M, \tilde{M} \subset \mathbb{R}^n \quad (9)$$

Beim Nachweis der Messbarkeit muss man nur „ \geq “ prüfen.

Satz 77.6

- (a) \emptyset, \mathbb{R}^n sind messbar
- (b) $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar $\Rightarrow M^C = \mathbb{R}^n \setminus M$ messbar
- (c) $M_1, M_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$ messbar $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j, \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j$ messbar

Definition (σ -algebra)

Eine Menge von Teilmengen $\mu \subset X$ (hier $X = \mathbb{R}^n$) mit den Eigenschaften Punkte (a) bis (c) heißt σ -algebra

Beweis.

- (a) wegen $|\emptyset| = 0$ und (7): $|\tilde{M}| \leq |\tilde{M} \setminus \emptyset| = |\tilde{M}|$
- (b) wegen $\tilde{M} \cap M = \tilde{M} \setminus M^C, \tilde{M} \setminus M = \tilde{M} \cap M^C \Rightarrow$ Behauptung
- (c) (4) liefert

$$|\tilde{M}| \leq |\tilde{M} \cap M| + |\tilde{M} \setminus M| \quad \forall \tilde{M}, M \subset \mathbb{R}^n,$$

sodass man nur noch „ \geq “ zeigen muss.

- Seien M_1, M_2 messbar, dann gilt für beliebige $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \tilde{M} \cap (M_1 \cup M_2) &= (\tilde{M} \cap M_1) \cup ((\tilde{M} \setminus M_1) \cap M_2), \\ \tilde{M} \setminus (M_1 \cup M_2) &= (\tilde{M} \setminus M_1) \setminus M_2 \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} |\tilde{M}| &= |\tilde{M} \cap M_1| + |\tilde{M} \setminus M_1| = |\tilde{M} \cap M_1| + |(\tilde{M} \setminus M_1) \cap M_2| + |(\tilde{M} \setminus M_1) \setminus M_2| \\ &\geq |\tilde{M} \cap (M_1 \cup M_2)| + |\tilde{M} \setminus (M_1 \cup M_2)|, \end{aligned}$$

daher $M_1 \cup M_2$ messbar.

- Da $(M_1 \cap M_2)^C = M_1^C \cup M_2^C$ ist auch $M_1 \cap M_2$ messbar.
 - $\Rightarrow M_1, \dots, M_k$ messbar
 - $\Rightarrow M_1 \cup \dots \cup M_k$ sowie $M_1 \cap \dots \cap M_k$ messbar (Induktion).
- Seien jetzt $M_1, \dots \subset \mathbb{R}^n$ messbar und paarweise disjunkt

\Rightarrow alle $A_k := \bigcup_{j=1}^k M_j$ messbar. Für beliebige $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ folgt schrittweise

$$|\tilde{M} \cap A_k| + \sum_{j=2}^k |\tilde{M} \cap M_j| = \sum_{j=1}^k |\tilde{M} \cap M_j|$$

Mit $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ folgt

$$|\tilde{M}| = |\tilde{M} \cap A_k| + |\tilde{M} \setminus A_k| \geq \sum_{j=1}^k |\tilde{M} \cap M_j| + |\tilde{M} \setminus A| \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

$$\xrightarrow{k \rightarrow \infty} |\tilde{M}| \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{M} \cap M_j| + |\tilde{M} \setminus A| \stackrel{(4)}{\geq} |\tilde{M} \cap A| + |\tilde{M} \setminus A|$$

$\Rightarrow A$ messbar

– Folglich sind die M_j nicht paarweise disjunkt, ersetze M_j durch $\underbrace{A_j \setminus A_{j-1}}_{=M'_j}$ und argumentiere wie

oben (da $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} M'_k \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ messbar, \cap analog). \square

Satz 77.7

Seien $M_1, M_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann

- (a) M_j paarweise disjunkt $\Rightarrow |\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |M_k|$ (σ -additiv)
- (b) $M_1 \subset M_2 \subset \dots \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |M_k| = |\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k|$
- (c) $M_1 \supset M_2 \supset \dots$ und $|M_1| < \infty \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |M_k| = |\bigcap_{k=1}^{\infty} M_k|$

Beweis.

a) Aus (10) mit $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$ erhält man

$$\sum_{k=1}^m |M_k| = \left| \bigcup_{k=1}^m M_k \right| \stackrel{(4)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} |M_k|$$

Der Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ liefert die Behauptung.

b) Nach (a) gilt: $|M_k| = |M_1| + \sum_{j=2}^k |M_j \setminus M_{j-1}|$, und folglich

$$|M_k| = |M_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |M_k \setminus M_{k-1}| \stackrel{(a)}{=} \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \right|$$

c) $A := \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$. Wegen $|M_1 \setminus M_k| = |M_1| - |M_k|$ nach (4) hat man

$$\begin{aligned} |M_1| &\stackrel{(4)}{\leq} |A| + |M_1 \setminus A| &&= |A| + \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} M_1 \setminus M_k \right| \\ &\stackrel{(b)}{=} |A| + \lim_{k \rightarrow \infty} |M_1 \setminus M_k| &&= |A| + |M_1| - \lim_{k \rightarrow \infty} |M_k| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} |M_k| + |M_1| - \lim_{k \rightarrow \infty} |M_k| = |M_1| \end{aligned}$$

Subtraktion von $|M_1|$ liefert die Behauptung. \square

Satz 77.8

Es gilt:

- (a) alle Quader sind messbar ($Q \in \mathcal{Q}$)
- (b) Offene und abgeschlossene $M \subset \mathbb{R}^n$ sind messbar
- (c) alle Nullmengen sind messbar
- (d) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $M_0 \subset \mathbb{R}^n$, beide Mengen unterscheiden sich voneinander nur um eine Nullmenge, d.h. $|(M \setminus M_0) \cup (M_0 \setminus M)| = 0$
 $\Rightarrow M_0$ messbar.

Beweis.

- a) Sei
- $Q \in \mathcal{Q}$
- Quader. Für
- $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$
- ,
- $\varepsilon > 0$
- wähle
- Q_j
- mit

$$\tilde{M} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq |\tilde{M}| + \varepsilon$$

Aus (1) folgert man $|Q_j| = |Q_j \cap Q| + |Q_j \setminus Q|$, da man $Q_j \setminus Q$ in endlich viele disjunkte Quader zerlegen kann.

$$\Rightarrow |\tilde{M} \cap Q| + |\tilde{M} \setminus Q| \stackrel{(4)}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j \cap Q| + \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j \setminus Q| = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq |\tilde{M}| + \varepsilon$$

Da ε beliebig, $|\tilde{M}| \geq |\tilde{M} \cap Q| + |\tilde{M} \setminus Q|$ und (9), ergibt sich die Behauptung.

- b) Sei
- $M \subset \mathbb{R}^n$
- offen. Betrachte die Folge
- $\{x_n\}_{k=1}^{\infty}$
- aller rationale Punkte in
- M
- und
- $w_k \subset M$
- sei jeweils der größte offene Würfel mit dem Mittelpunkt
- x_k
- und Kantenlänge
- ≤ 1
- .

Dann $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} w_k$, denn für jedes $x \in M$ ist $B_{\varepsilon}(x) \subset M$ für ein $\varepsilon > 0$ und somit ist $x \in w_k$ für ein x_k nahe genug bei x . Folglich ist M messbar nach Satz 77.6.

Für $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen und somit messbar. Damit ist $M = \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus M)$ messbar.

- c) Für eine Nullmenge N , $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ ist $|\tilde{M}| \stackrel{(4)}{\leq} |\tilde{M} \cap N| + |\tilde{M} \setminus N| \stackrel{(3)}{\leq} |N| + |\tilde{M} \setminus N| \stackrel{(7)}{=} |\tilde{M}|$
- d) Mit den Nullmengen $N_1 := M \setminus M_0$, $N_2 = M_0 \setminus M$ gilt $M_0 = (M \setminus N_1) \cup N_2$. Da $M \setminus N_1$ messbar ist, erhält man für beliebiges $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |\tilde{M} \cap M_0| + |\tilde{M} \setminus M_0| &= |\tilde{M} \cap ((M \setminus N_1) \cup N_2)| + |\tilde{M} \setminus ((M \setminus N_1) \cup N_2)| \\ &\stackrel{(3),(4)}{\leq} |M \cap (M \setminus N_1)| + |\tilde{M} \cap N_2| + |\tilde{M} \setminus (M \setminus N_1)| \\ &= |\tilde{M}| \end{aligned}$$

Mit (9) folgt dann, dass M_0 messbar ist. □

77.3. Messbare Funktionen

Wir führen nun eine für die Integrationstheorie grundlegende Klasse von Funktionen ein. Dabei erlauben wir $\pm\infty$ als Funktionswerte und benutzen die Bezeichnung

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, \infty]$$

sowie für $a \in \mathbb{R}$

$$(a, \infty] = (0, \infty) \cup \{\infty\},$$

und analog $[a, \infty)$, $(-\infty, a)$, $[-\infty, a]$.

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir offene ε -Kugeln um $\pm\infty$ durch

$$B_\varepsilon(\infty) := \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right] \quad \text{bzw.} \quad B_\varepsilon(\infty) := \left[-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$U \subset \overline{\mathbb{R}}$ offen, falls für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $B_\varepsilon \subset U$. Damit sind insbesondere die offenen Mengen aus \mathbb{R} auch offen in $\overline{\mathbb{R}}$ und die offenen Mengen in $\overline{\mathbb{R}}$ bilden eine Topologie.

Definition (messbar)

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt messbar, falls D messbar ist und $f^{-1}(U)$ für jede offene Menge $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ messbar ist.

Folgerung 77.9

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit D messbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) f ist messbar
- (b) $f^{-1}([-\infty, a))$ messbar $\forall a \in \mathbb{Q}$
- (c) $f^{-1}([-\infty, a])$ ist messbar $\forall a \in \mathbb{Q}$

Beweis. Aus den Eigenschaften messbarer Mengen folgt mit

$$f^{-1}([-\infty, a]) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[-\infty, a + \frac{1}{k}\right]\right)$$

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[-\infty, a - \frac{1}{k}\right]\right)$$

die Äquivalenz von (b) und (c).

Offenbar ist (a) \Rightarrow (b) \Leftrightarrow (c).

Für $a, b \in \mathbb{Q}$ ist dann

$$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}([-\infty, b]) \cap f^{-1}([a, \infty]) = f^{-1}([-\infty, a)) \cap (f^{-1}([-\infty, a]))^c$$

messbar und offensichtlich $f^{-1}((a, \infty))$ ebenfalls.

Da jede offene Menge $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ die abzählbare Vereinigung von Mengen der Form (a, b) , $[-\infty, a)$, $(a,]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ ist, folgt die Messbarkeit von $f^{-1}(U)$ und somit (a). \square

Hinweis: Wir werden sehen, dass die Menge aller messbaren Funktionen die Menge der stetigen Funktionen enthält, aber auch noch viele Weitere.

Definition (charakteristische Funktion)

Für $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt $\chi_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\chi_M = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases}$$

charakteristische Funktion von M .

Offenbar gilt

Folgerung 77.10

$\chi_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist messbar **gdw.** $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar ist.

Definition (Treppenfunktion)

Eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls es $M_1, \dots, M_k \subset \mathbb{R}^n$ und $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$h(x) = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{M_j}(x) \quad (11)$$

Die Menge der Treppenfunktionen $T(\mathbb{R}^n)$ ist mit der üblichen Addition und skalarer Multiplikation für Funktionen ein Vektorraum.

Man beachte, dass die Darstellung in (11), d.h. die Wahl der M_j und $c_j = a_j$ nicht eindeutig ist. Insbesondere kann man M_j stets paarweise disjunkt wählen.

Man sieht leicht

Folgerung 77.11

Die Treppenfunktion $h \in T(\mathbb{R}^n)$ ist messbar \Leftrightarrow es gibt mindestens eine Darstellung (11), bei der alle M_j messbar sind.

Definition (Nullfortsetzung)

Für $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir die Nullfortsetzung $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus D \end{cases} \quad (12)$$

Satz 77.12

Es gilt:

- Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist auch die Nullfortsetzung $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar
- Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $D' \subset D$ messbar. Dann ist f auf D' messbar, d.h. insbesondere $f|_{D'}$ ist messbar.
- Seien $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Sei f messbar und $f = g$ **f.ü.** auf D . Dann ist g messbar.

■ **Beispiel 77.13**

Die DIRICHLET-Funktion ist auf \mathbb{R} messbar.

$h = 0$ ist messbare Treppenfunktion auf \mathbb{R} und stimmt mit der DIRICHLET-Funktion **f.ü.** überein.

Beweis.

- (a) Für ein offenes $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ ist $\overline{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ falls $0 \notin U$ und andernfalls $\overline{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cup (\mathbb{R}^n \setminus D)$.
 (b) Für offenes $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ ist $(f|_{D'})^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap D$.
 (c) Für $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ offen: $f^{-1}(U)$ ist messbar und $g^{-1}(U)$ unterscheidet sich von $f^{-1}(U)$ nur um eine Nullmenge.
 Somit ist $g^{-1}(U)$ nach Satz 77.8 messbar. \square

Definition (positiver, negativer Teil)

Für $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ schreibt man verkürzt

$$\{f > \alpha\} := \{x \in D \mid f(x) > \alpha\}$$

Man definiert mit

$$f^+ := f \cdot \chi_{\{f > 0\}}, \quad f^- := -f \cdot \chi_{\{f \leq 0\}}$$

den positive Teil bzw. negative Teil von f , und man hat $f = f^+ - f^-$.

Weiterhin ist

$$f := \max(f_1, f_2) : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

und analog: $\min(f_1, f_2)$, $\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$, $\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k$, $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$, $\liminf_{k \in \mathbb{N}} f_k$

Bei punktweiser Konvergenz $f_k(x) \rightarrow f(x)$ für **fa.** $x \in D$ schreibt man auch $f_k \rightarrow f$ **f.ü.** auf D .

Satz 77.14 (zusammengesetzte messbare Funktionen)

Für $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar gilt

- a) $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\Rightarrow f \pm g, f \cdot g$ messbar,
 falls $g \neq 0$ auf $D \Rightarrow \frac{f}{g}$ messbar
 b) $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow f^\pm, |f|, \max(f, g), \min(f, g)$ messbar
 c) $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sup_k f_k, \inf_k f_k, \liminf_k f_k, \limsup_k f_k$ messbar

Hinweis: In **a)** nur Funktionen mit Werten in \mathbb{R} , nicht $\overline{\mathbb{R}}$, sonst ist die zusammengesetzte Funktion eventuell nicht erklärt.

Beweis.

- $\forall a \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$(f + g)^{-1}([-\infty, a]) = \bigcup_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \\ \alpha + \beta \leq a}} f^{-1}([-\infty, \alpha]) \cap g^{-1}([-\infty, \beta])$$

ist messbar, folglich $f + g$ messbar

- Für $c > 0$ ist

$$\begin{aligned} (cf)^{-1}([-\infty, a]) &= f^{-1}\left(\left[-\infty, \frac{a}{c}\right]\right) && \text{messbar als Menge,} \\ (-cf)^{-1}([-\infty, a]) &= f^{-1}\left(\left[-\frac{a}{c}, +\infty\right]\right) && \text{messbar} \end{aligned}$$

$\Rightarrow cf$ messbar ($c = 0$ trivial)

$\Rightarrow -f, f + (-g)$ messbar

- Wegen

$$(f^2)^{-1}([-\infty, a]) = f^{-1}([-\infty, \sqrt{a}]) \setminus f^{-1}([-\infty, -\sqrt{a}]) \quad \forall a \geq 0$$

ist f^2 messbar

$\Rightarrow f \cdot g = \frac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2)$ messbar

- Falls $g \neq 0$ auf D ist für $a \geq 0$

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{-1}([-\infty, -a]) = g^{-1}\left(\left(-\frac{1}{a}, 0\right)\right) \quad \left(\frac{1}{g}\right)^{-1}([a, \infty]) = g^{-1}\left(\left(0, \frac{1}{a}\right)\right)$$

und mit $\left(\frac{1}{g}\right)^{-1}([-\infty, 0]) = g^{-1}([-\infty, 0])$ folgt $\frac{1}{g}$ messbar

\Rightarrow Produkt $f \cdot \frac{1}{g} = \frac{f}{g}$ messbar

- Aus der Messbarkeit der Niveaumengen $\{f > 0\}, \{f < 0\}$ folgt die Messbarkeit von $f^\pm = f \chi_{\{f \gtrless 0\}}$,
 $|f| = f^+ + f^-$, $\max(f, g) = (f - g)^+ + g$, $\min(f, g) = -(f - g)^- + g$
 \Rightarrow a), b)

- Zu c): Verwende

$$\begin{aligned} \left(\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k\right)^{-1}([-\infty, a]) &= \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}([-\infty, a]) \\ \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k\right)^{-1}([-\infty, a]) &= \bigcap_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}([-\infty, a]) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \inf f_k, \sup f_k$ messbar.

- Folglich

$$\left. \begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k &= \sup_{j \geq 1} \inf_{k \geq j} f_k \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k &= \inf_{j \geq 1} \sup_{k \geq j} f_k \end{aligned} \right\} \text{messbar}$$

□

Satz 77.15 (Approximation messbarer Funktionen)

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, D messbar. Dann

$$f \text{ messbar} \Leftrightarrow \exists \text{ Folge } \{h_k\} \text{ von Treppenfunktionen mit } h_k \rightarrow f \text{ f.ü. auf } D$$

Beweis.

„ \Rightarrow “ f messbar, somit auch f^\pm . Setze mit $h_0^\pm := 0$ schrittweise

$$\left. \begin{aligned} M_k^\pm &:= \left\{ x \in D \mid f^\pm(x) \geq \frac{1}{k} + h_{k-1}^\pm \right\}, \\ h_k^\pm &:= \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \chi_{M_j^\pm} \end{aligned} \right\} \text{ für } k \geq 1$$

da h_{k-1}^\pm messbar ist, ist $M_k^\pm = (f^\pm - \frac{1}{k} - h_{k-1}^\pm)^{-1}([0, \infty])$ messbar und h_k^\pm ist Treppenfunktion; $f^\pm \geq h_k^\pm$ auf D .

- Falls $f^\pm(x) = \infty$, dann $x \in M_k^\pm \forall k \in \mathbb{N}$ und $h_k^\pm(x) \rightarrow f^\pm(x)$
- Falls $0 \leq f^\pm(x) < \infty$, dann gilt für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$: $x \notin M_k^\pm$, somit $0 \leq f^\pm(x) - h_{k-1}^\pm < \frac{1}{k}$
 $\Rightarrow h_k^\pm(x) \rightarrow f^\pm(x)$
 $\Rightarrow h_k^+(x) - h_k^-(x) \rightarrow f^+(x) - f^-(x) = f(x)$

„ \Leftarrow “ Sei $\tilde{f}(x) := \limsup_{k \rightarrow \infty} h_k(x) \forall x \in D \Rightarrow f(x) = \tilde{f}(x)$ f.ü. auf D

Nach Satz 77.14: h_k messbar $\Rightarrow \tilde{f}$ messbar

Da $f = \tilde{f}$ f.ü. folgt f messbar. □

Folgerung 77.16

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f \geq 0$

$\Rightarrow \exists$ Folge $\{h_k\}$ von Treppenfunktionen mit $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq f$ auf D und $h_k \rightarrow f$ f.ü. auf D .

Satz 77.17

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und D messbar, $N \subset \mathbb{R}^n$ mit $|N| = 0$ und f stetig auf $D \setminus N$

$\Rightarrow f$ messbar auf D

Beweis. Offenbar $\tilde{D} = D \setminus N$ messbar. Da f stetig auf \tilde{D} ist, ist $f^{-1}(U) \setminus N$ offen in \tilde{D} für $U \subset \mathbb{R}$ offen, d.h. $f^{-1}(U) \setminus N = M \cap \tilde{D}$ für ein $M \subset \mathbb{R}^n$ offen.

$\Rightarrow f^{-1}(U) \setminus N$ messbar

$\xrightarrow{\text{Satz 77.8}}$ $f^{-1}(U)$ messbar

$\Rightarrow f$ messbar. □

■ Beispiel 77.18

Folgende Funktionen sind messbar

- Stetige Funktionen auf offenen und abgeschlossenen Mengen (wähle $N = \emptyset$ im obigen Satz), insbesondere konstante Funktionen sind messbar
- Funktionen auf offenen und abgeschlossenen Mengen, die f.ü. mit einer stetigen Funktion

übereinstimmen

- \tan, \cot auf \mathbb{R} (setzte z.B. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \cot(k\pi) = 0 \forall k$)
- $x \rightarrow \sin \frac{1}{x}$ auf $[-1, 1]$ (setzte beliebigen Wert in $x = 0$)
- $\chi_M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist für $|\partial M| = 0$ messbar auf \mathbb{R} (dann ist χ auf $\text{int } M$, $\text{ext } M$ stetig)

Hinweis: Die DIRICHLET-Funktion ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und somit nach Satz 77.17 messbar. Man beachte aber, dass dies nicht bedeutet, dass die DIRICHLET-Funktion auf \mathbb{R} f.ü. stetig ist! (sie ist nirgends stetig auf \mathbb{R})

Lemma 77.19 (Egorov)

Seien $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ messbar $\forall k \in \mathbb{N}$. Sei $A \subset D$ messbar mit $|A| < \infty$ und gelte $f_k(x) \rightarrow f(x)$ für fa. $x \in A$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ existieren messbare Menge $B \subset A$ mit $|A \setminus B| < \varepsilon$ und $f_k \rightarrow f$ gleichmäßig auf B .

Beweis.

- Offenbar f messbar auf A und Mengen

$$M_{m,l} := \bigcup_{j=l}^{\infty} \left\{ x \in A \mid |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{2^m} \right\}, \quad m, l \in \mathbb{N}$$

sind messbar mit $M_{m,1} \supset M_{m,2} \supset \dots \forall m \in \mathbb{N}$.

Wegen $f_k(x) \rightarrow f(x) \forall x \in A \setminus N$ für eine Nullmenge N folgt $\bigcap_{l \in \mathbb{N}} M_{m,l} \subset N$ und $|\bigcap_{l \in \mathbb{N}} M_{m,l}| = 0 \forall m \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} \exists l_m \in \mathbb{N}$ mit $|M_{m,l_m}| < \frac{\varepsilon}{2^m}$ (vgl. Satz 77.7 (c))

Mit $M := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} M_{m,l_m}$ und $B := A \setminus M$ folgt

$$|A \setminus B| = |M| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |M_{m,l_m}| \leq \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m}}_{\frac{1}{2^m} \text{ ist geometrische Reihe}} = \varepsilon$$

- Weiterhin hat man $\forall m \in \mathbb{N}$

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^m} \quad \forall x \in B, k \geq l_m$$

\Rightarrow gleichmäßige Konvergenz auf B □

■ Beispiel 77.20

Betrachte $f_k(x) = x^k$ auf $[0, 1]$.

Man hat $f_k(x) \rightarrow 0$ f.ü. auf $[0, 1]$ und gleichmäßige Konvergenz auf $[0, \alpha] \forall \alpha \in (0, 1)$.

78. Integral

78.1. Integral für Treppenfunktionen

Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Treppenfunktion mit

$$h = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{M_j}, \text{ d.h. } c_j \in \mathbb{R}, M_j \subset \mathbb{R} \text{ messbar}$$

Definition (integrierbar, Integral, Integralabbildung)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ messbar.

h heißt integrierbar auf M , falls $|M_j \cap M| < \infty \forall j : c_j \neq 0$ und

$$\int_M h \, dx := \int_M h(x) \, dx := \sum_{j=1}^k c_j |M_j \cap M| \quad (1)$$

heißt (elementares) Integral von h auf M .

Menge der auf M integrierbaren Treppenfunktionen ist $T^1(M)$. $\int_M : T^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h \rightarrow \int_M h \, dx$ ist die Integral-Abbildung.

Man verifiziert leicht

Folgerung 78.1

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann gilt:

- (Linearität) Integralabbildung $\int_M : T^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear
- (Monotonie) Integral-Abbildung ist monoton auf $T^1(M)$, d.h.

$$h_1 \leq h_2 \text{ auf } M \Rightarrow \int_M h_1 \, dx \leq \int_M h_2 \, dx$$

- (Beschränktheit) Es ist $|\int_M h \, dx| \leq \int_M |h| \, dx \forall h \in T^1(M)$
- Für $h \in T^1(M)$ gilt:

$$\int_M |h| \, dx = 0 \Leftrightarrow h = 0 \text{ f.ü. auf } M$$

Hinweis: $\int_M |h| \, dx$ ist Halbnorm auf dem Vektorraum $T^1(M)$.

78.2. Erweiterung auf messbare Funktionen

sinnvoll:

- Linearität und Monotonie erhalten
- eine gewisse Stetigkeit der Integral-Abbildung

$$h_k \rightarrow f \text{ in geeigneter Weise} \Rightarrow \int_M h_k \, dx \rightarrow \int_M f \, dx \quad (2)$$

nach Satz 77.15 sollte man in (2) eine Folge von Treppenfunktionen $\{h_k\}$ mit $h_k(x) \rightarrow f(x)$ f.ü. auf M

betrachten, aber es gibt zu viele konvergente Folgen für einen konsistenten Integralbegriff.

■ **Beispiel 78.2**

Betrachte $f = 0$ auf \mathbb{R} , wähle beliebige Folge $\{\alpha_k\} \subset \mathbb{R}$, dazu eine Treppenfunktion

$$h_k(x) = \begin{cases} k \cdot \alpha_k & \text{auf } (0, \frac{1}{k}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar konvergiert h_k gegen 0 **f.ü.** auf \mathbb{R} und man hat $h_k \rightarrow 0$ **f.ü.** auf \mathbb{R} und $\int_{\mathbb{R}} h_k \, dx = \alpha_k$

⇒ je nach Wahl der Folge α_n liegt ganz unterschiedliches Konvergenzverhalten der Folge $\int_{\mathbb{R}} h_k \, dx$ vor

⇒ kein eindeutiger Grenzwert in (2) möglich

⇒ stärkerer Konvergenzbegriff in (2) nötig

Motivation:

- Nur monotone Folgen von Treppenfunktionen, oder
- Beschränktheit aus Folgerung 78.1 erhalten

⇒ jeweils gleiches Ergebnis, jedoch ist die 1. Variante technisch etwas aufwendiger

Beschränktheit aus Folgerung 78.1 c) bedeutet insbesondere

$$\left| \int_M h_k \, dx - \int_M f \, dx \right| = \left| \int_M h_k - f \, dx \right| \leq \int_M |h_k - f| \, dx \quad \forall k$$

man definiert: $h_k \rightarrow f$ **gdw.** $\int_M |h_k - f| \, dx \rightarrow 0$

⇒ Integralabbildung stetig bezüglich dieser Konvergenz.

Wegen $\int_M |h_k - h_l| \, dx \leq \int_M |h_k - f| \, dx + \int_M |h_l - f| \, dx$ müsste $\int_M |h_k - h_l| \, dx$ klein sein $\forall h, l$ groß.

78.3. Lebesgue-Integral

Definition (L^1 -Cauchy-Folge, Lebesgue-Integral)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, Folge $\{h_k\}$ in $T^1(M)$ heißt L^1 -CAUCHY-Folge (kurz L^1 -CF), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \int_M |h_k - h_l| dx < \varepsilon \quad \forall h, l > k_0$$

Messbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt integrierbar auf $M \subset D$, falls Folge von Treppenfunktionen $\{h_k\}$ in $T^1(M)$ existiert mit $\{h_k\}$ ist L^1 -CF auf M und $H_k \rightarrow f$ **f.ü.** auf M .

Für integrierbare Funktion f heißt eine solche Folge $\{h_k\}$ zugehörige L^1 -CF auf M .

Wegen

$$\left| \int_M h_k dx - \int_M h_l dx \right| = \left| \int_M (h_k - h_l) dx \right| \stackrel{78.1}{\leq} \int_M |h_k - h_l| dx \quad (5)$$

ist $\{\int_M h_k dx\}$ CAUCHY-Folge in \mathbb{R} und somit konvergent.

Der Grenzwert

$$\int_m f dx := \int_M f(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M h_k dx \quad (6)$$

heißt (**LEBESGUE**)-Integral von f auf M .

Hinweis: Integrale unter dem Grenzwert in (6) sind elementare Integrale gemäß (1).

Sprechweise: f integrierbar auf M bedeutet stets $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $M \subset D$ messbar

Definition (Menge der integrierbaren Funktionen)

Menge der auf M integrierbaren Funktionen ist

$$L^1(M) := \left\{ f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ integrierbar auf } M \right\}$$

► Bemerkung 78.3

- Integral in (6) kann als vorzeichenbehaftetes Volumen des Zylinders im \mathbb{R}^{n+1} unter (über) dem Graphen von f interpretiert werden.
- Sei $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots$ monotone Folge von integrierbaren Treppenfunktionen mit $h_k \rightarrow f$ **f.ü.** auf M und sei Folge $\{\int_M h_k dx\}$ in \mathbb{R} beschränkt
 \Rightarrow (6) gilt und monotone Folge $\{\int_m h_k dx\}$ konvergiert in \mathbb{R} (d.h. $\{h_k\}$ ist L^1 -CF zu f)
- $\{h_k\}$ aus Beispiel 78.2 ist nur dann L^1 -CF, falls $\alpha_k \rightarrow 0$.

Frage: Ist die Definition des Integrals in (6) unabhängig von der Wahl einer konkreten L^1 -CF $\{h_k\}$ zu f ?

Satz 78.4

Definition des Integrals in (6) ist unabhängig von der speziellen Wahl einer L^1 -CF $\{h_k\}$ zu f .

Vgl. Integral $\int_M h dx$ einer Treppenfunktion gemäß (1) mit dem in (6):

Offenbar ist konstante Folge $\{h_k\}$ mit $h_k = h \forall k$ L^1 -CF zu h

$\xrightarrow[78.4]{(6)}$ Integral $\int_M h \, dx$ in (6) stimmt mit elementarem Integral in (1) überein.

Folgerung 78.5

Für eine Treppenfunktion stimmt das in (1) definierte elementare Integral mit dem in (6) definierte Integral überein. Insbesondere ist der vor (1) eingeführte Begriff integrierbar mit dem in (4) identisch

\Rightarrow wichtige Identität (1) mit Treppenfunktion χ_M für $|M| < \infty$:

$$|M| = \int_M 1 \, dx = \int_M dx \quad \forall M \in \mathbb{R}, M \text{ messbar,}$$

d.h. das Integral liefert Maß für messbare Mengen.

Beweis (Satz 78.4). beachte: alle Integrale im Beweis sind elementare Integrale gemäß (1).

- Sei $f : M \subset \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und seien $\{h_k\}, \{\tilde{h}_k\}$ zugehörigen L^1 -CF in $T^1(M)$.
 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k_0$ mit

$$\int_M |(h_k + \tilde{h}_k) - (h_l + \tilde{h}_l)| \, dx \leq \int_M |h_k - h_l| + |\tilde{h}_k - \tilde{h}_l| \, dx < \varepsilon \quad \forall k, l \geq k_0$$

$\Rightarrow \{h_k - \tilde{h}_k\}$ ist L^1 -CF mit $(h_k - \tilde{h}_k) \rightarrow 0$ f.ü. auf M .

Da $\{\int_M h_k \, dx\}, \{\int_M \tilde{h}_k \, dx\}$ in \mathbb{R} konvergieren, bleibt zu zeigen: $\{h_k\}$ ist L^1 -CF in $T^1(M)$ mit $h_k \rightarrow 0$ f.ü. auf M

$$\Rightarrow \int_M h_k \, dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \tag{7}$$

Da Konvergenz von $\{\int_M h_k \, dx\}$ bereits bekannt ist, reicht es, den Grenzwert für eine TF zu zeigen.

- Wähle TF derart, dass $\int_M |h_k - h_l| \, dx \leq \frac{1}{2^l} \forall k \geq l$
 Fixiere $l \in \mathbb{N}$ und definiere $M_l := \{x \in M \mid h_l(x) \neq 0\}$, offenbar ist M messbar mit $|M_l| < \infty$.
 Sei nun $\varepsilon_l := \frac{1}{2^l \cdot |M_l|}$ falls $|M_l| > 0$ und $\varepsilon_l = 1$ falls $|M_l| = 0$.
 Weiterhin sei $M_{l,k} := \{x \in M_l \mid |h_k(x)| > \varepsilon_l\}$, und für $k > l$ folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_M h_k \, dx \right| &\leq \int_M |h_k| \, dx = \int_{M_l} |h_k| \, dx + \int_{M \setminus M_l} |h_k| \, dx \\ &\leq \int_{M \setminus M_{l,k}} |h_k| \, dx + \int_{M_{l,k}} |h_k| \, dx + \int_{M \setminus M_l} |h_k - h_l| \, dx + \underbrace{\int_{M \setminus M_l} |h_l| \, dx}_{=0} \\ &\leq \varepsilon_l |M_l| + \int_{M_{l,k}} |h_k - h_l| \, dx + \int_{M_{l,k}} |h_l| \, dx + \frac{1}{2^l} \\ &\leq \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^l} + c_l \cdot |M_{l,k}| + \frac{1}{2^l} \end{aligned}$$

mit $c_l := \sup_{x \in M} |h_l(x)|$, $\exists k_l > l$ mit Lemma 77.19 folgt $|\{x \in M_l \mid |h_k(x)| > \varepsilon_l\}| \leq \frac{1}{2^{l \cdot (c_l + 1)}} \forall k > k_l$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \int_M h_k \, dx \right| &\leq \frac{4}{2^l} \forall k > k_l \\ \xrightarrow[\text{beliebig}]{l \in \mathbb{N}} \int_M h_k \, dx &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Satz 78.6 (Rechenregeln)Seien f, g integrierbar auf $M \subset \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Danna) (Linearität) $f \pm g, cf$ sind integrierbar auf M mit

$$\begin{aligned}\int_M f \pm g \, dx &= \int_M f \, dx + \int_M g \, dx \\ \int_M cf \, dx &= c \int_M f \, dx\end{aligned}$$

b) Sei $\tilde{M} \subset \mathbb{M}$ messbar $\Rightarrow f\chi_{\tilde{M}}$ ist integrierbar auf M und f ist integrierbar auf \tilde{M} mit

$$\int_M f \cdot \chi_{\tilde{M}} \, dx = \int_{\tilde{M}} f \, dx$$

c) Sei $M = M_1 \cup M_2$ für M_1, M_2 disjunkt und messbar $\Rightarrow f$ ist integrierbar auf M_1 und M_2 mit

$$\int_M f \, dx = \int_{M_1} f \, dx + \int_{M_2} f \, dx$$

d) Sei $f = \tilde{f}$ f.ü. auf M $\Rightarrow \tilde{f}$ ist integrierbar auf M mit

$$\int_M f \, dx = \int_M \tilde{f} \, dx$$

e) Die Nullfortsetzung $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ von f (vgl. Satz 77.12) ist auf jeder messbaren Menge $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar mit

$$\int_{M \cap \tilde{M}} f \, dx = \int_{\tilde{M}} \tilde{f} \, dx$$

Aussage d) bedeutet, dass eine Änderung der Funktionswerte von f auf einer Nullmenge das Integral nicht verändert.

Beweis. Seien $\{h_k\}$ und $\{\tilde{h}_k\}$ aus $T^1(\mathbb{R})^n$ L^1 -CF zu f und g .

zu a) Es ist $h_k + \tilde{h}_k \rightarrow f + g$ f.ü. auf M .

Wegen

$$\int_M |(h_k + \tilde{h}_k) - (h_l + \tilde{h}_l)| \, dx \leq \underbrace{\int_M |h_k - h_l| \, dx}_{=L^1\text{-CF, } < \varepsilon} + \underbrace{\int_M |\tilde{h}_k - \tilde{h}_l| \, dx}_{=L^1\text{-CF, } < \varepsilon}$$

ist $\{h_k + \tilde{h}_k\}$ L^1 -CF zu $f + g$.

$\Rightarrow f + g$ ist integrierbar auf M und Grenzübergang in

$$\int_M h_k + \tilde{h}_k \, dx = \int_M h_k \, dx + \int_M \tilde{h}_k \, dx$$

liefert die Behauptung für $f + g$.

Analog zu *cf*. Wegen $f - g = f + (-g)$ folgt die letzte Behauptung.

zu b) Offenbar ist $\{\chi_{\tilde{m}h_k}\}$ L^1 -CF zu $\chi_{\tilde{M}}f$ und $\{h_k\}$ L^1 -CF zu f auf \tilde{M} .

Mit

$$\int_M h_k \chi_{\tilde{M}} \, dx = \int_{\tilde{M}} h_k \, dx \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

folgt die Behauptung durch Grenzübergang.

zu c) Nach **b)** ist f auf M_1 und M_2 integrierbar. Wegen $f = \chi_{M_1}f + \chi_{M_2}f$ folgt die Behauptung aus **a)** und **b)**.

zu d) Da $\{h_k\}$ auch L^1 -CF zu \tilde{f} ist, folgt die Integrierbarkeit mit dem gleichen Integral.

zu e) Es ist $\{\chi_{M \cap \tilde{M}}h_k\}$ L^1 -CF zu f auf $M \cap \tilde{M}$ und auch zu \tilde{f} auf \tilde{M} . Damit folgt die Behauptung. \square

Satz 78.7 (Eigenschaften)

Es gilt

a) (Integrierbarkeit) Für $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar gilt:

$$f \text{ integrierbar auf } M \Leftrightarrow |f| \text{ integrierbar auf } M$$

b) (Beschränktheit) Sei f integrierbar auf M , dann

$$\left| \int_M f \, dx \right| \leq \int_M |f| \, dx$$

c) (Monotonie) Seien f, g integrierbar auf M . Dann

$$f \leq g \text{ f.ü. auf } M \Rightarrow \int_M f \, dx \leq \int_M g \, dx$$

d) Sei f integrierbar auf M , dann

$$\int_M |f| \, dx = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ f.ü.}$$

In Analogie zur Treppenfunktion ist $\|f\|_1 := \int_M |f| \, dx$ auf $L^1(M)$ eine Halbnorm, aber keine Norm ($\|f\| = 0 \not\Rightarrow f = 0$). $\|f\|_1$ heißt L^1 -Halbnorm von f .

Hinweis: Eine lineare Abbildung $A : X \rightarrow Y$ ist beschränkt, wenn $\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$

\Rightarrow Begriff der Beschränktheit in **b)**.

Beweis.

zu a) Sei f integrierbar auf M und sei $\{h_k\}$ L^1 -CF zu f

$\Rightarrow |h_k| \rightarrow |f|$ f.ü. auf M .

Wegen $\int_M \| |h_k| - |h_l| \| \, dx \stackrel{\text{Folgerung 78.1}}{\leq} \int_M |h_k - h_l| \, dx$ ist $\{|h_k|\}$ L^1 -CF zu $|f|$

$\Rightarrow |f|$ ist integrierbar.

beachte: andere Richtung später

zu b) Für eine L^1 -CF $\{h_k\}$ zu f gilt nach Folgerung 78.1 c):

$$\left| \int_M h_k \, dx \right| \leq \int_M |h_k| \, dx$$

Da $\{|h_k|\}$ L^1 -CF zu $|f|$ ist, folgt die Behauptung durch Grenzübergang.

zu c) Nach den Rechenregeln ist $g - f$ integrierbar, wegen $|g - f| = g - f$ f.ü. auf M folgt

$$0 \leq \left| \int_M g - f \, dx \right| \stackrel{b)}{\leq} \int_M |g - f| \, dx \stackrel{\text{Satz 78.6 a)}}{=} \int_M g \, dx - \int_M f \, dx$$

\Rightarrow Behauptung

zu a) für „ \Leftarrow “ wähle f^\pm ($f = f^+ - f^-$) jeweils eine monotone Folge von TF $\{h_k^\pm\}$ gemäß Folgerung 77.16.

Folglich liefert $H_k = h_k^+ - h_k^-$ eine Folge von TF mit $h_k \rightarrow f$ f.ü. auf M .

Wegen $|h_k| \leq |f|$ f.ü. auf M ist $\int_M |h_k| \, dx \leq \int_M |f| \, dx$.

Folglich ist die monotone Folge $\int_M |h_k| \, dx$ in \mathbb{R} beschränkt

\Rightarrow konvergent.

Da h_k^\pm jeweils das Vorzeichen wie f^\pm haben und die Folge monoton ist, gilt

$$||h_l| - |h_k|| = |h_l| - |h_k| = |h_l - h_k| \quad \forall l > k$$

und somit auch

$$\int_M |h_l - h_k| \, dx = \int_M |h_l| - |h_k| \, dx = \left| \int_M |h_l| \, dx - \int_M |h_k| \, dx \right| \quad \forall l > k$$

Als konvergente Folge ist $\{\int_M |h_k| \, dx\}$ CAUCHY-Folge in \mathbb{R} und folglich ist $\{h_k\}$ L^1 -CF und sogar L^1 -CF zu f

$\Rightarrow f$ integrierbar

zu d) Für $f = 0$ f.ü. auf M ist offenbar $\int_M |f| \, dx = 0$.

Sei nun $\int_M |f| \, dx = 0$, mit $M_k := \{x \in M \mid |f| \geq \frac{1}{k}\} \forall k \in \mathbb{N}$ ist

$$0 = \int_{M \setminus M_k} |f| \, dx + \int_{M_k} |f| \, dx \geq \int_{M \setminus M_k} 0 \, dx + \int_{M_k} \frac{1}{k} \, dx \geq \frac{1}{k} |M_k| \geq 0$$

$$\Rightarrow |M_k| = 0 \quad \forall k, \text{ wegen } \{f \neq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$$

$$\Rightarrow |\{f \neq 0\}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |M_k| = 0$$

\Rightarrow Behauptung □

Folgerung 78.8

Sei f auf M integrierbar

a) Für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\alpha_1 \leq f \leq \alpha_2 \text{ f.ü. auf } M \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 |M| \leq \int_M f \, dx \leq \alpha_2 |M|$$

b) Es gilt $f \geq 0$ f.ü. auf $M \quad \Rightarrow \quad \int_M f \, dx \geq 0$

c) Es gilt: $\tilde{M} \subset M$ messbar, $f \geq 0$ f.ü. auf M

$$\Rightarrow \int_{\tilde{M}} f \, dx \leq \int_M f \, dx$$

(linkes Integral nach Satz 78.6 b))

Beweis.

zu a) Wegen $\int_M \alpha_j \, dx = \alpha_j |M|$ für $|M|$ endlich folgt a) direkt aus der Monotonie des Integrals.

zu b) folgt mit $\alpha_1 = 0$ aus a)

zu c) folgt, da $\chi_{\tilde{M}} \cdot f \leq f$ f.ü. auf M und aus der Monotonie \square

In der Vorüberlegung zum Integral wurde eine gewisse Stetigkeit der Integralabbildung angestrebt. Das Integral ist bezüglich der L^1 -Halbnorm stetig.

Satz 78.9

Seien $f, f_k : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar auf $M \subset \mathbb{R}^n$ und sei

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_M |f_k - f| \, dx = 0 \quad (\|f_k - f\| \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k \, dx = \int_M f \, dx$$

Weiterhin gibt es eine Teilfolge $\{f_{k'}\}$ mit $f_{k'} \rightarrow f$ f.ü. auf M .

Beweis. Aus der Beschränktheit nach Satz 78.7 folgt

$$\left| \int_M f_k \, dx - \int_M f \, dx \right| \leq \int_M |f_k - f| \, dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

\Rightarrow 1. Konvergenzaussage

Wähle nun eine TF $\{f_{k_l}\}_l$ mit $\int_M |f_{k_l} - f| \, dx \leq \frac{1}{2^{l+1}} \quad \forall l \in \mathbb{N}$.

Für $\varepsilon > 0$ sei $M_\varepsilon := \{x \in M \mid \limsup_{l \rightarrow \infty} |f_{k_l} - f| > \varepsilon\}$

$$\Rightarrow M_\varepsilon \subset \bigcup_{l=j}^{\infty} \{|f_{k_l} - f| > \varepsilon\} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow M_\varepsilon \leq \sum_{l=j}^{\infty} |\{|f_{k_l} - f| > \varepsilon\}| \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{l=j}^{\infty} \int_M |f_{k_l} - f| \, dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{l=j}^{\infty} \frac{1}{2^{l+1}} = \frac{1}{2^j \varepsilon} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow M_\varepsilon = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow f_{k_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} f \text{ f.ü. auf } M \quad \square$$

Satz 78.10 (Majorantenkriterium)

Seien $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar, M messbar, $|f| \leq g$ f.ü. auf M , g integrierbar auf M
 $\Rightarrow f$ integrierbar auf M

Man nennt g auch integrierbare Majorante von f .

Lemma 78.11

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar auf M , sei $f \geq 0$ auf M und sei $\{h_k\}$ Folge von Treppenfunktionen mit

$$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq f \quad \text{und} \quad \int_M h_k \, dx \text{ beschränkt} \quad (8)$$

$\Rightarrow \{h_k\}$ ist L^1 -CF zu f und falls $\{h_k\} \rightarrow f$ f.ü. auf M ist f integrierbar (vgl Folgerung 77.16)

Beweis. Offenbar sind alle h_k integrierbar und wegen der Monotonie gilt

$$\left| \int_M h_k \, dx - \int_M h_l \, dx \right| = \int_M |h_k - h_l| \, dx \quad \forall k \geq l$$

Da $\{\int_M h_k \, dx\}$ konvergent ist in \mathbb{R} als monoton beschränkte Folge ist diese CF in \mathbb{R}
 $\Rightarrow \{h_k\}$ ist L^1 -CF

Falls noch $h_k \rightarrow f$ f.ü. $\Rightarrow \{h_k\}$ ist L^1 -CF zu $f \Rightarrow f$ ist integrierbar □

Beweis (Satz 78.10). (mit f auch $|f|$ mesbbar nach Folgerung 77.16)

Es existiert eine Folge $\{h_k\}$ von Treppenfunktionen mit

$$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq |f| \leq g$$

auf M und $\{h_k\} \rightarrow |f|$ f.ü. auf M .

Da $\{\int_M h_k \, dx\}$ beschränkt ist in \mathbb{R} da g integrierbar ist

$\xrightarrow{\text{Lemma 78.11}}$ $\{h_k\}$ ist L^1 -Cf zu $|f|$

$\Rightarrow |f|$ integrierbar

$\xrightarrow{\text{Satz 78.7}}$ f integrierbar auf M □

Folgerung 78.12

Seien $f, g : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar, $|M|$ endlich. Dann

- a) Falls f beschränkt ist auf M , dann ist f integrierbar auf M
- b) Sei f beschränkt und g integrierbar auf M
 $\Rightarrow f \cdot g$ ist integrierbar auf M

Hinweis: Folglich sind stetige Funktionen auf kompaktem M integrierbar (vgl. Theorem von Weierstraß)

Beweis. Sei $|f| \leq \alpha$ auf M für $\alpha \in \mathbb{Q}$

zu a) \Rightarrow konstante Funktion $f_1 = \alpha$ ist integrierbare Majorante von $|f|$

zu b) Mit $f_2 = \alpha \cdot |g|$ ist f_2 integrierbare Majorante zu $|f \cdot g|$ $\xrightarrow{\text{Majorantenkriterium}}$ Behauptung □

78.4. Grenzwertsätze

$\int_M f_k \, dx \xrightarrow{?} \int_M f \, dx$ Vertauschbarkeit von Integration und Grenzübergang ist zentrale Frage \rightarrow grundlegende Grenzwertsätze $\int_M |f_k - f| \, dx \rightarrow 0$

Theorem 78.13 (Lemma von Fatou)

Seien $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ integrierbar auf $M \subset D \forall k \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow f(x) := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \forall x \in M$ ist integrierbar auf M und

$$\left(\int_M f \, dx = \right) \int_M \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \, dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k \, dx,$$

falls der Grenzwert rechts existiert.

Keine Gleichheit hat man z.B. für $\{h_k\}$ aus Beispiel 78.2 mit $\alpha_k = 1 \forall k$

$$h_k = \begin{cases} h \cdot \alpha_k & x \in [0, \frac{1}{k}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann

$$\int_M \liminf_{k \rightarrow \infty} h_k \, dx = \int_M 0 \, dx = 0 < \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} h_k \, dx = 1$$

Beweis. Auf M ist $0 \leq g_k := \inf_{l \geq k} f_l \leq f_j \forall j \geq k, k \in \mathbb{N}, g_1 \leq g_2 \leq \dots$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = f$

Alle g_k sind messbar nach Satz 77.14, Satz 78.10

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wählen wir gemäß Folgerung 77.16 eine Folge $\{h_{k_l}\}_l$ von Treppenfunktionen mit $0 \leq h_{k_1} \leq h_{k_2} \leq \dots \leq g_k, h_{k_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} g_k$ f.ü. auf M .

Nach Lemma 78.11 ist $\{h_{k_l}\}_l$ L^1 -CF zu g_k .

Anwendung von Lemma 77.19 auf $g_k - f$ auf $B_k(0) \cap M$

$\Rightarrow \exists A'_k \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $|A'_k| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ und (ggf. TF) $|g_k - f| < \frac{1}{k}$ auf $(B_k(0) \cap M) \setminus A'_k$.

Analog für Folge $h_{k_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} g_k : \exists A''_k \subset \mathbb{R}^k$ mit $|A''_k| < \frac{1}{2^{k+1}}$ und (evtl. TF) $|h_{k_l} - g_k| < \frac{1}{k}$ auf $(B_k(0) \cap M) \setminus A''_k$

Setze $A_k = A'_k \cup A''_k$, offenbar $|A_k| < \frac{1}{2^k}, h_k := h_{k_l}$

Definiere rekursiv $\tilde{h}_1 := h_1, \tilde{h}_k := \max(\tilde{h}_{k-1}, h_k)$

$\Rightarrow h_k \leq \tilde{h}_k \leq g_k \leq f_k$ und $\tilde{h}_{k-1} \leq \tilde{h}_k \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |\tilde{h}_k - f| \stackrel{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} |\tilde{h}_k - g_k| + |g_k - f| \leq |h_k - g_k| + |g_k - f| \leq \frac{2}{k}$ auf $(B_k(0) \cap M) \setminus A_k$.

Mit $\tilde{A}_l := \bigcup_{k=l}^{\infty} A_k$ folgt $|\tilde{A}_l| \leq \frac{1}{2^{l-1}}$ und $|\tilde{h}_k - f| \leq \frac{2}{k}$ auf $(B_k(0) \cap M) \setminus \tilde{A}_l \forall k > l$.

Folglich $\tilde{h}_l \rightarrow f$ f.ü. auf M und wegen der Monotonie ist $\{\tilde{h}_k\}$ L^1 -CF zu f

$\Rightarrow \int_M f \, dx \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M \tilde{h}_k \, dx \stackrel{\text{Monotonie}}{\leq} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k \, dx$

\Rightarrow Behauptung □

Theorem 78.14 (Monotone Konvergenz)

Seien $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar auf $M \subset D \forall k \in \mathbb{N}$ mit $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ f.ü. auf M
 $\Rightarrow f$ ist integrierbar auf M und

$$\left(\int_M f \, dx = \right) \int_M \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k \, dx$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

► Bemerkung 78.15

Theorem 78.14 bleibt richtig, falls man $f_1 \geq f_2 \geq \dots$ f.ü. auf M hat.

Ferner ist wegen der Monotonie die Beschränktheit der Folge $\{\int_M f_k \, dx\}$ für die Existenz des Grenzwertes ausreichend.

Beweis (Theorem 78.14). Nach Theorem 78.13 ist $f - f_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k - f_1$ integrierbar auf M und damit auch $f = (f - f_1) + f_1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_M f - f_1 \, dx &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k - f_1 \, dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k \, dx - \int_M f_1 \, dx \stackrel{\text{Monotonie}}{\leq} \int_M f \, dx - \int_M f_1 \, dx \\ &= \int_M f - f_1 \, dx \quad \square \end{aligned}$$

Theorem 78.16 (Majorisierte Konvergenz)

Seien $f_k, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar für $k \in \mathbb{N}$ und sei g integrierbar auf $M \subset D$ mit $|f_k| \leq g$ f.ü. auf $M \forall k \in \mathbb{N}$ und $f_k \rightarrow f$ f.ü. auf M

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M |f_k - f| \, dx = 0 \quad (9)$$

und

$$\left(\int_M f \, dx = \right) \int_M \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k \, dx,$$

wobei alle Integrale existieren.

Beweis. Nach dem Majorantenkriterium sind alle f_k f.ü. integrierbar auf M .

Nach Theorem 78.13 gilt:

$$\int_M 2g \, dx = \int_M \liminf_{k \rightarrow \infty} |2g - |f_k - f|| \, dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_M 2g - |f_k - f| \, dx$$

$$\Rightarrow 0 = \liminf_{k \rightarrow \infty} - \int_M |f_k - f| \, dx \Rightarrow (9) \xrightarrow{\text{Satz 78.9}} \text{Behauptung} \quad \square$$

Folgerung 78.17

Seien $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar auf $M \forall k \in \mathbb{N}$. Sei $|M| < \infty$ und konvergieren die $f_k \rightarrow f$ gleichmäßig auf M

$\Rightarrow f$ ist integrierbar auf M und $\int_M f \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k \, dx$

Beweis. $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f_k(x)| \leq |f_{k_0}(x) + 1| \forall x \in M, k > k_0$.

Da $f_{k_0} + 1$ integrierbar auf M folgt die Behauptung aus Theorem 78.16. □

Theorem 78.18 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und zusammenhängend, und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$\Rightarrow \exists \xi \in M : \int_M f \, dx = f(\xi) \cdot |M|$$

Beweis. Aussage klar für $|M| = 0$, deshalb wähle $|M| > 0$.

Da f stetig auf M kompakt

$$\xrightarrow[\text{36.3}]{\text{Weierstrass}} \exists \text{ Minimalstelle } x_1 \in M, \text{ Maximalstelle } x_2 \in M \text{ und } \gamma := \int_M f \, dx$$

$$\xrightarrow{\text{Folgerung 78.8}} f(x_1) \leq \frac{\gamma}{|M|} \leq f(x_2)$$

$$\xrightarrow[\text{36.11}]{\text{Zwischenwertsatz}} \exists \xi \in M : f(\xi) = \frac{\gamma}{|M|}$$

\Rightarrow Behauptung □

78.5. Parameterabhängige Integrale

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $P \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge von Parametern und sei $f : M \times P \rightarrow \mathbb{R}$.

Betrachte parameterabhängige Funktion

$$F(p) := \int_M f(x, p) \, dx \tag{10}$$

Satz 78.19 (Stetigkeit)

Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $P \subset \mathbb{R}^n$ und $f : M \times P \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

- $f(\cdot, p)$ messbar $\forall p \in P$
- $f(x, \cdot)$ stetig für fa. $x \in M$

Weiterhin gebe es integrierbare Funktion $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- $|f(x, p)| \leq g(x)$ für fa. $x \in M$

\Rightarrow Integrale in (10) existieren $\forall p \in P$ und F ist stetig auf P .

Beweis. $f(\cdot, p)$ ist integrierbar auf $M \forall p \in P$ nach Satz 78.10.

Fixiere p und $\{p_k\}$ in P mit $p_k \rightarrow p$.

Setzte $f_k(x) := f(x, p_k)$

Stetigkeit von $f(x, \cdot)$ liefert $f_k(x) = f(x, p_k) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} f(x, p)$ für fa. $x \in M$. $\xrightarrow{\text{Theorem 78.16}}$ $F(p_k) = \int_M f_k(x) dx \rightarrow \int_M f(x, p) dx = F(p)$
 $\xrightarrow[\text{beliebig}]{p \in P}$ Behauptung

Satz 78.20 (Differenzierbarkeit)

Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $P \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : M \times P \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\cdot, p)$ integrierbar auf $M \forall p \in P$.
 und

- $f(x, \cdot)$ stetig diffbar auf P für fa. $x \in M$

Weiterhin gebe es eine integrierbare Funktion $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- $|f_p(x, p)| \leq g(x)$ für fa. $x \in M$ und $\forall p \in P$

$\Rightarrow F$ aus (10) ist diffbar auf P mit

$$F'(p) = \int_M f_p(x, p) dx \quad (11)$$

Hinweis: Das Integral in (11) ist komponentenweise zu verstehen und liefert für jedes $p \in P$ einen Wert im \mathbb{R}^m .

Betrachtet man für $p = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^m$ nur p_j als Parameter und fixiert andere p_i , dann liefert (11) die partielle Ableitung $F_{p_j}(p) = \int_M f_{p_j}(x, p) dx$ für $j = 1, \dots, m$.

Beweis. Königsberger: Analysis 2 (Abschnitt 8.4) □

78.6. Riemann-Integral

Der klassische Integralbegriff hat konzeptionelle Bedeutung (Einführung etwas einfacher, keine messbaren Mengen und Funktionen)

\Rightarrow weniger Leistungsfähig (Anwendung nur in speziellen Situationen)

ebenfalls: Approximation von der zu integrierenden Funktion f durch geeignete Treppenfunktionen

Sei $f : Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Q \in \mathcal{Q}$ eine beschränkte Funktion. Betrachte die Menge der Treppenfunktionen $T_{\mathcal{Q}}(Q)$, der Form

$$h = \sum_{j=1}^l c_j \chi_{Q_j} \quad \text{mit} \quad \bigcup_{j=1}^l Q_j = Q,$$

$Q_j \in \mathcal{Q}$ paarweise disjunkt, $c_j \in \mathbb{R}$.

Quader $\{Q_j\}_{j=1, \dots, l}$ werden als Zerlegung zugehörig zu h bezeichnet.

Definition (Feinheit, Riemann-Summe, Riemann-Folge)

Für Quader $Q' = F'_1 \times \dots \times F'_n \in \mathcal{Q}$ mit Intervallen $F_j \subset \mathbb{R}$ heißt $\sigma_{Q'} := \max_j |I'_j|$ ($|I'_j|$ - Intervalllänge) Feinheit von Q' (setzte $\sigma_\emptyset = 0$).

Für $h = \sum_{j=1}^l c_j \chi_{Q_j}$ heißt $\sigma_h := \max \sigma_{Q_j}$ Feinheit zur Treppenfunktion h .

Treppenfunktion $h = \sum_{j=1}^l c_j \chi_{Q_j} \in T_{\mathcal{Q}}(Q)$ heißt zulässig (RIEMANN-zulässig) für f falls $\forall j \exists x_j \in Q_j : c_j = f(x_j)$, d.h. auf jedem Quader Q_j stimmt h mit f in (mindestens) einem Punkt x_j überein.

Zu zulässigen h nennen wir $S(h) := \sum_{j=1}^l c_j |Q_j| = \sum_{j=1}^l f(x_j) \cdot |Q_j|$ RIEMANN-Summe zu h .

Folge $\{h_k\}$ zulässiger Treppenfunktionen zu f , deren Feinheit gegen Null geht (d.h. $\sigma_{h_k} \rightarrow 0$) heißt RIEMANN-Folge zu f .

f heißt RIEMANN-integrierbar (kurz R-integrierbar) auf Q , falls $S \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} S(h_k) \quad (12)$$

für alle RIEMANN-Folgen $\{h_k\}$ zu f .

Grenzwert $\int_Q f(x) dx := S$ heißt RIEMANN-Integral (kurz R-Integral) von f auf Q .

Satz 78.21

Sei $f : Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $Q \in \mathcal{Q}$ abgeschlossen

$\Rightarrow f$ ist (LEBESGUE) integrierbar und RIEMANN-Integrierbar auf Q mit $R\text{-}\int_Q f dx = \int_Q f dx$.

► Bemerkung 78.22

Sei $f : Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und es sei $N := \{x \in Q \mid f \text{ nicht stetig in } x\}$.

Dann kann man zeigen: f ist RIEMANN-Integrierbar, wenn n Nullmenge ist.

$$f \text{ ist R-integrierbar} \Leftrightarrow N \text{ ist Nullmenge.}$$

Man sieht leicht: die DIRICHLET-Funktion (Beispiel 77.5) ist auf $[0, 1]$ nicht R-integrierbar, da die Treppenfunktionen $h_0 = 0$ und $h_1 = 1$ auf $[0, 1]$ mit beliebig feiner Zerlegung $\{Q_j\}$ jeweils stets zulässig sind, sich jedoch in der RIEMANN-Summe 0 bzw. 1 unterscheiden. (Die DIRICHLET-Funktion ist jedoch L-integrierbar)

Beweis (Satz 78.21). Als stetige Funktion ist f auf Q messbar und beschränkt und somit L-integrierbar.

Fixiere $\varepsilon > 0$ und sei $h = \sum_{j=1}^{l_k} f(x_{k_j}) \chi_{Q_j}$ RIEMANN-Folge von Treppenfunktionen zu f .

Für $|Q| = 0$ folgt die Behauptung leicht, da $S(h_k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$

Sei nun $|Q| > 0$. Da f auf kompakter Menge Q gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{|Q|}$ falls $|x - \tilde{x}| < \delta$.

Da $\sigma_{h_k} \rightarrow 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \sigma_{h_k} < \frac{\delta}{\sqrt{n}} \forall k \geq k_0$

$$\Rightarrow |x - \tilde{x}| < \delta \forall x, \tilde{x} \in Q_{k_j} \text{ falls } k \geq k_0 \text{ und } |f(x) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{|Q|} \forall x \in Q_{k_j} \text{ mit } k \geq k_0$$

$$\Rightarrow \left| \int_Q f dx - \int_Q h_k dx \right| \leq \int_Q |f - h_k| dx \leq \frac{\varepsilon}{|Q|} \cdot |Q| = \varepsilon \forall k \geq k_0$$

Da $S(h_k) = \int_Q h_k \, dx$ und $\varepsilon > 0$ beliebig folgt $S(h_k) \rightarrow \int_Q f \, dx$.

Für jede RIEMANN-Folge $\{h_k\}$ zu f ist f R-integrierbar und Behauptung folgt. \square

79. Integration auf \mathbb{R}

79.1. Integrale konkret ausrechnen

$\int_I f \, dx$ auf Intervalle $I = (\alpha, \beta) \subset \overline{\mathbb{R}}$ (mit $\alpha \leq \beta$) (da Randpunkte eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ nur Nullmenge sind, könnte man statt offenem Intervall auch abgeschlossene bzw. halboffene Intervalle verwenden, ohne den Integralwert zu ändern)

Schreibweise:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f \, dx := \int_I f \, dx \quad \text{und} \quad \int_{\beta}^{\alpha} f \, dx := - \int_{\alpha}^{\beta} f \, dx$$

($\alpha = -\infty$ bzw. $\beta = +\infty$ zugelassen)

beachte: alle Intervalle sind messbare Mengen nach Satz 77.6, Satz 77.8.

$\int_{\alpha}^{\beta} f \, dx$ heißt auch bestimmtes Integral von f auf I .

Nach Satz 77.6 (b):

Satz 79.1

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf I . Dann ist I auch auf allen Teilintervallen $\tilde{I} \subset I$ integrierbar.

Theorem 79.2 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und integrierbar auf Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in I$. Dann

- $\tilde{F} : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{F}(x) := \int_{x_0}^x f(y) \, dy \, \forall x \in I$ ist Stammfunktion von f auf I .
- Für jede Stammfunktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf F gilt:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx \quad \forall a, b \in I \quad (1)$$

► Bemerkung 79.3

- damit besitzt jede stetige Funktion auf I eine Stammfunktion
- (1) ist zentrale Formel zur Berechnung von Integralen auf f der reellen Achse; die linke Seite in (1) schreibt man auch kurz

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b = F|_a^b = [F(x)]_a^b = [F]_a^b$$

Beweis.

zu a) Fixiere $x \in I$. Dann gilt für $t \neq 0$

$$\frac{\tilde{F}(x+t) - \tilde{F}(x)}{t} = \frac{1}{t} \left(\int_{x_0}^{x+t} f \, dy - \int_{x_0}^x f \, dy \right) = \frac{1}{t} \int_x^{x+t} f \, dy =: \varphi(t),$$

wobei nach Satz 79.1 alle Integrale existieren.

$\xrightarrow{\text{Theorem 78.18}}$ $\forall t \neq 0 \exists \xi_t \in [x, x+t]$ (bzw. $[x+t, x]$ für $t < 0$): $\varphi(t) = \frac{1}{|t|} f(\xi_t) |t| = f(\xi_t)$
 $\xrightarrow{f \text{ stetig}}$ $\tilde{F}'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = f(x)$
 \Rightarrow Behauptung

zu b Für eine beliebige Stammfunktion F von f gilt: $F(x) = \tilde{F}(x) + C$ für ein $c \in \mathbb{R}$ (vgl Satz 56.1)

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = \int_{x_0}^b f \, dx - \int_{x_0}^a f \, dx = \int_a^b f \, dx$$

\Rightarrow Behauptung □

■ Beispiel 79.4

$$\int_a^b \gamma x \, dx = \frac{\gamma}{2} x^2 \Big|_a^b = \frac{\gamma}{2} (b^2 - a^2)$$

für $a = 0$: Integral = $\frac{b(\gamma b)}{2}$ (Flächenformel für's Dreieck)

$a = -b < 0$: Integral = 0 (d.h. vorzeichenbehaftete Fläche)

■ Beispiel 79.5

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 1 - (-1) = 2$$

Satz 79.6 (Substitution für bestimmte Integrale)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig **diffbar** und streng monoton, $a, b \in I$. Dann:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(y)) \varphi'(y) \, dy \quad (2)$$

formal: ersetze $\alpha = \varphi(y)$ und $dx = \frac{dx}{dy} dy = \varphi'(y) dy$.

Ersetzung des Arguments von f durch $x = \varphi(y)$ bezeichnet man als Substitution bzw. Variablentransformation

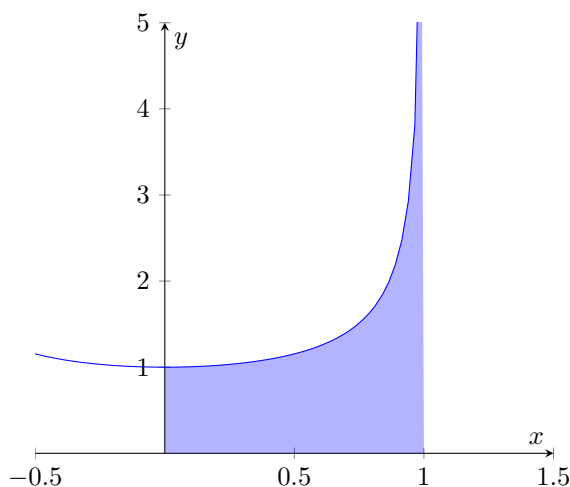
Beweis. Sei $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktion von f auf I (existiert nach Theorem 79.2)

$\xrightarrow{\text{Satz 56.6}}$ $F(\varphi(\cdot))$ ist Stammfunktion zu $f(\varphi(\cdot))\varphi'(\cdot)$

$$\xrightarrow{\text{Theorem 79.2}} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(y))\varphi'(y) \, dy = F(\varphi(y)) \Big|_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx \quad \square$$

■ Beispiel 79.7

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \stackrel{x=\varphi(x)=\sin y}{=} \int_0^{\varphi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \cdot \cos y \, dy = \int_0^{\pi/2} 1 \, dy = \frac{\pi}{2}$$

**Satz 79.8 (partielle Integration für bestimmte Integrale)**

Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und F bzw. G die zugehörigen Stammfunktionen, $a, b \in I$. Dann

$$\int_a^b fG \, dx = FG|_a^b - \int_a^b Fg \, dx$$

Beweis. Es gilt nach Satz 56.2

$$\int fG \, dx = F(x)G(x) - \int Fg \, dx$$

und somit folgt aus (1)

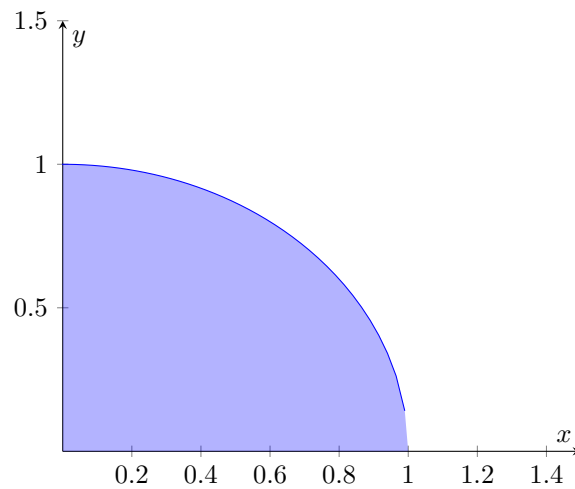
$$\int_a^b fG \, dx = \left[\int fG \, dx \right]_a^b = [F \cdot G]_a^b - \left[\int Fg \, dx \right]_a^b = F \cdot G|_a^b - \int_a^b Fg \, dx \quad \square$$

■ Beispiel 79.9

Fläche des Einheitskreises: betrachte $y = \sqrt{1-x^2}$ und

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx &= \int_0^1 1 \cdot \sqrt{1-x^2} \, dx = \left[x \cdot \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \stackrel{\text{Beispiel 79.7}}{=} \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx \end{aligned}$$

\Rightarrow Der Viertelkreis hat die Fläche $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ und folglich die Kreisfläche von π .

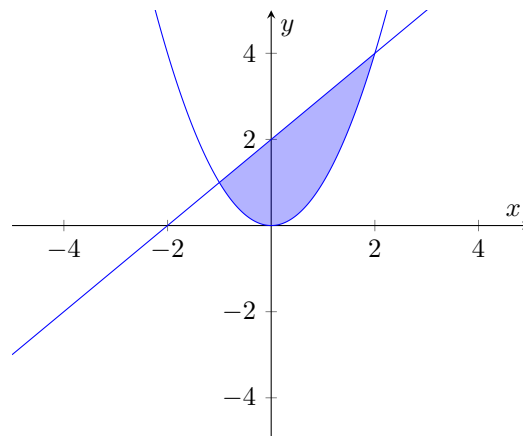


■ **Beispiel 79.10**

Berechne die Fläche zwischen den Graphen von $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$.

Schnittpunkte: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

$$\int_{-1}^2 g - f \, dx = \int_{-1}^2 x + 2 - x^2 \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$



■ **Beispiel 79.11**

Berechne die Fläche zwischen den Graphen von $f(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x$ und $g(x) = x_0$.

Schnittpunkte: $x_{1,3} = \pm\sqrt{2}$, $x_2 = 0$

Betrachte $g - f$ auf $[0, \sqrt{2}]$

$$\int_0^{\sqrt{2}} g - f \, dx = \int_0^{\sqrt{2}} 2x - x^3 \, dx = \left[x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = 1,$$

analog $\int_{-\sqrt{2}}^0 f - g \, dx = 1$

\Rightarrow Gesamtfläche = 2

Satz 79.12 (Differenz von Funktionswerten)

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, D offen, f stetig **diffbar**, $[x, y] \subset D$. Dann

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 f'(x + t(y-x)) \cdot (y-x) \, dt = \int_0^1 f(x + t(y-x)) \, dt(y-x)$$

Hinweis: die linke Seite ist Element in \mathbb{R}^m und die Integrale sind jeweils komponentenweise zu verstehen (Mitte = \mathbb{R}^m , rechts $\mathbb{R}^{n \times m}$). Man vergleiche den Mittelwertsatz (Theorem 55.4) und Schrankensatz (Theorem 55.9).

Beweis. Sei $f = (f_1, \dots, f_n)$, $\varphi_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi_k(t) := f_k(x + t(y-x))$

$$\Rightarrow \varphi_t \text{ ist diffbar auf } [0, 1] \text{ mit } \varphi_k'(t) = f'(x + t(y-x)) \cdot (y-x)$$

$$\xrightarrow{\text{Theorem 79.2}} f_k(y) - f_k(x) = \varphi_k(1) - \varphi_k(0) = \int_0^1 \varphi_k'(t) \, dt$$

\Rightarrow Behauptung □

79.2. Uneigentliche Integrale

Frage: $\int_I f \, dx$ für I unbeschränkt bzw. f unbeschränkt?

Strategie: Verwende den Hauptsatz mittels Grenzprozess.

Satz 79.13

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig für $a, b \in \mathbb{R}$. Dann

$$f \text{ integrierbar auf } (a, b] \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \downarrow a \\ x \neq a}} \int_a^b |f| \, dx \text{ existiert}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\alpha_k}^a f \, dx \text{ für eine Folge } \alpha_k \downarrow a \quad (3)$$

► Bemerkung 79.14

- Eine analoge Aussage gilt für $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
- Falls f beschränkt auf $(a, b]$, dann stets integrierbar (vgl. Folgerung 78.17)
- Nutzen: Integrale können mittels Hauptsatz berechnet werden
- Für uneigentliche Integrale $\int_a^b f \, dx$ im Sinne von RIEMANN-Integralen muss nur $\lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^b f \, dx$ existieren (vgl. Beispiel 79.19 unten)

Beweis. Sei $\alpha_k \downarrow a$, $a < \alpha_k \forall k$ und

$$f_k(x) := \begin{cases} f(x) & \text{auf } (\alpha_k, b] \\ 0 & \text{auf } (a, \alpha_k) \end{cases}$$

Offenbar ist $|f_k| \leq |f|$, $f_k \rightarrow f$, $|f_k| \rightarrow |f|$ f.ü. auf (a, b) .

„ \Rightarrow “ f integrierbar auf (a, b) . Mit Theorem 78.16 (Majorisierte Konvergenz) folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\alpha_k}^b |f| \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |f_k| \, dx = \int_a^b |f| \, dx$$

\Rightarrow Behauptung $\xrightarrow[\text{Beträge}]{\text{ohne}}$ (3)

„ \Leftarrow “ Folge $\{|f_k|\}$ monoton wachsend,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |f_k| \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |f| \, dx \quad \text{existiert}$$

$\xrightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{majorisierte}}$ f integrierbar

□

■ Beispiel 79.15

$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} \, dx$ existiert für $0 < \gamma < 1$ und nicht für $\gamma \geq 1$

$$\text{Für } \gamma \neq 1: \int_{\alpha_k}^1 \frac{1}{x^\gamma} \, dx = \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} \Big|_{\alpha_k}^1 = \frac{1}{1-\gamma} (1 - \alpha_k)^{1-\gamma} \xrightarrow{\alpha_k \downarrow 0} \frac{1}{1-\gamma}$$

(keine Konvergenz für $1 - \gamma \leq 0$, $\gamma = 1$: analog mit Stammfunktion $\ln x$)

Satz 79.16

sei $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann

$$f \text{ integrierbar auf } [a, +\infty) \Leftrightarrow \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^\beta |f| \, dx \text{ existiert}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty f \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\beta_k} f \, dx \text{ für eine Folge } \beta_k \rightarrow \infty$$

► Bemerkung 79.17

Analoge Bemerkungen wie in Bemerkung 79.14

Beweis. Analog zu Satz 79.13

□

■ Beispiel 79.18

$\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma} \, dx$ existiert für $\gamma > 1$ und nicht für $0 \leq \gamma \leq 1$

Für $\gamma \neq 1$:

$$\int_1^{\beta_k} \frac{1}{x^\gamma} \, dx = \frac{1}{\gamma-1} x^{1-\gamma} \Big|_1^{\beta_k} = \frac{1}{\gamma-1} (1 - \beta_k^{1-\gamma}) \xrightarrow{\beta_k \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma-1},$$

falls $1 - \gamma < 0$ (keine Konvergenz für $1 - \gamma \geq 0$, $\gamma = 1$ analog mit Stammfunktion $\ln x$)

■ **Beispiel 79.19**

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Offenbar ist $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{k\pi} \quad \forall k \geq 1$ (vgl. Beispiel 79.5)

$$\Rightarrow \int_0^{k\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

$\Rightarrow \frac{\sin x}{x}$ nicht integrierbar auf $(0, \infty)$

aber:

$$\int_1^{\beta} \frac{1}{x} \sin x dx = \frac{\cos 1}{1} - \frac{\cos \beta}{\beta} - \int_1^{\beta} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Wegen $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x \neq 0$, $\frac{1}{x^2}$ ist integrierbar nach Beispiel 79.18

$\Rightarrow \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{\cos x}{x^2} dx$ existiert nach Satz 78.10

$\Rightarrow \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx$ existiert $\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} (= \frac{\pi}{2})$ existiert als uneigentliches Integral im Sinne des RIEMANN-Integral (vgl. Bemerkung 79.14), aber nicht als LEBESGUE-Integral.

80. Satz von Fubini und Mehrfachintegrale

Ziel: Reduktion der Berechnung von Integralen auf $\mathbb{R}^n \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx$ auf Integrale über \mathbb{R} .

Betrachte Integrale auf $X \times Y$ mit $X = \mathbb{R}^p$, $Y = \mathbb{R}^q$, $(x, y) \in X \times Y$. $|M|_X$ Maß auf X , \mathcal{Q}_X Quader in X usw.

Theorem 80.1 (Fubini)

Sei $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf $X \times Y$. Dann

- Für Nullmenge $N \subset Y$ ist $x \rightarrow f(x, y)$ integrierbar auf $X \forall y \in Y \setminus N$
- Jedes $F : Y \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(y) := \int_X f(x, y) \, dx \forall y \in Y \setminus N$ ist integrierbar auf Y und

$$\int_{X \times Y} f(x, y) \, d(x, y) = \int_Y F(y) \, dy = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \, dx \right) dy \quad (1)$$

Definition (iteriertes Integral, Mehrfachintegral)

Rechte Seite in (1) heißt iteriertes Integral bzw. Mehrfachintegral.

► Bemerkung 80.2

Analoge Aussage gilt bei Vertauschungen von X und Y mit

$$\int_{X \times Y} f(x, y) \, d(x, y) = \int_X \int_Y f(x, y) \, dy \, dx \quad (2)$$

Theorem 80.1 mit $f = \chi_N$ für Nullmenge $N \subset X \times Y$ liefert Beschreibung von Nullmengen in $X \times Y$.

Folgerung 80.3

Sei $N \subset X \times Y$ Nullmenge und $N_Y := \{x \in X \mid (x, y) \in N\}$

$\Rightarrow \exists$ Nullmenge $\tilde{N} \subset Y$ mit $|N_Y|_X = 0 \forall y \in Y \setminus \tilde{N}$

Hinweis: $\tilde{N} \neq \emptyset$ tritt z.B. auch auf für $N = \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ($\tilde{N} = \mathbb{Q}$)

Beweis (Theorem 80.1, Folgerung 80.3).

a) Zeige: Theorem 80.1 gilt für $f = \chi_M$ mit $M \subset X \times Y$ messbar, $|M|_{X \times Y} < \infty$

- $\exists Q_{k_j} \in \mathcal{Q}_{X \times Y}$, paarweise disjunkt für festes k mit $M \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_{k_j} =: R_k$

$$|M| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_{k_j}| \leq |M| + \frac{1}{k}, R_{k+1} \subset R_k \quad (3)$$

- Wähle $Q'_{k_j} \in \mathcal{Q}_X$, $Q''_{k_j} \in \mathcal{Q}_Y$ mit $Q_{k_j} = Q'_{k_j} \times Q''_{k_j} \forall k, j \in \mathbb{N}$
- Mit $M_Y := \{x \in X \mid (x, y) \in M\}$ gilt:

$$|M_Y|_X \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q'_{k_j}|_X \cdot \chi_{Q''_{k_j}}(y) =: \psi_k(y) \in [0, \infty] \quad \forall y \in Y \quad (4)$$

- Für festes k ist $y \rightarrow \psi_{k_l}(y) := \sum_{j=1}^l |Q'_{k_j}|_X \cdot \chi_{Q''_{k_j}}(y)$ monoton wachsende Folge und Treppenfunktion in $T^1(Y)$ mit $\psi_k(y) = \lim_{l \rightarrow \infty} \psi_{k_l}(y)$

$$\Rightarrow \int_Y \psi_{k_l}(y) \, dy = \sum_{j=1}^l |Q'_{k_j}|_X \cdot |Q''_{k_j}|_Y = \sum_{j=1}^l |Q_{k_j}|_{X \times Y} \stackrel{(3)}{\leq} |M| + \frac{1}{k}$$

- Nach Lemma 78.11 ist $\{\psi_{k_l}\}_l$ L^1 -CF zu ψ_k und ψ_k ist integrierbar auf Y mit

$$|M| \stackrel{(3)}{\leq} \int_Y \psi_k \, dy = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_{k_j}|_{X \times Y} \stackrel{(3)}{\leq} |M| + \frac{1}{k} \tag{5}$$

- Da $\{\psi_k\}$ monoton fallend (wegen $R_{k+1} \subset R_k$), existiert $\psi(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k(y) \geq 0 \, \forall y \in Y$.
- Grenzwert (5) mittels majorisierter Konvergenz liefert

$$|M| = \int_Y \psi \, dy \tag{6}$$

- Falls $|M| = 0$, folgt $\psi(y) = 0$ f.ü. auf Y
 \Rightarrow Folgerung 80.3 bewiesen.

- $\{\chi_{R_k}\}$ monoton fallend mit $\psi_{R_k} \rightarrow \chi_M$ f.ü. auf $X \times Y$ und χ_{R_k} integrierbar auf $X \times Y$
 $\Rightarrow \{\chi_{R_k}\}$ ist L^1 -CF zu χ_M und

$$\int_{X \times Y} \psi_{R_k} \, d(x, y) \rightarrow \int_{X \times Y} \chi_M \, d(x, y).$$

- Nach Folgerung 80.3 existiert Nullmenge $\tilde{N} \subset Y$ mit $\chi_{R_k}(\cdot, y) \rightarrow \chi_M(\cdot, y)$ f.ü. auf $X \, \forall y \in Y \setminus \tilde{N}$
 $\stackrel{(3),(4)}{\Rightarrow} \chi_{R_k}(\cdot, y)$ integrierbar auf $X \, \forall k \in \mathbb{N}, y \in Y \setminus \tilde{N}$
 $\xrightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{majorisierte}}$ $\chi_M(\cdot, y)$ integrierbar auf $X \, \forall y \in Y \setminus \tilde{N}$ mit

$$\psi(y) = \int_X \chi_{R_k}(x, y) \, dx \rightarrow \int_X \chi_M(x, y) \, dy$$

für fa. $y \in Y$

$$\stackrel{(6)}{\Rightarrow} \int_{X \times Y} \chi_M(x, y) \, d(x, y) = |M| = \int_Y \left(\int_X \chi_M(x, y) \, dx \right) \, dy$$

- D.h. Behauptung für $f = \chi_M$

$\xrightarrow[\text{des Integrals}]{\text{Linearität}}$ Behauptung richtig für alle Treppenfunktionen

b) Sei $f \geq 0$ integrierbar auf $X \times Y$

Wähle zu f monotone Folge von Treppenfunktionen $\{h_k\}$ gemäß Folgerung 77.16

$$\Rightarrow \int_{X \times Y} h_k(x, y) \, d(x, y) \stackrel{a)}{=} \int_Y \left(\int_X h_k \, dx \right) \, dy$$

Analog zu a) folgt: $h_k(\cdot, y) \rightarrow f(\cdot, y)$ f.ü. auf X für fa. $y \in Y$

$\xrightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{Majorisierte}}$ Behauptung für f .

Allgemein: Zerlege $f = -f^- + f^+$ und argumentiere für f^\pm separat. □

Satz 80.4 (Satz von Tonelli)

Sei $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann

$$f \text{ integrierbar} \Leftrightarrow \int_Y \left(\int_X |f(x, y)| \, dx \right) dy \quad \text{oder} \quad \int_X \left(\int_Y |f(x, y)| \, dy \right) dx \quad (7)$$

existiert.

► Bemerkung 80.5

- a) Falls eines der iterierten Integrale (7) mit $|f|$ existieren, dann gelte (1), (2)
 b) Existiert z.B. $\int_Y \left(\int_X |f| \, dx \right) dy$ heißt dies: \exists Nullmenge $\tilde{N} \subset Y$ mit

$$F(y) := \int_X |f(x, y)| \, dx \quad \forall y \in Y \setminus \tilde{N}$$

und mit $F(y) := 0 \, \forall y \in \tilde{N}$ ist F integrierbar auf Y

Beweis.

„ \Rightarrow “ Mit f auch $|f|$ integrierbar und die Behauptung folgt aus Theorem 80.1

„ \Leftarrow “ Sei $W_k := (-k, k)^{p+q} \subset X \times Y$ Würfel, $f_k := \{|f|, k \cdot \chi_{W_k}\}$

$\Rightarrow f$ ist integrierbar auf $X \times Y$

Offenbar sind die $\{f_k\}$ wachsend, $f_k \rightarrow |f|$ f.ü. auf $X \times Y$. Falls oberes Integral in (7) existiert, gilt

$$\int_{X \times Y} f(x, y) \, d(x, y) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_Y \left(\int_X f_k \, dx \right) dy \leq \int_Y \left(\int_X |f| \, dx \right) dy < \infty$$

$\Rightarrow \{\int_{X \times Y} f_k \, d(x, y)\}$ beschränkte Folge

$\xrightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{Majorisierte}} |f|$ integrierbar $\xrightarrow{\text{Satz 78.7}} f$ integrierbar \Rightarrow Behauptung □

Folgerung 80.6

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf \mathbb{R}^n , $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \dots \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \right) \dots dx_n \quad (8)$$

Beweis. Mehrfachanwendung von Theorem 80.1 □

► Bemerkung 80.7

- 1) Die Reihenfolge der Integration in (8) ist beliebig
- 2) Integrale reduzieren die Integration auf reelle Integrale über \mathbb{R}
- 3) Für $\int_M f \, dx$ ist $(\chi_M f)$ gemäß (8) zu integrieren, wo ggf. $\int_{\mathbb{R}} \dots$ durch $\int_a^b \dots$ mit geeigneten Grenzen ersetzt wird.

■ Beispiel 80.8

Sei $f : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $M = [a, b] \times [c, d]$

$\Rightarrow f$ messbar, beschränkt auf M

$\Rightarrow f$ integrierbar auf M

$\Rightarrow \chi_M f$ ist integrierbar auf \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_M f \, dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_M f \, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_M(x_1, x_2) f(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_a^b \chi_{[c,d]}(x_2) f(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 = \int_c^d \int_a^b f(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 \end{aligned}$$

Z.B. $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot \sin x_2$, $M = [0, 1] \times [0, \pi]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_M f \, dx &= \int_0^\pi \int_0^1 x_1 \sin x_2 \, dx_1 \, dx_2 = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} x_1^2 \sin x_2 \right]_0^1 \, dx_2 \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin x_2 \, dx_2 = \left[-\frac{1}{2} \cos x_2 \right]_0^\pi = 1 \end{aligned}$$

■ Beispiel 80.9

Sei $f : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

$\Rightarrow \chi_M f$ integrierbar auf \mathbb{R}^2

$$\Rightarrow \int_M f \, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_M f \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx$$

Z.B. $f(x, y) = |y|$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_M |y| \, d(x, y) &= 2 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \, dx = 2 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1-x^2) \, dx = \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

■ Beispiel 80.10

Sei $f : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, M Tetraeder mit Ecken $0, e_1, e_2, e_3$

$$\int_M f \, d(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

Z.B: $f(x, y, z) = 1$:

$$\begin{aligned} \int_M 1 \, d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} [z]_0^{1-x-y} \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{1-x} \, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) \, dx \\ &= \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

das Volumen eines Tetraeders.

80.1. Integration durch Koordinatentransformation

Definition (Diffeomorphismus, diffeomorph)

Sei $f : U \subset K^n \rightarrow V \subset K^m$ bijektiv, wobei U, V offen.

f heißt Diffeomorphismus, falls f und f^{-1} stetig diffbar auf U bzw. V sind.

U und V heißen dann diffeomorph.

Theorem 80.11 (Transformationssatz)

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \rightarrow V$ Diffeomorphismus. Dann

$$f : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ integrierbar} \Leftrightarrow f(\varphi(\cdot))|\det \varphi'(y)| : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ integrierbar}$$

und es gilt

$$\int_U f(\varphi(y)) \cdot |\varphi'(y)| \, dy = \int_V f(x) \, dx \quad (9)$$

Beweis. Vgl. Literatur (z.B. Königsberger Analysis 2, Kapitel 9) □

Sei $U = Q \in \mathcal{Q}$ Würfel, $V := \varphi(Q)$, $\tilde{y} \in Q$, $x := \varphi(\tilde{y})$

$\stackrel{(9)}{\implies} |V| = \int_V 1 \, dy = \int_Q |\det \varphi'(y)| \, dy \stackrel{Q \text{ klein}}{\approx} |\det \varphi'(\tilde{y})| \cdot |Q|$, d.h. $|\det \varphi'(y)|$ beschreibt (infinitesimale) relative Veränderung des Maßes unter Transformation φ .

■ Beispiel 80.12

Sei $V = B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ Kugel mit Radius $R > 0$.

Zeige: $|B_R(0)| = \int_V 1 \, d(x, y, z) = \frac{4}{3}\pi R^3$

Benutze Kugelkoordinaten (Polarkoordinaten in \mathbb{R}^3) mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \varphi(r, \alpha, \beta) := \begin{pmatrix} r \cos \alpha \cos \beta \\ r \sin \alpha \cos \beta \\ r \sin \beta \end{pmatrix}$$

Für $(r, \alpha, \beta) \in U : (0, R) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Mit $H := \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0\}$ und $\tilde{V} := V \setminus H$ gilt: $|H|_{\mathbb{R}^3} = 0$

$\varphi : U \rightarrow \tilde{V}$ diffbar, injektiv, und

$$\varphi'(r, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -r \sin \alpha \cos \beta & -r \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta & r \cos \alpha \cos \beta & -r \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & r \cos \beta \end{pmatrix}$$

\implies Definiere $\varphi'(r, \alpha, \beta) = r^2 \cos \beta \neq 0$ auf U

Satz 27.8 $\Rightarrow \varphi : U \rightarrow \tilde{V}$ ist Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} \Rightarrow |B_R(0)| &= \int_V 1 \, d(x, y, z) = \int_{\tilde{V}} 1 \, d(x, y, z) + \int_H 1 \, d(x, y, z) \\ &\stackrel{(9)}{=} \int_U |\det \varphi'(r, \alpha, \beta)| \, dr \, d\alpha \, d\beta + |H| \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \beta \, d\beta \, d\alpha \, dr \\ &= \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} [r^2 \sin \beta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \, d\alpha \, dr = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} 2r^2 \, d\alpha \, dr = \int_0^R 4\pi r^2 \, dr \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 \Big|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

■ Beispiel 80.13 (Rotationskörper im \mathbb{R}^3)

Sei $g : [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ stetiger, rotierender Graphen von g um die z -Achse.

\rightarrow Bestimme das Volumen des (offenen) Rotationskörpers $V \subset \mathbb{R}^3$.

Benutze Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \varphi(r, \alpha, z) := \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \\ z \end{pmatrix}$$

auf

$$U = \{(r, \alpha, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in (0, g(z)), \alpha \in (-\pi, \pi), z \in (a, b)\},$$

mit $H := \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0\}$, $\tilde{V} := V \setminus H$ gilt $|H| = 0$ und $\varphi : U \rightarrow \tilde{V}$ **diffbar**, injektiv, sowie

$$\varphi'(r, \alpha, z) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & r \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r > 0 \text{ auf } U$$

Satz 27.8 $\Rightarrow \varphi : U \rightarrow \tilde{V}$ ist Diffeomorphismus

V messbar (da offen) $\Rightarrow \tilde{V}$ messbar, und offenbar $f = 1$ integrierbar auf \tilde{V}

$$\begin{aligned} \Rightarrow |V| = |\tilde{V}| &= \int_{\tilde{V}} 1 \, d(x, y, z) \stackrel{(9)}{=} \int_U |\det \varphi'(r, \alpha, z)| \, d(x, y, z) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{g(z)} r \, dr \, d\alpha \, dz = \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{g(z)} \, d\alpha \, dz \\ &= \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(z)^2}{2} \, d\alpha \, dz = \pi \int_a^b g(z)^2 \, dz \end{aligned}$$

Z.B. $g(z) = R$ auf $[a, b]$: $|V| = \pi \int_a^b R^2 \, dz = \pi R^2 (b - a)$ (Volumen des Kreiszyllinders)

Kapitel VII

Differentiation II

105. Höhere Ableitungen und Taylor-scher Satz

Vorbetrachtung: Sei X endlich dimensionaler, normierter Raum über K (d.. Vektorraum über K mit Norm $\| \cdot \|$, $\dim X = l \in \mathbb{N}$).

Offenbar sind X und K^l isomorph als Vektorraum, schreibe $X \cong K^l$, z.B. $X = L(K^n, K^m) \cong K^{m \cdot n}$.

Für $g : D \subset K^n \rightarrow X$, D offen, kann man die bisherigen Resultate bezüglich der Ableitung übertragen. $g'(x) \in L(K^n, X)$ heißt Ableitung von g im Punkt $x \in D$, falls

$$g(x + y) = g(x) + g'(x)y + o(|y|), \quad y \rightarrow 0$$

Definition (zweite Ableitung)

Betrachte nun $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, f **diffbar** auf D . Falls $g := f' : D \rightarrow L(K^n, K^m) =: Y_1$ **diffbar** in $x \in D$ ist, heißt

$$f''(x) := g'(x) \in L(K^n, Y_1) = L(K^n, \underbrace{L(K^n, K^m)}_{\cong K^{m \times n}}) \quad (1)$$

zweite Ableitung von f in X .

Offenbar gilt dann:

$$f'(x + y) = f'(x) + f''(x)y + o(|y|), \quad y \rightarrow 0$$

bzw.

$$f'(x + y) \cdot z = f'(x) \cdot z + \underbrace{\left(\underbrace{f''(x) \cdot y}_{\in K^{m \times n}} \right)}_{\in K^m} z + o(|y|) \cdot z \quad \forall z \in K^n \quad (2)$$

Interpretation: Betrachte $f''(x)$ als kubische bzw. 3-dimensionale „Matrix“ (heißt auch Tensor 3. Ordnung).

beachte: Ausdruck für $f''(x + y) \cdot z$ ist jeweils linear in y und z .

Frage: höhere Ableitungen, d.h. von $f'' : D \rightarrow L(K^n, Y_1)$ usw.

Offenbar:

$$g_2 := L(K^n, Y_1) = L(K^n, L(K^n, K^m)) \cong L(K^n, K^{m \times n}) \cong L(K^n, K^{m \times n}) \cong K^{m \cdot n^2}$$

$$g_3 := L(K^n, Y_2) \cong L(K^n, K^{m \cdot n^2}) \cong K^{k \cdot n^3}$$

Endlich dimensionale, normierte Räume, man kann rekursiv $\forall k \in \mathbb{N}$ definieren:

(i) (Räume)

$$Y_0 = K^n \quad \text{mit } |\cdot|$$

$$Y_{k+1} := L(K^n, Y_k) \text{ mit Standardnormen } \|A\|_{k+1} = \sup_{|z| \leq 1} \|Az\|_{Y_k} \text{ (vgl. Satz 13.8),}$$

analog zu oben ist $Y_k \cong K^{m \cdot n^k}$, Y_k normierter Raum

(ii) (Ableitungen)

$$f^{(0)} := f : D \subset K^n \rightarrow K^m, D \text{ offen.}$$

Falls $f^{(k)} : D \rightarrow Y_k$ **diffbar** in $x \in D$ heißt

$$f^{(k+1)}(x) := \left(f^{(k)} \right)'(x) \in L(K^n, Y_k)$$

$(k+1)$ -te Ableitung von f in x . (beachte: $f^{(1)}(x) = f'(x)$)

Somit gilt:

$$f^{(k)}(x+y) = f^{(k)}(x) + f^{(k+1)}(x) \cdot y + o(|y|) \quad (\in Y_k), y \rightarrow 0 \quad (3)$$

Definition (k -fach differenzierbar)

f heißt k -fach differenzierbar (auf D), falls $f^{(k)}(x)$ existiert $\forall x \in D$.

f heißt k -fach stetig **diffbar** (auf D) oder C^k -Funktion, falls f k -fach **diffbar** und $f^{(k)} : D \rightarrow Y_k$ stetig.

$$C^k(D, K^m) := \{f : D \rightarrow K^m \mid f \text{ } k\text{-fach stetig diffbar auf } D\}$$

Hinweis: Falls $f^{(k)}(x)$ existiert $\Rightarrow f^{(k-1)}$ stetig in X (vgl. Satz 53.2)

Spezialfall $n = 1$: $f : D \subset K \rightarrow K^m$

$$f'(x) \in Y_1 = L(K, K^n) \cong K^m$$

$$f''(x) \in Y_2 = L(K, Y_1) \cong L(K, K^m) \cong K^m$$

Allgemein: $f^{(k)}(x) \in Y_k = L(K, Y_{k-1}) \cong L(K, K^m) \cong K^m$, d.h. für $n = 1$ kann $f^{(k)}(x)$ stets als m -Vektor in K^m betrachtet werden.

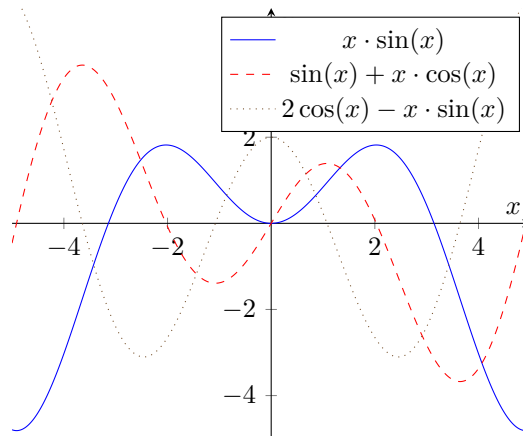
■ Beispiel 105.1

Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot \sin x$

$$\Rightarrow f'(x) = \sin x + x \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow f''(x) = \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - x \sin x$$

$$\Rightarrow f'''(x) = -3 \sin x - x \cos x \text{ usw.}$$



■ **Beispiel 105.2**

sei $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = \begin{pmatrix} x^3 \\ \ln x \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow f''(x) = \begin{pmatrix} 6x \\ -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow f'''(x) = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{2}{x^3} \end{pmatrix}$$

■ **Beispiel 105.3**

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$

Folglich

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \\ -3x^2 \end{cases} \quad \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x \\ -6x \end{cases}$$

$\Rightarrow f'''(0)$ existiert nicht, d.h. $f \in C^2(K, \mathbb{R})$ aber $f \notin C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

■ **Beispiel 105.4**

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f^{(k)}(x)$ existiert $\forall x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ mit $f^{(k)}(0) = 0 \forall k$, d.h. $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \forall k \in \mathbb{N}$.

Man schreibt auch $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Räume Y_k : $= L(K^n, Y_{k-1}) \cong K^{m \times n^k}$.

Für $A \in Y_k = L(K^n, Y_{k-1})$ und $y_1, \dots, y_k \in K^n$ gilt:

$$\begin{aligned}
 A \cdot y_1 &\in Y_{k-1} = L(K^n, Y_{k-2}), \\
 (Ay_1) \cdot y_2 &\in Y_{k-2} = L(K^n, Y_{k-3}) \\
 &\vdots \\
 (\dots (Ay_1)y_2) \dots \cdot y_k &\in Y_0 = K^m
 \end{aligned}$$

Ausdrücke links sind offenbar linear in jedem $y_j \in K^n$ separat, $j = 1 \dots, k$

Definition (k -lineare Abbildung)

Betrachte

$$\begin{aligned}
 X_k &:= L^k(K^n, K^m) \\
 &:= \{B : \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{k\text{-fach}} \rightarrow K^m \mid y_j \rightarrow B(y_1, \dots, y_k) \text{ linear für jedes } j = 1, \dots, k \}
 \end{aligned}$$

$B \in X_k$ heißt k -lineare Abbildung. X_k ist Vektorraum.

■ **Beispiel 105.5**

Für 3-lineare Abbildung $B \in L^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ mit

$$B(x, y, z) = \begin{pmatrix} xyz \\ (x + y)z \end{pmatrix}$$

ist z.B. nicht linear als Abbildung auf \mathbb{R}^3 .

Satz 105.6

Für $k \in \mathbb{N}$ ist $I_k : Y_k \rightarrow X_k$ mit

$$(I_k A)(y_1, \dots, y_k) := (\dots ((Ay_1)y_2) \dots y_k) \quad \forall A \in Y_k, y_j \in K^n, j = 1, \dots, k \tag{4}$$

ein Isomorphismus bezüglich der Vektorraum-Struktur (also $X_k \cong Y_k$).

Hinweis: Somit kann $f^{(k)}(x)$ auch als Element von X_k betrachtet werden, d.h. $f^{(k)}(x) \in X_k = L^k(K^n, K^m)$

Damit wird z.B. (2) zu

$$f'(x + y) \cdot z = f'(x) \cdot z + f''(x) \cdot (y, z) + o(|y|) \cdot z \quad \forall z \in K^n \tag{5}$$

und für $n = 1$ gilt

$$f^{(k)}(x)(y_1, \dots, y_k) = \underbrace{f^{(k)}(x)}_{\in K^m} \cdot \underbrace{y_1 \dots y_k}_{\text{Produkt von Zahlen}} \quad \forall y_j \in K$$

Beweis. I_k offenbar linear auf Y_k , I_k injektiv, denn $I_k(A) = 0$ gdw. $A = 0$

Zeige mittels Vollständiger Induktion: I , surjektiv.

IA: Offenbar ist $X_1 = Y_1$ und $I_1 A = A \Rightarrow I_1$ surjektiv

IS: Sei I_k surjektiv und wähle beliebiges $B \in X_{k+1}$.

Setze $\tilde{B}_{y_1} := B(y_1, \cdot, \dots, \cdot) \in X_k \forall y_1 \in K^n, \tilde{B} \in L(K^n, X_k)$

$$\Rightarrow A := I_k^{-1} \tilde{B} \in L(K^n, Y_k) = Y_{k+1} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (I_{k+1} A)(y_1, \dots, y_{k+1}) &\stackrel{(4)}{=} (\dots ((A y_1) y_2) \dots y_{k+1}) = (I_K(A y_1))(y_2, \dots, y_{k+1}) \\ &\stackrel{(6)}{=} (\tilde{B}_{y_1})(y_2, \dots, y_{k+1}) = B(y_1, \dots, y_{k+1}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B = I_{k+1} \cdot A \Rightarrow I_{k+1} \text{ surjektiv}$$

$\Rightarrow I_k$ Isomorphismus □

Norm: in X_k, Y_k : für $A \in Y_k$ folgt durch rekursive Definition

$$\begin{aligned} \left(\dots \left(\left(A \frac{y_1}{|y_1|} \right) \frac{y_2}{|y_2|} \right) \dots \frac{y_k}{|y_k|} \right) &\leq \|A\|_{Y_k} \quad \forall y_j \in K^n, y_j \neq 0 \\ \Rightarrow (\dots ((A y_1) y_2) \dots y_k) &\leq \|A\|_{Y_k} |y_1| |y_2| \dots |y_k| \quad \forall y_1, \dots, y_k \in K^n \end{aligned} \quad (7)$$

Norm für $A \in X_k = L^k(K^n, K^m)$:

$$\|A\|_{X_k} := \sup\{|A(y_1, \dots, y_k)| \mid y_j \in K^n, |y_j| \leq 1\}$$

Analog zu (7) folgt für $A \in X_k$:

$$|A(y_1, \dots, y_k)| \leq \|A\|_{X_k} |y_1| \cdot \dots \cdot |y_k| \quad \forall y_j \in K^n \quad (8)$$

Satz 105.7

Mit Isomorphismus $I_k : Y_k \rightarrow X_k$ aus Satz 105.6 gilt:

$$\|I_k(A)\|_{X_k} = \|A\|_{Y_k} \quad \forall A \in Y_k$$

Beweis. Selbststudium / ÜA □

► Bemerkung 105.8

$\|f^{(k)}(x)\|$ unabhängig davon, ob man $f^{(k)}(x)$ als Element von X_k oder Y_k betrachtet.

105.1. Partielle Ableitungen

Sei $X = (x_1, \dots, x_k) \in K^n$; d.h. $x_j \in K$, e_1, \dots, e_k die Standard-Einheitsvektoren

Wiederholung: Partielle Ableitung $f_{x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = D_{x_j} f(x)$ ist Richtungsableitung $f'(x, e_j) = D_{e_j} f(x) \in L(K, K^m)$.

Definition (partielle Ableitung)

Nenne $f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x)$ partielle Ableitung 1. Ordnung von f in X

Für $g : D \rightarrow X$ definieren wir die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_j} g(x) = g_{x_j}(x) \in L(K, X)$ analog zu Abschnitt 54:

$$g(x + t \cdot e_j) = g(x) + g_{x_j}(x)t + o(t), \quad t \rightarrow 0, \quad t \in K \quad (9)$$

Für $g = f_x : D \rightarrow L(K, K^m)$ ist dann $g_{x_j} \in L(K, L(K, K^m))$. Für $g = f_{x_j} : D \rightarrow L(K, K^m)$ ist dann $g_{x_j} \in L(K, L(K, K^m)) \cong L^2(K, K^m) \cong K^m$ die partielle Ableitung $f_{x_i x_j}(x)$ von f in x nach x_i und x_j .

Andere Notation: $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x), D_{x_i x_j} f(x), \dots$

Die $f_{x_i x_j}(x)$ heißen partielle Ableitung 2. Ordnung von f in x .

Mittels Rekursion

$$f_{x_{j_1} \dots x_{j_k}}(x) := \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} f_{x_{j_1} \dots x_{j_{k-1}}}(x) \quad (10)$$

erhält man schrittweise die partielle Ableitung der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ von f in x :

$$f_{x_{j_1} \dots x_{j_k}}(x) = D_{x_{j_1} \dots x_{j_k}} f(x) = \frac{\partial^k}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}} f(x) \in L^k(K, K^m)$$

Berechnung durch schrittweises Ableiten von $x_{j_1} \rightarrow f(x_1, \dots, x_n)$, $x_{j_2} \rightarrow f_{x_{j_1}}(x_1, \dots, x_n)$ usw.

■ Beispiel 105.9

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y \sin x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{array}{ll} f_x(x, y) = y \cos x & f_y(x, y) = \sin x \\ f_{xx}(x, y) = -y \sin x & f_{yy}(x, y) = 0 \\ f_{xy}(x, y) = \cos x & f_{yx}(x, y) = \cos x \end{array}$$

Beobachtung: $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$

Abkürzende Schreibweise:

$$\begin{aligned} f_{x_j x_j x_j}(x) &= \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_j \partial x_j} f(x) = \frac{\partial^3}{\partial x_j^3} f(x) \\ f_{x_i x_j x_i x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i^2 \partial x_j^2 \partial x_i} f(x) \end{aligned}$$

Definition (Hesse-Matrix)

Für $m = 1$ (d.h. $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow K$) ist

$$\begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & \cdots & f_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & \cdots & f_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix} =: \text{Hess}(f)$$

die HESSE-Matrix, die alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung enthält.

■ Beispiel 105.10

Sei $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_1 x_2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

Folglich

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad f_{x_2}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 2x_1 x_2 & x_1^2 \\ x_2 & x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

ist die JACOBI-Matrix sowie

$$\text{Hess}(f_1) = \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Hess}(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Anschaulich: alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung bilden eine 3D Matrix.

Frage: Zusammenhang von $f^{(k)}(x)$ mit partiellen Ableitungen?

Theorem 105.11

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, $x \in D$. Dann

- (a) Falls $f^{(k)}(x)$ existiert, dann existieren alle partiellen Ableitungen der Ordnung k in x und

$$f_{x_{j_1} \dots x_{j_k}}(x) = f^{(k)}(x)(e_{j_k}, \dots, e_{j_1}) \quad (11)$$

- (b) Falls alle partiellen Ableitungen $f_{x_{j_1} \dots x_{j_k}}$ der Ordnung k für alle $y \in B_r(x) \subset D$ existieren und falls diese stetig sind
 $\Rightarrow f$ ist k -fach **diffbar**, d.h. $f^{(k)}(x)$ existiert.

► Bemerkung 105.12

Theorem 105.11 (b) ist ein wichtiges Kriterium zur Prüfung der **diffbarkeit**, k -te Ableitung kann dann mittels (11) bestimmt werden.

Beweis. Jeweils mittels vollständiger Induktion nach K ausgeführt:

a) basiert auf Theorem 54.11

b) basiert auf Theorem 55.14 □

■ Beispiel 105.13 (nochmal Beispiel 105.10)

$f^{(2)}(x) = f''(x) \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ existiert $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ nach Theorem 105.11 und kann als Vektor von der HESSE-Matrix dargestellt werden:

$$f^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} \text{Hess } f_1 \\ \text{Hess } f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Was ist nun $f''(x)(y_1, y_2)$ für (Vektoren) $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$?

$$\begin{aligned} f''(x)(y_1, y_2) &= f''(x) \left(\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix} \right) = f^{(2)}(x)(y_{11}e_1 + y_{12}e_2, y_{21}e_1 + y_{22}e_2) \\ &= y_{11}f''(x)(e_1, y_2) + y_{12}f''(x)(e_2, y_2) \\ &= y_{21}y_{11}f''(x)(e_1, e_1) + y_{12}y_{21}f''(x)(e_2, e_1) + y_{11}y_{22}f''(x)(e_1, e_2) + y_{12}y_{22}f''(x)(e_2, e_2) \\ &\stackrel{(11)}{=} y_{11}y_{21}f''_{x_1x_1}(x) + y_{12}y_{21}f''_{x_1x_2}(x) + y_{21}y_{22}f''_{x_2x_1}(x) + y_{12}y_{22}f''_{x_2x_2}(x) \quad (\in \mathbb{R}^2) \\ &= \begin{pmatrix} \langle (\text{Hess } f_1)(x)y_1, y_2 \rangle \\ \langle (\text{Hess } f_2)(x)y_1, y_2 \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Analoge Rechnung liefert allgemein

Folgerung 105.14

Für $f = (x_1, \dots, f_m) : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, es existieren alle $f^{(2)}(x)$ für $x \in D$. Dann

$$f^{(2)}(x)(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \langle (\text{Hess } f_1)(x) y_1, y_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle (\text{Hess } f_m)(x) y_1, y_2 \rangle \end{pmatrix} \in K^m \quad \forall y_1, y_2 \in K^n \quad (12)$$

► Bemerkung 105.15

Für höhere Ableitungen wird die Darstellung $f^{(k)}(x)(y_1, \dots, y_k)$ allgemein mittels partiellen Ableitungen immer komplexer, wird allerdings auch selten benötigt.

Frage:: Kann man die Reihenfolge bei partiellen Ableitungen vertauschen? (vgl. Beispiel 105.9)

■ Beispiel 105.16

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

und folglich

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

insbesondere $f_x(0, y) = -y \quad \forall y \in \mathbb{R}$, also $f_{xy}(0, 0) = -1$

analog $f_y(x, 0) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, also $f_{yx}(0, 0) = +1$

Satz 105.17 (Satz von Schwarz)

Für $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, D offen. Mögen die partiellen Ableitungen f_{x_i} , f_{x_j} , $f_{x_i x_j}$ auf D existieren. Falls $f_{x_i x_j}$ stetig in $x \in D$

$$\Rightarrow f_{x_j x_i}(x) \text{ existiert und } f_{x_i x_j}(x) = f_{x_j x_i}(x) \quad (14)$$

Folgerung 105.18

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, D offen, f k -fach **diffbar** (d.h. $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$)

\Rightarrow alle partiellen Ableitung bis Ordnung k existieren und die Reihenfolge kann vertauscht werden.

Beweis (Folgerung 105.18). Existenz der partiellen Ableitung und deren Stetigkeit folgen aus Theorem 105.11, beliebige Vertauschung der Reihenfolge kann durch schrittweises Vertauschen von zwei „benachbarten Veränderlichen“ erreicht werden.

Satz 105.17 \rightarrow Behauptung

Zur Veranschaulichung:

$$\begin{aligned} f_{x_3x_1x_2}(x) &\stackrel{(10)}{=} D_{x_2}f_{x_3x_1}(x) \stackrel{\text{Satz 105.17}}{=} D_{x_2}f_{x_1x_3}(x) \stackrel{(10)}{=} f_{x_1x_3x_2}(x) \\ &\stackrel{(10)}{=} (f_{x_1})_{x_3x_2}(x) \stackrel{\text{Satz 105.17}}{=} (f_{x_1})_{x_2x_3}(x) \stackrel{(10)}{=} f_{x_1x_2x_3}(x) \end{aligned} \quad \square$$

Beweis (Satz 105.17). oBdA $m = 1$. Fixiere $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ mit

$$x + s \cdot e_i + t \cdot e_j \in D \quad \forall s, t \in (-\delta, \delta)$$

und

$$|f_{x_ix_j}(x + s \cdot e_i + t \cdot e_j) - f_{x_ix_j}(x)| < \varepsilon \quad \forall s, t \in (-\delta, \delta) \tag{15}$$

Definiere $\varphi(s) := f(x + s \cdot e_i + t \cdot e_j) - f(x + s \cdot e_i)$ ist *diffbar* auf $(-\delta, \delta) \forall t \in (-\delta, \delta)$

$$\stackrel{\text{MWS}}{\implies} \exists \sigma \in (0, s) : \varphi(s) - \varphi(0) = \varphi'(\sigma)s = (f_{x_i}(x + \sigma e_i + t e_j) - f_{x_i}(x + \sigma e_i))s$$

$$\stackrel{\text{MWS}}{\implies} \text{für } t \rightarrow f_{x_i}(x + \sigma e_i + t e_j): \exists \tau \in (0, t) : \varphi(s) - \varphi(0) = f_{x_ix_j}(\underbrace{x + \sigma e_i + \tau e_j}_{=: \tilde{x}})st \quad (\sigma, \tau \text{ abhängig von } s, t)$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(s) - \varphi(0)}{st} - f_{x_ix_j}(x) \right| &\leq \underbrace{\left| \frac{\varphi(s) - \varphi(0)}{st} - f_{x_ix_j}(\tilde{x}) \right|}_{=0} + |f_{x_ix_j}(\tilde{x}) - f_{x_ix_j}(x)| \\ &\stackrel{(15)}{<} \varepsilon \quad \forall s, t \in (-\delta, \delta), s, t \neq 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Wegen

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(s) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + s \cdot e_i + t \cdot e_j) - f(x + s \cdot e_i)}{t} = \frac{f(x + t \cdot e_j) - f(x)}{t} = f_{x_j}(x + s \cdot e_i) - f_{x_j}(x)$$

folgt aus Gleichung (16)

$$\left| \frac{f_{x_j}(x + s \cdot e_i) - f_{x_j}(x)}{s} - f_{x_ix_j}(x) \right| < \varepsilon \quad \forall s \in (-\delta, \delta); s \neq 0 \tag{17}$$

$$\stackrel{\varepsilon > 0}{\implies} f_{x_jx_i}(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f_{x_j}(x + s \cdot e_i) - f_{x_j}(x)}{s} \stackrel{(17)}{=} f_{x_ix_j}(x) \quad \square$$

105.2. Anwendungen

Frage: Wann besitzt $fD \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Stammfunktion? (Vgl. Abschnitt 56, oBdA $m = 1$)

Satz 105.19 (notwendige Integrierbarkeitsbedingung)

Sei $f = (f_1, \dots, f_n) : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, D Gebiet, f stetig *diffbar*.

Damit f eine Stammfunktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt, muss folgende Integrierbarkeitsbedingung erfüllt sein:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x) \quad \forall x \in D, i, j = 1, \dots, n \tag{18}$$

► **Bemerkung 105.20**

(18) ist hinreichend, falls z.B. D konvex (siehe Analysis 3)

Beweis. f habe Stammfunktion $F \Rightarrow F \in C^2(D)$

$$\Rightarrow F_{x_j}(x) = f_j(x) \quad \forall x \in D, j, i$$

$$\Rightarrow F_{x_j x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x) \quad \forall x \in D, i, j$$

$$\xrightarrow{\text{Schwarz}} F_{x_j x_i}(x) = F_{x_i x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x)$$

□

■ **Beispiel 105.21**

Nochmal Beispiel 56.11 mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Betrachte die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y) = \alpha x,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y) = 2x$$

$$\xrightarrow{(18)} \alpha = 2$$

Satz 105.22

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D offen und konvex, f stetig diffbar. Dann:

a) f konvex $\Leftrightarrow \langle f'(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x) \quad \forall x, y \in D$

b) falls sogar $f \in C^2(D)$, dann:

$$f \text{ konvex} \Leftrightarrow f''(x) = (\text{Hess}f)(x) \text{ positiv definit} \quad \forall x \in D$$

Beweis. Vgl. Literatur

□

105.3. Taylor-scher Satz

Ziel: Bessere Approximation als durch Linearisierung

Verwende allgemeine Polynome $\varphi : K^n \rightarrow K$ der Ordnung k , d.h.

$$\varphi(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \dots + \sum_{j_1, \dots, j_k}^n a_{j_1 \dots j_k} x_{j_1} \cdots x_{j_k} \tag{19}$$

mit $a_0, a_j, a_{ij} \in K$ gegebene Koeffizienten

Notation: $f^{(k)}(x)(y, \dots, y) = f^{(k)}(x)y^k$

Wiederholung: $f \in C(D): f(x + y) = f(x) + o(1), y \rightarrow 0$

$f \in C^1(D): f(x + y) = f(x) + f'(x)y + o(|y|), y \rightarrow 0$

Theorem 105.23 (Taylor-scher Satz)

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, k -fach **diffbar** auf D , $x \in D$. Dann

$$f(x+y) = f(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x) y^j + R_k(y) \quad \text{falls } [x, x+y] \subset D, \quad (20)$$

wobei

$$|R_k(y)| \leq \frac{1}{k!} \left| f^{(k)}(x + \tau y) y^k \right| \leq \frac{1}{k!} \left\| f^{(k)}(x + \tau y) \right\| |y|^k \quad (21)$$

für ein $\tau = \tau(y) \in (0, 1)$

Für $K = \mathbb{R}$, $m = 1$ gilt auch

$$R_k(y) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x + \tau y) y^k \quad (22)$$

(LAGRANGE Restglied)

Falls $f \in C^k(D, K^m)$ gilt:

$$R_k(y) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) y^k + o(|y|^k), \quad y \rightarrow 0 \quad (23)$$

► Bemerkung 105.24

Entscheidende Aussage in Theorem 105.23 ist nicht (20), sondern die Eigenschaften des Restglieds (dies wird klein).

Beweis. Sei $[x, x+y] \subset D$, definiere

$$R_K(y) = f(x+y) - f(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x) y^j \quad \Rightarrow (20)$$

und definiere

$$\varphi(t) := f(x+y) - f(x+ty) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(1-t)^j}{j!} f^{(j)}(x+ty) y^j - (1-t)^k R_k(y)$$

Offenbar $\varphi(1) = 0 = \varphi(0)$.

Da f k -fach **diffbar**

$\Rightarrow \varphi : [0, 1] \rightarrow K^m$ **\mathbb{R} -diffbar** auf $(0, 1)$ mit

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -f'(x+ty) \cdot y + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{(1-t)^{j-1}}{(j-1)!} f^{(j)}(x+ty) y^j - \frac{(1-t)^j}{j!} f^{(j+1)}(x+ty) y^{j+1} \right) + k(1-t)^{k-1} R_k(y) \\ &= -\frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x+ty) y^k + k(1-t)^{k-1} R_k(y) \end{aligned} \quad (24)$$

(a) $K = \mathbb{R}$, $n = 1$: nach MWS $\exists \tau \in (0, 1)$ und

$$0 = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) \stackrel{(24)}{\implies} (22)$$

(b) zu (21) mit $K = \mathbb{R}$: Sei $\psi(t) := \langle \varphi(t), v \rangle$ für $v \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ **diffbar** auf $(0, 1)$ mit $\psi'(t) = \langle \varphi'(t), v \rangle$

$\xrightarrow{\text{MWS}} \exists \tau \in (0, 1): 0 = \langle \varphi'(\tau), v \rangle$

$$\Rightarrow \langle R_K(y), v \rangle = \frac{1}{k!} \langle f^{(k)}(x + \tau y) y^k, v \rangle \tag{25}$$

mit $v = \frac{R_k(y)}{|R_k(y)|}$ ($|R_k(y)| \neq 0$, sonst klar) und es folgt

$$\langle R_k(y), v \rangle = |R_k(y)| = \left\langle \frac{1}{k!} f^{(k)}(x + \tau y) y^k, v \right\rangle \stackrel{|v|=1}{\leq} \frac{1}{k!} |f^{(k)}(x + \tau y) y^k| \stackrel{(8)}{\implies} (21)$$

(c) $K = \mathbb{C}$: identifiziere \mathbb{C}^m mit \mathbb{R}^{2m} und setze $\varphi(t) = \langle \varphi(t), r \rangle_{\mathbb{R}^{2m}}$.

Beachte:

- $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\frac{d}{dt} \Re \varphi_j(t) = \Re \frac{d}{dt} \varphi_j(t) \quad \forall j$
- $\langle R_k(y), R_k(y) \rangle_{\mathbb{R}^{2m}} = |R_k(y)|_{\mathbb{C}^m}^2$

und argumentiere wie in b)

(d) zu (23): Setze $R_k(y) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) y^k + r_k(y)$ in (25), $r = \frac{r_k(y)}{|r_k(y)|}$ (falls $r_k(y) \neq 0$)

$$\Rightarrow \frac{|r_k(y)|}{|y|^k} \leq \frac{1}{k! |y|^k} |(f^{(k)}(x + \tau(y)y) - f^{(k)}(x)) y^k| \stackrel{(8)}{\leq} \frac{1}{k!} \|f^{(k)}(x + \tau(y)y) - f^{(k)}(x)\| \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0,$$

d.h. $r_k(y) = o(|y|^k)$, $y \rightarrow 0$ □

Definition (Taylorpolynom, Taylorentwicklung)

Rechte Seite in (20) ohne Restglied heißt Taylorpolynom von f in x vom Grad $k - 1$.

(20) heißt Taylorentwicklung von f in x .

Folgerung 105.25 (Taylor-Formel mit partiellen Ableitungen)

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, d offen, f k -fach **diffbar** auf D , $x \in D$, $[c, c + y] \subset D$:

$$f(x + y) = f(x) = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l!} \sum_{j_1, \dots, j_l} f_{x_{j_1} \dots x_{j_l}}(x) y_{j_1} \dots y_{j_l} + R_k(y), \tag{26}$$

wobei $y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$ (d.h. $y_j \in K$ Zahlen).

Beweis. Benutze (11) □

► **Bemerkung 105.26**

Falls alle partiellen Ableitungen von f bis Ordnung k existieren und stetig sind auf D

$\Rightarrow f \in C^k(D)$ und (26) (vgl. Theorem 105.11)

■ **Beispiel 105.27**

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos x$. Für $x = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \cos y &= \cos 0 + \frac{1}{1!}(\cos'(0))y + \frac{1}{2!}(\cos''(0))y^2 + \dots + \frac{1}{k!}(\cos^{(k)}(0))y^k + o(|y|^k) \\ &\stackrel{k=8}{=} 1 - 0 \cdot y - \frac{1}{2}y^2 + 0y^3 + \frac{1}{24}y^4 - 0 \cdot y - \frac{1}{720}y^6 + 0 \cdot y^7 + \frac{1}{40320}y^8 + o(|y|^8) \end{aligned}$$

(gilt auch für $K = \mathbb{C}$)

■ **Beispiel 105.28**

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x_1^2 + x_1x_2 + \sin x_2)$ ($x = (x_1, x_2)$)

Taylorentwicklung in $x_0 = (1, \pi)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(x+y) = f(x_0) + f'(x_0)y + \frac{1}{2}f''(x_0)y^2 + \frac{1}{3}f'''(x_0)y^3 + o(|y|^3)$$

Offenbar sind

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + \cos x_2 \end{pmatrix} \quad f''(x) = (\text{Hess } f)(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -\sin x_2 \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x_0+y) &= f(x_0) + f_{x_1}(x_0)y_1 + f_{x_2}(x_0)y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2!}f_{x_1x_1}(x_0)y_1^2 + \frac{2}{2}f_{x_1x_2}(x_0)y_1y_2 + \frac{1}{2}f_{x_2x_2}(x_0)y_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}f_{x_2x_2x_2}(x_0)y_2^3 + o(|y|^3) \\ &= 1 + \pi + (2 + \pi)y_1 + 0 \cdot y_2 + y_1^2 + y_1y_2 + 0 \cdot y_2^2 + \frac{1}{6}y_2^3 + o(|y|^3), \quad y \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Frage: Falls $f \in C^\infty(D)$ existiert, dann

$$f(x+y) = f(x) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}f^{(k)}(x)y^k + o(|y|^k) \quad \text{für } k = 1, \dots, n \quad (27)$$

Definition (Taylorreihe)

Rechte Seite in (27) heißt Taylorreihe von f in x .

■ **Beispiel 105.29**

Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x) = \sin x$ für $x = 0$, dann

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ (-1)^k & \text{für } k = 2l + 1 \end{cases}$$

\Rightarrow (27) hat die folgende Form:

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{y^{2l+1}}{(2l+1)!} \quad \text{für } l = 0, \dots, \infty$$

Diese gilt $\forall y \in \mathbb{C}$ (vgl. Definition Sinus in Kap. 13), analog Cosinus

■ **Beispiel 105.30**

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Nach Beispiel 105.4: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(k)}(0) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$

$$\stackrel{(27)}{\implies} f(y) = 0 \forall y \Rightarrow \text{falsch}$$

\Rightarrow (27) gilt nicht für alle $f \in C^\infty(D)$

Wiederholung: Eine Reihe ist konvergent, falls die Folge der Partialsummen konvergieren, und damit (27) gilt, muss die Reihe auch gegen $f(x+y)$ konvergieren!

Satz 105.31 (Taylorreihe)

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, $f \in C^\infty(D, K^m)$, $x \in D$, $B_r(x) \subset D$. Falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k(y) = 0 \quad \forall y \in B_r(x)$$

\Rightarrow Taylorformel (27) gilt $\forall y \in B_r(x)$ und f heißt analytisch in x .

Beweis. Folgt direkt aus Theorem 105.23

□

■ **Beispiel 105.32**

$\sin, \cos, \exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind jeweils analytisch in allen $x \in \mathbb{C}$ und (27) gilt jeweils $\forall y \in \mathbb{C}$ (klar für $x = 0$) aus der Definition, für $x \neq 0$ erfolgt der Nachweis als ÜA / Selbststudium.

106. Extremwerte

106.1. Lokale Extrema ohne Nebenbedingung

Betrachte $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D offen, f diffbar.

notwendige Bedingung: (Theorem 55.1): f hat lokales Minimum / Maximum in $x \in D \Rightarrow f'(x) = 0$

Frage: Hinreichende Bedingung?

Definition (definit, semidefinit, indefinit)

$f^{(k)}(x)$ für $k \geq 2$ heißt positiv definit (negativ definit), falls

$$f^{(k)}(x)y^k > 0 (< 0) \quad \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (1)$$

und positiv (negativ) semidefinit mit \geq (\leq).

$f^{(k)}$ heißt indefinit, falls

$$\exists y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : f^{(k)}(x)y_1^k < 0 < f^{(k)}(x)y_2^k \quad (2)$$

Hinweis: k ungerade, $f^{(k)}(x) \neq 0 \Rightarrow f^{(k)}(x)$ indefinit, denn $f^{(k)}(-y)^k = (-1)^k f^{(k)}(x)y^k$

Satz 106.1 (Hinreichende Extremwertbedingung)

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D offen, $f \in C^k(D, \mathbb{R})$, $x \in D$, $k \geq 2$ und sei

$$f'(x) = \dots = f^{(k-1)}(x) = 0 \quad (3)$$

Dann:

- f hat strenges lokales Minimum (Maximum), falls $f^{(k)}(x)$ positiv (negativ) definit
- f hat weder Minimum noch Maximum, falls $f^{(k)}(x)$ indefinit.

► **Bemerkung 106.2**

- Falls $f^{(k)}(x)$ positiv (negativ) semidefinit \Rightarrow keine Aussage möglich.

(betrachte $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$, hat Minimum in $x = 0$, aber $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3$ hat weder Minimum noch Maximum in $x = 0$)

- b)** liefert: $f^{(k)}(x) \neq 0$ positiv (negativ) semidefinit ist notwendige Bedingung für ein lokales Minimum bzw. Maximum, falls (3) gilt

Beweis.

zu a) Für Minimum (Maximum analog):

Sei $f^{(k)}(x)$ positiv definite Abbildung, $y \rightarrow f^{(k)}(x)y^k$ stetige Abbildung (folgt aus Bemerkung 105.8).

Sei $S = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| = 1\}$ ist kompakt

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{\text{Theorem 36.3}} \exists \tilde{y} \in S : f^{(k)}(x)y^k \geq f^{(k)}(x)\tilde{y}^k =: \gamma > 0 \quad \forall y \in S \\
&\xrightarrow{\text{Theorem 105.23}} f(x+y) = f(x) + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x)y^k + o(|y|^k) \\
&= f(x) + \frac{1}{k!}|y|^k \left(\underbrace{f^{(k)}(x) \left(\frac{y}{|y|}\right)^k}_{\geq \gamma} + \underbrace{o(1)}_{\geq -\frac{\gamma}{2}} \right), \quad |y| \rightarrow 0 \\
&\geq f(x) + \frac{\gamma}{2k!} \cdot |y|^k \quad \forall y \in B_r(0) \text{ falls } y \in B_r(0), r > 0 \text{ klein} \\
&\Rightarrow x \text{ ist strenges, lokales Minimum} \Rightarrow \text{Behauptung}
\end{aligned}$$

zu b) Wähle y_1, y_2 gemäß (2), oBdA $|y_1| = |y_2| = 1$

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow[\substack{\text{analog zu a)} \\ |t| \text{ klein}}]{\text{Theorem 105.23}} f(x+ty_1) = f(x) + \frac{t^k}{k!} (f^{(k)}(x)y_1^k + o(1)) < f(x), \\
&f(x+ty_2) = f(x) + \frac{t^k}{k!} (f^{(k)}(x)y_2^k + o(1)) > f(x) \\
&\Rightarrow \text{Behauptung} \quad \square
\end{aligned}$$

Test Definitheit in Anwendungen: $k = 2$ wichtig (vgl. lineare Algebra).

$$f''(x) \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \times n} \text{ (HESSE-Matrix)}$$

$$f''(x)y^2 = f''(x)(y, y) = \langle (\text{Hess}f)(x)y, y \rangle, \text{ vgl. Beispiel 105.10}$$

Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist

- positiv (negativ) definit \Leftrightarrow alle Eigenwerte sind positiv (negativ)
- indefinit $\Rightarrow \exists$ positive und negative Eigenwerte

106.2. Sylvester'sches Definitheitskriterium

Eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist positiv definit **gdw.** alle führenden Hauptminoren positiv sind, d.h.

$$\alpha_k := \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

beachte: A negativ definit $\Leftrightarrow -A$ positiv definit

Spezialfall $n = 2$: • $\det A < 0 \Leftrightarrow$ indefinit

- $\alpha_1 < 0$ und $\det A > 0 \Leftrightarrow$ negativ definit

■ Beispiel 106.3

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1^2 + \cos x_2$

$$\Rightarrow f'(x_1, x_2) = (2x_1) - \sin x_2 = 0$$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = k \cdot \pi$, d.h. $\tilde{x} = (0, k \cdot \pi)$ für $k \in \mathbb{Z}$ sind Kandidaten für Extrema.

$$f''(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\cos x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f''(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & (-1)^{k+1} \end{pmatrix}$$

entsprechend ergeben sich folgende Fälle:

$\Rightarrow f''(\tilde{x})$ ist positiv definit für k ungerade $\Rightarrow f''(\tilde{x})$ ist indefinit für k gerade

\Rightarrow lokales Minimum, \Rightarrow kein Extremum

106.3. Lokale Extrema mit Gleichungsnebenbedingung

Betrachte $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ **diffbar**, D offen, $g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ **diffbar**

Frage:: Bestimmen von Extrema von f auf der Menge $G := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$, d.h. suche notwendige Bedingung (für hinreichende Bedingung siehe Vorlesung Optimierung)

Motivation: Für $m \geq 1$: notwendige Bedingung: $f'(\max)$ steht senkrecht auf der Niveaumenge G
 $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : f'(x_{\max}) + \lambda g'(x_{\max}) = 0$

Satz 106.4 (Lagrange-Multiplikatorregel, notwendige Bedingung)

Seien $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig, **diffbar**, D offen und sei $x \in D$ lokales Extremum von f bezüglich G , d.h.

$$\exists r > 0 : f(x) \underset{\leq}{\overset{\geq}{\approx}} f(y) \quad \forall y \in B_r(x)$$

mit $g(y) = 0$.

Falls $g'(x)$ regulär, d.h.

$$\text{rang } g'(x) = m, \tag{4}$$

dann

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^m : f'(x) + \lambda^\top g'(x) = 0 \tag{5}$$

Definition (Lagrangescher Multiplikator)

λ oben heißt Lagrangescher Multiplikator

► Bemerkung 106.5

- Offenbar nur für $m \leq n$
- x mit (4) heißt reguläres Extrema.
- Kandidaten für Extrema bestimmen: (5) liefert n Gleichungen für $n + m$ Unbekannte (x, λ) , aber (5) mit $g(x) = 0$ liefert $n + m$ Gleichungen für (x, λ)

Beweis. Vgl. Literatur. □

■ Beispiel 106.6

Bestimme reguläre Extrema von f auf $G = \{g = 0\}$ mit

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$$

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + 4y^2 - 1 \\ z \end{pmatrix}$$

Betrachte $\lambda^\top = (\lambda_1, \lambda_2)$:

$$0 = f'(x, y, z) + \lambda^\top g'(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) + \lambda^\top \cdot \begin{pmatrix} 2x & 8y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$0 = g(x, y, z)$$

Das heißt

$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda_1 x &= 0 & x^2 + 4y^2 &= 1 \\ 2y + 8\lambda_1 y &= 0 & z &= 0 \\ 2z + \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow z = 0, \lambda_2 = 0$, und

$$x(1 + \lambda_1) = 0 \qquad y(1 + 4\lambda_1) = 0 \qquad x^2 + 4y^2 = 1$$

falls: $\bullet x \neq 0: \lambda_1 = -1, y = 0, x = \pm 1 \Rightarrow (\pm 1, 0, 0)$
 $\bullet x = 0: y = \pm \frac{1}{2}, \lambda_1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow (0, \pm \frac{1}{2}, 0)$ } Kandidaten für reguläre Extrema

Offenbar ist $\text{rang } g'(x, y, z) = 2$ für alle Kandidaten.

Da G Ellipse in der x - y -Ebene ist, und f die Norm in's Quadrat, prüft man leicht: Minimum in $(0, \pm \frac{1}{2}, 0)$ und Maximum in $(\pm 1, 0, 0)$.

106.4. Globale Extrema mit Abstrakter Nebenbedingung

Betrachte $f : \bar{D} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, D offen, f stetig auf \bar{D} , [diffbar](#) auf D .

Existenz: nach Theorem [36.3](#):

D beschränkt $\xrightarrow{\bar{D} \text{ kompakt}}$ f besitzt auf \bar{D} ein Minimum und ein Maximum

Frage: Bestimme sogenannte globale Extremalstelle x_{\min}, x_{\max} .

Strategie: a) Bestimme lokale Extrema in D

b) Bestimme globale Extrema auf ∂D

c) Vergleiche Extrema aus a) und b)

■ **Beispiel 106.7**

Sei $f(x_1, x_2) = x_1^2 + \cos x_2$ mit $D = (-1, 1) \times (0, 4)$ (vgl. Beispiel 106.3).

Lokale Extrema in D : $f(0, \pi) = -1$ Minimum.

Globale Extrema auf ∂D :

- $x_1 = \pm 1$: Betrachte $x_2 \rightarrow f(\pm 1, x_2) = 1 + \cos x_2$ auf $[0, 4]$.

Offenbar $0 = f(\pm 1, \pi) \leq f(\pm 1, x_2) \leq f(\pm 1, 0) = 2$

- $x_2 = 0$: $x_1 \rightarrow f(x_1, 0) = x_1^2 + 1$ auf $[-1, 1]$

Offenbar $1 = f(0, 0) \leq f(x_1, 0) \leq f(\pm 1, 0) = 2$

- $x_2 = 4$: Betrachte $x_1 \rightarrow x_1^2 + \cos 4$ mit $[-1, 1]$

$\cos 4 \leq f(0, 4) \leq f(x_1, 4) \leq f(\pm 1, 4) = 1 + \cos 4$

Vergleich liefert: $x_{\min} = (0, \pi)$, $x_{\max} = (\pm 1, 0)$

Hinweis: Benutze für Extrema evtl. partielle Ableitungen

$$\begin{aligned} f_{x_2}(\pm 1, x_2) &= -\sin x_2 = 0 \\ \text{bzw. } f_{x_1}(x_1, 0) &= 2x_1 = 0 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

107. Inverse und implizite Funktionen

Frage 1: Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^m$ **diffbar**, $x \in D$. Wann existiert – zumindest lokal – **diffbar** Umkehrfunktion?

Vorbetrachtung: f ist dann (lokal) Diffeomorphismus und man hat in Umgebung von x

- f^{-1} existiert $\Rightarrow f$ injektiv
- f^{-1} **diffbar**, z.B. $y \in K^m \Rightarrow B_\varepsilon(y) \subset f(K^m)$ für ein $\varepsilon > 0 \Rightarrow (y \text{ innerer Punkt}) f$ surjektiv

Falls f linear, d.h. $f(x) = Ax$ und $A \in L(K^n, K^m) \Rightarrow n = m$ und A regulär.

Für allgemeine Funktion sollte dann gelten: $n = m$, $f'(x)$ regulär (sonst ungewiss)

■ Beispiel 107.1

Sei $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_j(x) = x^j$ (in Umgebung von 0). f_1 und f_3 sind invertierbar, f_2 nicht.

wobei: $f_1'(0) = 1 (\neq 0)$ regulär, $f_2'(0) = 0 = f'(0) \Rightarrow$ nicht regulär

■ Beispiel 107.2

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cos \frac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(0) = 1$, d.h. regulär

aber: f in keiner Umgebung von $x = 0$ invertierbar (Selbststudium / ÜA) (Problem: f' nicht stetig in $x = 0$)

Lemma 107.3

Sei $f : U \subset K^n \rightarrow V \subset K^m$, U, V offen, f Diffeomorphismus mit $f(U) = V$
 $\Rightarrow n = m$

Beweis. Sei $y = f(x) \in V$ für $x \in U$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(x)) = x, f(f^{-1}(y)) = y$$

$$\xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{Kettenregel}} \underbrace{(f^{-1})'(f(x))}_{n \times m} \cdot \underbrace{f'(x)}_{m \times n} = \text{id}_{K^n}, f'(x) \cdot (f^{-1})'(y) = \text{id}_{K^m}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mathfrak{Rc}((f^{-1})'(y)) = K^n \Rightarrow n \leq m \text{ sowie} \\ \mathfrak{Rc}(f'(x)) = K^m \Rightarrow m \leq n \end{array} \right\} n = m$$

□

Frage 2: Lösen von Gleichungen:

Sei $f : D \subset K^n \times K^l \rightarrow K^m$, $(x, y) \in K^n \times K^l$.

Bestimme Lösungen y in Abhängigkeit vom Parameter x für folgende Gleichung:

$$f(x, y) = 0 \quad (1)$$

Sinnvolle Anwendung:

- Lösung $y = g(x)$ hängt stetig oder Differenzierbar vom Parameter x ab

■ Beispiel 107.4

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **diffbar**.

Betrachte die Niveaumenge

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} \quad (\cong \text{Kurve})$$

Im Allgemeinen mehrere Lösungen von (1) für \tilde{x} fest.

\Rightarrow betrachte lokale Lösung, d.h. fixiere $(x_0, y_0) \in N$ und suche Lösungen in der Umgebung.

Was passiert bei (x_j, y_j) ?

- $j = 1$: Kreuzungspunkt: \Rightarrow keine eindeutige Lösung (offenbar $f'(x, y) = 0$)
- $j = 2$: kein eindeutiges y (offenbar $f'(x, y) = 0$)
- $j = 3$: eindeutige Lösung, aber Grenzfall mit $f_y(x_3, y_3) = 0$
- $j = 4$: eindeutige Lösung y und offenbar $f_y(x_4, y_4) \neq 0$

Vermutung \Rightarrow lokale Lösung existiert, falls $f_y(x_0, y_0)$ regulär

allgemein \Rightarrow a) beste lokale Lösungen, d.h. in Umgebung einer Lösung $(x_0, y_0) \in D$

b) lokal eindeutige Lösung y erforderlich $\forall x$

$\Rightarrow y \rightarrow f(x, y)$ muss invertierbar sein für festes x

\Rightarrow i.A. nur für $l = m$ möglich (vgl. Lemma 107.3).

Betrachte z.B. f affin linear in y , d.h. (1) hat die Form $A(x)y = b(x)$ mit $A(x) \in L(K^l, K^m)$, $b(x) \in K^m$

\Rightarrow betrachte somit $f : D \subset K^n \times K^m \rightarrow K^m$

\Rightarrow für gegebenes x hat (1) m skalare Gleichungen mit m skalaren Unbekannten

$$f^j(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

\Rightarrow Faustregel: wie bei linearen Gleichungen benötigt man m skalare Gleichungen zur Bestimmung von m skalaren Unbekannten.

(mehrere Gleichungen: in der Regel keine Lösung, weniger Gleichungen:

i.A. viele Lösungen)

Definition

u[(lokale) Lösung] Funktion $\tilde{y} : \tilde{D} \subset K^n \rightarrow K^m$ heißt (lokale) Lösung von (1) in x auf \tilde{D} falls

$$f(x, \tilde{y}(x)) = 0 \quad \forall x \in \tilde{D} \quad (2)$$

Man sagt: (1) beschreibt Funktion \tilde{y} implizit (d.h. nicht explizit)
häufig schreibt man $y(x)$ statt $\tilde{y}(x)$

Sei $f : D \subset K^n \times K^m \rightarrow K^m$, D offen, $f_x(x, y)$ bzw. $f_y(x, y)$ ist Ableitung der Funktion $x \rightarrow f(x, y)$ (für y feste) im Punkt x bzw. von $y \rightarrow f(x, y)$ (x fest) im Punkt y heißt partielle Ableitung von f in (x, y) bezüglich x . bzw. y

Theorem 107.5 (Satz über implizite Funktionen)

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^m \times K^m \rightarrow K^m$, D offen, f stetig und

- $f(x_0, y_0) = 0$ für ein $(x_0, y_0) \in D$
- die Partielle Ableitung $f_y : D \rightarrow L(K^m, K^m)$ existiert, ist stetig in (x_0, y_0) und $f_y(x_0, y_0)$ ist regulär

Dann:

- $\exists r, \rho > 0 : \forall x \in B_r(x_0) \exists! y = \tilde{y} \in B_\rho(y_0)$ mit $f(x, \tilde{y}(x)) = 0$ und $\tilde{y} : B_r(x_0) \rightarrow B_\rho(y_0)$ stetig
(beachte: $B_r(x_0) \times B_\rho(y_0) \subset D$)
- falls zusätzlich $f : D \rightarrow K^m$ stetig **diffbar**
 \Rightarrow auch \tilde{y} stetig **diffbar** auf $B_r(x_0)$ mit

$$\tilde{y}'(x) = - \underbrace{f_y(x, \tilde{y}(x))^{-1}}_{m \times m} \cdot \underbrace{f_x(x, \tilde{y}(x))}_{m \times n} \in K^{m \times n}$$

$GL(n, K) := \{A \in L(K^n, K^n) \mid A \text{ regulär}\}$ ist die allgemeine lineare Gruppe .

Lemma 107.6

- Sei $A \in GL(n, K)$, $B \in L(K^n, K^n)$, $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$
 $\Rightarrow B \in GL(n, K)$
- $\varphi : GL(n, K) \rightarrow GL(n, K)$ mit $\varphi(A) = A^{-1}$ ist stetig.

Hinweis: a) liefert, dass $GL(n, K) \subset L(K^n, K^n)$ offen ist

Beweis (Lemma 107.6).

zu (a) Es ist

$$\begin{aligned} \|\text{id} - A^{-1}B\| &= \|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\| < 1 \\ \|(\text{id} - A^{-1}B)x\| &\leq \|\text{id} - A^{-1}B\| \cdot \|x\| < \|x\| \quad \forall x \neq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Sei $A^{-1}Bx = 0$ für $x \neq 0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \text{id} \Rightarrow C := A^{-1}B$ regulär
 $\Rightarrow B = AC$ regulär

zu (b) Fixiere $A \in \text{GL}(n, K)$ und betrachte $B \in \text{GL}(n, K)$ mit

$$\|B - A\| \leq \frac{1}{2\|A^{-1}\|} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\forall y \in K^n} & |B^{-1}y| = |A^{-1}AB^{-1}y| \leq \|A^{-1}\| \|AB^{-1}y\| = \|A^{-1}\| \|(A - B)B^{-1}y + y\| \\ & \leq \|A^{-1}\| (\|A - B\| |B^{-1}y| + |y|) \stackrel{(4)}{\leq} \frac{1}{2} |B^{-1}y| + \|A^{-1}\| |y| \\ \Rightarrow & |B^{-1}y| \leq 2\|A^{-1}\| |y| \quad \forall y \in K^n \\ \Rightarrow & \|B^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\| \\ \Rightarrow & \|\varphi(B) - \varphi(A)\| = \|B^{-1} - A^{-1}\| = \|B^{-1}(A - B)A^{-1}\| \\ & \leq \|B^{-1}\| \cdot \|A - B\| \|A^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|^2 \|A - B\| \\ \Rightarrow & \lim_{B \rightarrow A} \varphi(B) = \varphi(A) \\ \Rightarrow & \varphi \text{ stetig in } A \xrightarrow{A \text{ beliebig}} \text{Behauptung} \quad \square \end{aligned}$$

Beweis (Theorem 107.5). Setze $\varphi(x, y) := y - f_y(x_0, y_0)^{-1}f(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$

a) Offenbar existiert die partielle Ableitung $\varphi_y(x, y) = \text{id}_{K^m} - f_y(x_0, y_0)^{-1}f_y(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$

Da f_y stetig in (x_0, y_0) und $\varphi(x_0, y_0) = 0$ existiert konvexe Umgebung $U(x_0, y_0) \subset D$ von (x_0, y_0) und

$$\|\varphi_y(x, y)\| < \frac{1}{2} \quad \forall (x, y) \in U(x_0, y_0)$$

Für feste $(x, y), (x, z) \in U(x_0, y_0)$ liefert der Schrankensatz ein $\tau \in (0, 1)$ mit

$$|\varphi(x, y) - \varphi(x, z)| \leq \|\varphi_y(x, \underbrace{z + \tau(y - z)}_{\in U(x_0, y_0)})\| |y - z| \leq \frac{1}{2} |y - z| \quad \forall (y, z), (x, z) \in U(x_0, y_0) \quad (5)$$

Nun existiert $\rho > 0 : \overline{B_\rho(x_0) \times B_\rho(y_0)} \subset U(x_0, y_0)$.

Da f stetig, $f(x_0, y_0) = 0$ existiert $r > 0$:

$$\|f_y(x_0, y_0)^{-1}f(x, y_0)\| < \frac{1}{2}\rho \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\varphi(x, y) - y_0| & \leq |\varphi(x, y) - \varphi(x, y_0)| + |\varphi(x, y_0) - y_0| \\ & \stackrel{(5)}{\leq} \frac{1}{2} |y - y_0| + \|f_y(x_0, y_0)^{-1}\| \cdot |f(x, y_0)| < \rho \quad \forall x \in B_r(x_0), y \in \overline{B_\rho(y_0)} \\ \Rightarrow \varphi(x, \cdot) : \overline{B_\rho(y_0)} & \rightarrow \overline{B_\rho(y_0)} \quad \forall x \in B_r(x_0) \end{aligned} \quad (6)$$

und $\varphi(x, \cdot)$ ist kontraktiv nach (5) $\forall x \in B_r(x_0)$
 $\xrightarrow{\text{Satz 36.16}} \forall x \in B_r(x_0) \exists!$ Fixpunkt: $y = \tilde{y}(x) \in \overline{B_\rho(y_0)}$ mit

$$\tilde{y}(x) = \varphi(x, \tilde{y}(x)) \quad (7)$$

Offenbar (7) $\Leftrightarrow f_y(x_0, y_0)^{-1}f(x, \tilde{y}(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x, \tilde{y}(x)) = 0$

Wegen (6) und (7) ist $\tilde{y}(x) \in B_\rho(y_0)$

\Rightarrow Behauptung (1) bis auf Stetigkeit von \tilde{y}

b) Zeige: \tilde{y} ist stetig. Für $x_1, x_2 \in B_r(x_0)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{y}(x_2) - \tilde{y}(x_1)| &\stackrel{(7)}{=} |\varphi(x_2, \tilde{y}(x_2)) - \varphi(x_1, \tilde{y}(x_1))| \\
 &\leq |\varphi(x_2, \tilde{y}(x_2)) - \varphi(x_2, \tilde{y}(x_1))| + |\varphi(x_2, \tilde{y}(x_1)) - \varphi(x_1, \tilde{y}(x_1))| \\
 &\stackrel{(5)}{\leq} \frac{1}{2} |\tilde{y}(x_2) - \tilde{y}(x_1)| + \|f_y(x_0, y_0)^{-1}\| \cdot |f(x_2, \tilde{y}(x_1)) - f(x_1, \tilde{y}(x_1))| \\
 &\stackrel{\text{Def. } \varphi}{\leq} \frac{1}{2} |\tilde{y}(x_2) - \tilde{y}(x_1)| + \|f_y(x_0, y_0)^{-1}\| \|f(x_2, \tilde{y}(x_1)) - f(x_1, \tilde{y}(x_1))\| \\
 \Rightarrow |\tilde{y}(x_2) - \tilde{y}(x_1)| &\leq 2\|f_y(x_0, y_0)^{-1}\| \|f(x_2, \tilde{y}(x_1)) - f(x_1, \tilde{y}(x_1))\| \quad (8)
 \end{aligned}$$

Da f stetig folgt \tilde{y} stetig auf $B_r(x_0)$

c) Zeige 2): Fixiere $x \in B_r(x_0)$, $z \in K^n$

Da f diffbar und \tilde{y} Lösung, gilt für $|t|$ klein nach Satz 53.1 b):

$$\begin{aligned}
 0 &= f(x + t \cdot z, \tilde{y}(x + tz)) - f(x, \tilde{y}(x)), \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \\
 &= Df(x, \tilde{y}) \cdot \begin{pmatrix} tz \\ \tilde{y}(x + tz) - \tilde{y}(x) \end{pmatrix} + \underbrace{r(t)}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0} \cdot \begin{pmatrix} tz \\ \tilde{y}(x + tz) - \tilde{y}(x) \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow 0 &= f_x(x, \tilde{y}(x)) \cdot (tz) + f_y(x, \tilde{y}(x)) \cdot (\tilde{y}(x + tz) - \tilde{y}(x)) + \underbrace{r(t)}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0} \cdot \begin{pmatrix} tz \\ \tilde{y}(x + tz) - \tilde{y}(x) \end{pmatrix} \quad (9) \\
 &\hspace{15em} =: R(t)
 \end{aligned}$$

Wegen (8) existiert $c > 0$:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{y}(x + tz) - \tilde{y}(x)| &\leq c |f(x + tz, \tilde{y}(x)) - f(x, \tilde{y}(x))| = c |f_x(x, \tilde{y}(x)) \cdot (tz) + o(t)| \\
 &\leq c (\|f_x(x, \tilde{y}(x))\| \cdot |z| \cdot |t| + o(1) \cdot |t|) \\
 &\leq c (\|f_x(x, \tilde{y}(x))\| \cdot |z| + o(1)) |t| \quad \text{für } |t| \text{ klein}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R(t) = o(t), t \rightarrow 0$$

Wegen $f_y(x_0, \tilde{y}(x_0)) \in \text{GL}(m, K)$, f_y stetig, \tilde{y} stetig

Lemma 107.6 \Rightarrow für eventuell kleineres $r > 0$ als oben:

$$f_y(x, \tilde{y}(x)) \in \text{GL}(m, K) \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

$$\stackrel{(9)}{\Rightarrow} \tilde{y}(x + tz) - \tilde{y}(x) = -f_y(x, \tilde{y}(x))^{-1} \cdot f_x(x, \tilde{y}(x)) \cdot (tz) + o(t), t \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \tilde{y}'(x, z) \text{ existiert } \forall z \in K^n \text{ mit}$$

$$\tilde{y}'(x, z) = - \underbrace{f_y(x, \tilde{y}(x))^{-1} \cdot f_x(x, \tilde{y}(x))}_{\text{stetig bezüglich } x, \text{ da } f \in C^1 \text{ nach Lemma 107.6}} \cdot z \quad \forall z \in K^n \quad (10)$$

$$\Rightarrow \text{Alle partiellen Ableitungen } \tilde{y}_{x_j} \text{ sind stetig auf } B_r(x_0)$$

$$\stackrel{\text{Theorem 55.14}}{\Rightarrow} \tilde{y} \text{ stetig diffbar auf } B_r(x_0)$$

Wegen $\tilde{y}'(x) \cdot z = \tilde{y}'(x; z)$ folgt aus (10) die Formel für $\tilde{y}'(t)$ □

Hinweis: Sei $f = (f^1, \dots, f^m) : D \subset K^n \times K^n \rightarrow K^m$, D offen und seien alle partiellen Ableitungen $f_{y_j}^i$

stetig in y (d.h. $y \rightarrow f_{y_j}^i(x, y)$ stetig für x fest $\forall i = 1, \dots, m$)

$$\xrightarrow{\text{Theorem 55.14}} f_y(x, y) = \begin{pmatrix} f_{y_1}^1(x, y) & \dots & f_{y_m}^1(x, y) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{y_1}^m(x, y) & \dots & f_{y_m}^m(x, y) \end{pmatrix}$$

Analog erhält man $f_x(x, y) \in K^{m \times n}$.

Falls alle $f_{x_j}^j, f_{y_i}^i$ stetig sind in x und y

$\Rightarrow f$ diffbar mit

$$f'(x, y) = (f_x(x, y) \mid f_y(x, y))$$

■ Beispiel 107.7

Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2(1 - x^2) - y^2 \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Offenbar ist

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x(1 - x^2) - 2x^3 = 2x - 4x^3 \\ f_y(x, y) &= -2y \end{aligned}$$

Suche Lösungen von $f(x, y) = 0$

• $y_0 = 0$: $f_y(x_0, 0) = 0$ nicht regulär \Rightarrow Theorem nicht anwendbar

• $y_0 \neq 0$: $f_y(x_0, y_0) \neq 0$, also regulär.
Sei $f(x_0, y_0) = 0 \xrightarrow{\text{Theorem 107.5}}$ anwendbar, z.B. $(x_0, y_0) = (\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{9})$ ist Nullstelle von f

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists r, \rho > 0, \text{ Funktion } \tilde{y}: f(x, \tilde{y}(x)) = 0 \forall x \in B_r(\frac{1}{3}) \\ &\tilde{y}(\frac{1}{3}) = \frac{2\sqrt{2}}{9} \text{ und } \tilde{y}(x) \text{ ist einzige Lösung um } B_\rho(\frac{2\sqrt{2}}{9}) \\ &\tilde{y}'\left(\frac{1}{3}\right) = -f_y\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{9}\right)^{-1} \cdot f_x\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{9}\right) \\ &= -\left(-\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{27}\right) = \frac{7}{6\sqrt{2}} \approx 0,8 \end{aligned}$$

• $y_0 = 0, x_0 = 1$: hier ist $f_x(1, 0) = -2$, also regulär

$$\xrightarrow{\text{Theorem 107.5}} \exists \text{ lokale Lösung } \tilde{x}(y): f(\tilde{x}(y), y) = 0 \forall y \in B_{\tilde{r}}(0) \text{ und } \tilde{x}'(0) = 0$$

• $y_0 = 0, x_0 = 0$: $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ nicht regulär

$$\xrightarrow{\text{Theorem 107.5}} \text{ in keiner Variante Anwendbar.}$$

■ **Beispiel 107.8**

Betrachte nicht-lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2e^u + vw &= 5 \\ v \cos u - 6u + 2w &= 7 \end{aligned} \tag{11}$$

Offenbar $(u, v, w) = (0, 1, 3)$ Lösung.

Faustregeln: 2 Gleichungen, 3 Unbekannte \Rightarrow „viele“ Lösungen, 1 Freiheitsgrad
 \Rightarrow Suche Lösung der Form $(u, v) = g(w)$ nahe obiger Lösung für $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

Betrachte mit $x := w$, $g = (y_1, y_2) := (u, v)$ Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{y_1} + y_2 x - 5 \\ y_2 \cos y_1 - 1 - 6y_1 + 2x - 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f_y(x, y) = \begin{pmatrix} 2e^{y_1} & x \\ -y_2 \sin y_1 - 6 & \cos y_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f_y((3, 0, 01)) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ regulär, det} = 20$$

Theorem 107.5 $\Rightarrow \exists$ Funktion $g : (3 - r, 3 + r) \rightarrow B_\rho((0, 1))$ mit

$$f(x, g(x)) = 0, \quad g(3) = (0, 1)$$

Insbesondere $(u, v, w) = (g(w), w)$ sind weitere Lösungen von (11).

$$g'(3) = -f_y(3, (0, 1))^{-1} \cdot f_x(3, (0, 1)) = - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Zurück zu Frage 1: Wann hat $f : D \subset K^n \rightarrow K^n$ eine **diffbar** Umkehrfunktion?

Betrachte Gleichung $f(x) - y = 0$. Falls diese Gleichung nach x auflösbar, d.h. $\exists g : K^n \rightarrow K^n$ mit $f(g(y)) = y \forall y \Rightarrow g = f^{-1}$

Theorem 107.9 (Satz über inverse Funktionen)

Sei $f : U \subset K^n \rightarrow K^n$, U offen, f stetig **diffbar**, $f'(x)$ regulär für ein $x_0 \in U$

\Rightarrow Es existiert eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von x_0 , sodass $V_0 := f(U_0)$ offene Umgebung von $y_0 := f(x_0)$ ist, und die auf U_0 eingeschränkte Abbildung $f : U_0 \rightarrow V_0$ ist Diffeomorphismus.

Satz 107.10 (Ableitung der inversen Funktion)

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^n$, D offen, f injektiv und **diffbar**, f^{-1} **diffbar** in $y \in \text{int } f(D)$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1} \quad (12)$$

(bzw. $(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1}$ falls $y = f(x)$)

Spezialfall $n = m = 1$: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Beweis (Theorem 107.9). Betrachte $\tilde{f} : D \times K^n \rightarrow K^n$ mit $\tilde{f}(x, y) = f(x) - y$.

Offenbar ist \tilde{f} stetig, $\tilde{f}(x_0, y_0) = 0$ und $\tilde{f}_x(x, y) = f'(x)$, $\tilde{f}_y(x, y) = -\text{id}_{K^n} \forall (x, y)$

$\Rightarrow \tilde{f}_x, \tilde{f}_y$ stetig $\Rightarrow \tilde{f}$ stetig **diffbar**

Nach Voraussetzung $\tilde{f}_x(x_0, y_0) = f'(x_0)$ regulär

Theorem 107.5 $\Rightarrow \exists r, \rho > 0: \forall y \in B_r(y_0) \exists! x = \tilde{x}(y) \in B_\rho(x_0)$ mit $0 = \tilde{f}(\tilde{x}(y), y) = f(\tilde{x}(y)) - y$

\Rightarrow lokal inverse Funktion $f^{-1} = \tilde{x}$ existiert auf $B_r(y_0) =: V_0$ und ist stetig **diffbar**.

Setze $U_0 := f^{-1}(V_0) = \underbrace{\{x \in D \mid f(x) \in V_0\}}_{\text{offen, da } f \text{ stetig}} \cap B_\rho(x_0)$ offene Umgebung von x_0

$\Rightarrow f(U_0) = V_0 \Rightarrow f : U_0 \rightarrow V_0$ ist Diffeomorphismus □

Beweis (Satz 107.10). f^{-1} existiert, f **diffbar**, f^{-1} **diffbar** in $y = f(x)$, $x \in D$.

Wegen $f(f^{-1}(y)) = y$, $f^{-1}(f(x)) = x$ folgt

$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = \text{id}_{K^n}, \quad (f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1} = \text{id}_{K^n}$$

$\Rightarrow f'(f^{-1}(y))^{-1} = (f^{-1})'(y)$ □

Als Folgerung eine globale Aussage:

Satz 107.11

Sei $f : D \subset K^n \rightarrow K^n$, D offen, f stetig **diffbar**, $f'(x)$ regulär $\forall x \in D$

\Rightarrow (a) (Satz über offene Abbildungen)

$f(D)$ ist offen

(b) (Diffeomorphiesatz)

f injektiv $\Rightarrow f : D \rightarrow f(D)$ ist Diffeomorphismus

Beweis.

zu a) Sei $y_0 \in f(D) \Rightarrow x_0 \in D : y_0 = f(x_0)$

Theorem 107.9 $\Rightarrow \exists$ Umgebung $V_0 \subset f(D)$ von y_0

y_0 beliebig $\Rightarrow f(D)$ offen

zu b) Offenbar existiert $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$

Lokale Eigenschaften wie Stetigkeit und **diffbarkeit** folgen aus Theorem 107.9 □

■ Beispiel 107.12

Sei $f(x) = a^x \forall x \in \mathbb{R}$ ($a > 0, a \neq 1$)

Beispiel 53.18 $\Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a, f'$ stetig

Offenbar $f^{-1}(y) = \log_a y \forall y > 0, f'(x) \neq 0$, d.h. regulär $\forall x \in \mathbb{R}$

Satz 107.11 $\Rightarrow f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist Diffeomorphismus und
 f injektiv

$$(\log_a y)' = (f^{-1})'(y) \stackrel{y=f(x)}{=} \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a} \quad \forall y > 0$$

(vgl. Beispiel 53.19)

■ Beispiel 107.13

Sei $f(x) = \tan x \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Beispiel 53.21 $\Rightarrow (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0 \forall x$, stetig

Satz 107.11 $\Rightarrow \arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist Diffeomorphismus und

$$(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \cos^2 x = \frac{1}{\tan^2 x + 1} = \frac{1}{1 + y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

■ Beispiel 107.14 (Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2)

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Offenbar stetig **diffbar** auf $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ mit

$$f'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Wegen $\det f'(x) = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r$ ist $f'(r, \varphi)$ regulär $\forall r, \varphi \in (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R})$

Theorem 107.9 $\Rightarrow f$ ist lokal Diffeomorphismus, d.h. für jedes $(r_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ existiert Umgebung U_0 , sodass $f : U_0 \rightarrow V_0 := f(U_0)$ Diffeomorphismus ist.

Für Ableitung $(f^{-1})'(x, y)$ mit $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ gilt mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$(f^{-1})'(x, y) = f'(r, \varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \neq 0$$

beachte: $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist kein Diffeomorphismus, da f nicht injektiv (f periodisch in φ),

aber: $f : \mathbb{R}_{>0} \times (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{Strahl in Richtung } \varphi_0\}$ ist Diffeomorphismus für beliebiges $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ nach Satz 107.11 (b).

folglich: Voraussetzung f injektiv in Satz 107.11 (b) ist wesentlich.

108. Funktionsfolgen

Betrachte $f_k : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, f_k **diffbar** für $k \in \mathbb{N}$

Frage:: Wann konvergiert $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gegen **diffbare** Funktion f mit $f'_k \rightarrow f'$

Wiederholung: alle f_k stetig, $f_k \rightarrow f$ gleichmäßig auf $D \xrightarrow{\text{Satz 35.19}} f$ stetig

■ Beispiel

Sei $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \frac{\sinh^2 x}{k}$.

Wegen $|f_k(x)| \leq \frac{1}{k} \forall k \Rightarrow f_k \rightarrow f$ gleichmäßig auf \mathbb{R} für $f = 0$

Aber $f'_k(x) = k \cdot \cosh^2 x \not\rightarrow f'(x) = 0$

■ Beispiel 108.1

Sei $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}}$, wobei $f(x) = |x|$

\Rightarrow alle f_k **diffbar**, $f_k \rightarrow f$ gleichmäßig auf $[-1, 1]$ und $(|f_k(x) - f(x)| \leq f_k(0) \frac{1}{\sqrt{k}}$ aber f nicht **diffbar**

■ Beispiel 108.2

Sei $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \frac{\sin kx}{x}$, $\Rightarrow f_k \rightarrow f(x) = 0$ gleichmäßig auf \mathbb{R} (da $|f_k(x)| \leq \frac{1}{k} \forall x \in \mathbb{R}$)

aber $f'_k(x) = \cos kx \not\rightarrow f'(x) = 0$

Satz 108.3 (Differentiation bei Funktionsfolgen)

Sei $f_k : D \subset K^n \rightarrow K^m$, D offen, beschränkt, f_k **diffbar** $\forall k$ und

(a) $f'_k \rightarrow g$ gleichmäßig auf $B_r(x) \subset D$

(b) $\{f_k(x_0)\}_k$ konvergiert für ein $x_0 \in B_r(x)$

$\Rightarrow f_k \rightarrow f$ gleichmäßig auf $B_r(x)$ und f ist **diffbar** auf $B_r(x)$ mit

$$f'_k(y) \rightarrow f'(y) \quad \forall y \in B_r(x)$$

Hinweis: Betrachte $f_k(x) := \frac{\sin x}{k} + k$ auf \mathbb{R} um zu sehen ($g = 0$), dass Voraussetzung (b) wichtig ist.

Beweis. Für $\varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_k(x_0) - f_l(x_0)| < \varepsilon \quad \forall k, l \geq k_0 \text{ und} \quad (1)$$

$$\|g(y) - f'_k(y)\| < \varepsilon, \|f'_k(y) - f'_l(y)\| < \varepsilon \forall k, l \geq k_0, y \in B_r(x) \quad (2)$$

Weiter gilt (eventuell für größeres k_0) $\|g(z) - f'_k(z)\| < \varepsilon$ und

$$\|f'_k(y) - f'_l(y)\| < \varepsilon \quad \forall k, l \geq k_0, z, y \in B_r(x) \quad (3)$$

Schrankensatz: $\forall z, y \in B_r(x), k, l \geq k_0 \exists \xi \in [y, z]$ mit

$$\|(f_k(y) - f_l(y)) - (f_k(z) - f_l(z))\| \leq \|f'_k(\xi) - f'_l(\xi)\| \cdot |y - z| \leq \varepsilon |y - z| < 2r \cdot \varepsilon \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f_k(y) - f_l(y)| &\leq |(f_k(y) - f_l(y)) - (f_k(x_0) - f_l(x_0))| + |f_k(x_0) - f_l(x_0)| \\ &\leq 2r\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(2r + 1) \quad y \in B_r(x), \quad k, l \geq k_0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \{f_k(y)\}_{k \in \mathbb{N}} &\text{ ist CF in } K^m \quad \forall y \\ \Rightarrow f_k(y) &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(y) \quad \forall y \in B_r(x) \end{aligned}$$

Mit $l \rightarrow \infty$ in (5): $f_k \rightarrow f$ gleichmäßig auf $B_r(x)$

Fixiere $\tilde{x} \in B_r(x)$, $k = k_0$. Dann liefert $l \rightarrow \infty$ in (4)

$$|f(y) - f(\tilde{x}) - (f_k(y) - f_k(\tilde{x}))| \leq \varepsilon|y - \tilde{x}| \quad \forall y \in B_r(x)$$

Da f_k diffbar $\exists \rho = \rho(\varepsilon) > 0$ mit

$$|f_k(y) - f_k(\tilde{x}) - f'_k(\tilde{x}) \cdot (y - \tilde{x})| \leq \varepsilon|y - \tilde{x}| \quad \forall y \in B_\rho(\tilde{x}) \subset B_r(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(y) - f(\tilde{x}) - g(\tilde{x}) \cdot (y - \tilde{x})| &\leq |f(y) - f(\tilde{x})| + |f_k(y) - f_k(\tilde{x})| \\ &\quad + |f_k(y) - f_k(\tilde{x}) - f'_k(\tilde{x}) \cdot (y - \tilde{x})| \\ &\quad + |f'_k(\tilde{x}) \cdot (y - \tilde{x}) - g(\tilde{x})(y - \tilde{x})| \\ &\leq \varepsilon|y - \tilde{x}| + \varepsilon|y - \tilde{x}| + \varepsilon|y - \tilde{x}| = 3\varepsilon|y - \tilde{x}| \quad \forall y \in B_\rho(\tilde{x}) \end{aligned} \quad (6)$$

Beachte: $\forall \varepsilon > 0 \exists \rho > 0$ und mit (6)

$$\Rightarrow f(y) - f(\tilde{x}) - g(\tilde{x}) \cdot (y - \tilde{x}) = o(|y - \tilde{x}|), \quad y \rightarrow \tilde{x}$$

$$\Rightarrow f(\tilde{x}) = g(\tilde{x}) \xrightarrow{\tilde{x} \text{ beliebig}} \text{Behauptung}$$

□

108.1. Anwendung auf Potenzreihen

Sei $f : B_R(x_0) \subset K \rightarrow K$ gegeben durch eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \forall x \in \underbrace{B_R(x_0)}_{\text{Konvergenzradius}} \quad (7)$$

Wiederholung: $R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$

Frage: Ist f diffbar und kann man gliedweise differenzieren?

Satz 108.4

Sei $f : B_r(x_0) \subset K \rightarrow K$ Potenzreihe gemäß (7)

$\Rightarrow f$ ist diffbar auf $B_r(x_0)$ mit

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} \quad \forall x \in B_r(x_0) \quad (8)$$

Folgerung 108.5

Sei $f : B_R(x_0) \subset K \rightarrow K$ Potenzreihe gemäß (7)
 $\Rightarrow f \in C^\infty(B_R(x_0), K)$ und

$$a_k = \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0) \quad (9)$$

(d.h. die Potenzreihe stimmt mit der Taylorreihe von f in x_0 überein)

Beweis. k -fache Anwendung von Satz 108.4 liefert $f \in C^k(B_r(x_0), K) \forall k \in \mathbb{N}$
 $\xrightarrow{(8)} f'(x) = a_1, f''(x_0) = 2a_2, \dots$ rekursiv folgt (9). □

Beweis (Satz 108.4). Betrachte die Partialsummen

$$f_k(x) := \sum_{j=0}^k a_j (x - x_0)^j \quad \forall x \in B_R(x_0)$$

$\Rightarrow f_k(x_0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0)$ und f_k diffbar mit

$$f'_k(x) = \sum_{j=1}^k j a_j (x - x_0)^{j-1} \quad \forall x \in B_R(x_0)$$

Wegen

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(k+1)|a_{k+1}|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot \left(\sqrt[k+1]{|a_{k+1}|}\right)^{\frac{k+1}{k}}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R}$$

hat die Potenzreihe

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

den Konvergenzradius R

\Rightarrow Reihe g konvergiert gleichmäßig auf $B_r(x_0) \forall r \in (0, R)$ (vgl. 13.1), d.h. $f'_k \rightarrow g$ gleichmäßig auf $B_r(x_0)$

$\xrightarrow{\text{Satz 108.3}} f$ ist diffbar auf $B_r(x_0)$ mit (8) auf $B_r(x_0)$.

Da $r \in (0, R)$ beliebig, folgt die Behauptung. □

■ Beispiel 108.6

Es gilt

$$\ln(1+x) = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \forall x \in (-1, 1) \subset \mathbb{R} \quad (10)$$

Beweis. $f(x)$ sei Potenzreihe in (10), hat Konvergenzradius $R = 1, x_0 = 0$

$\xrightarrow{\text{Satz 108.4}} f$ diffbar auf $(-1, 1)$ und

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{1}{1+x} \quad \text{geometrische Reihe}$$

und

$$\frac{d}{dx} \ln(1+x) = \frac{1}{1+x} = f'(x)$$
$$f(x) = \ln(1+x) + \text{const}$$

Wegen $f(0) = 0 = \ln 1 \Rightarrow f(x) = \ln(1+x) \forall x \in (-1, 1)$, d.h. (10) gilt.

□

Anhang

Anhang A: Listen

A.1. Liste der Theoreme

| | |
|---|-----|
| Theorem II.5.1: | 9 |
| Theorem II.7.14: | 23 |
| Theorem II.7.15: | 23 |
| Theorem II.7.19: | 25 |
| Theorem III.18.26: BOLZANO-WEIERSTRASS | 41 |
| Theorem III.19.3: | 44 |
| Theorem III.19.6: | 45 |
| Theorem III.20.1: | 46 |
| Theorem III.20.3: HEINE-BORELL kompakt, BOLZANO-WEIERSTRASS folgenkompakt | 47 |
| Theorem IV.36.3: Weierstraß | 64 |
| Theorem IV.36.11: Zwischenwertproposition | 65 |
| Theorem IV.36.14: Fundamentalproposition der Algebra | 65 |
| Theorem IV.36.22: Banacherscher Fixpunktproposition | 67 |
| Theorem V.54.11: Vollständige Reduktion | 91 |
| Theorem V.55.1: notwendige Optimalitätsbedingung | 96 |
| Theorem V.55.4: Mittelwertsatz | 97 |
| Theorem V.55.9: Schrankensatz | 99 |
| Theorem V.55.14: | 100 |
| Theorem VI.78.13: Lemma von Fatou | 132 |
| Theorem VI.78.14: Monotone Konvergenz | 133 |
| Theorem VI.78.16: Majorisierte Konvergenz | 133 |
| Theorem VI.78.18: Mittelwertsatz der Integralrechnung | 134 |
| Theorem VI.79.2: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung | 138 |
| Theorem VI.80.1: FUBINI | 145 |
| Theorem VI.80.11: Transformationssatz | 149 |
| Theorem VII.105.11: | 158 |
| Theorem VII.105.23: TAYLOR-scher Satz | 162 |
| Theorem VII.107.5: Satz über implizite Funktionen | 173 |

Theorem VII.107.9: Satz über inverse Funktionen [177](#)

A.2. Liste der benannten Sätze

| | | |
|-----------------|---|----|
| Satz I.1.7: | DE MORGAN'sche Regeln | 4 |
| Satz II.5.2: | Prinzip der vollständigen Induktion | 9 |
| Satz II.5.4: | Rekursive Definition / Rekursion | 10 |
| Satz II.7.3: | Binomischer Satz | 17 |
| Satz II.7.20: | Wurzeln | 25 |
| Satz III.16.1: | geoemtrisches / arithmetisches Mittel | 28 |
| Satz III.16.2: | allgemeine BERNOULLI-Ungleichung | 28 |
| Satz III.16.3: | YOUNG'sche Ungleichung | 29 |
| Satz III.16.4: | HÖLDER'sche Ungleichung | 29 |
| Satz III.16.6: | MINKOWSKI-Ungleichung | 30 |
| Satz III.18.3: | Eindeutigkeit des Grenzwertes | 36 |
| Satz III.18.18: | Konvergenz in $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$ bzgl. Norm | 39 |
| Satz III.18.31: | Satz von STOLZ | 42 |
| Satz III.21.1: | CAUCHY-Kriterium | 48 |
| Satz III.21.9: | Konvergenzkriterien für Reihen | 49 |
| Satz III.21.13: | LEIBNITZ-Kriterium für alternierende Reihen in \mathbb{R} | 50 |
| Satz III.21.17: | CAUCHY-Produkt | 51 |
| Satz III.21.19: | Doppelreihenproposition | 51 |
| Satz IV.35.3: | $\varepsilon\delta$ -Kriterium | 59 |
| Satz IV.35.4: | Rechenregeln | 59 |
| Satz IV.35.14: | Rechenregeln | 61 |
| Satz IV.36.17: | Identitätsproposition | 66 |
| Satz IV.36.24: | Partialbruchzerlegung | 68 |
| Satz V.52.3: | Rechenregeln für LANDAU-Symbole | 73 |
| Satz V.53.9: | Rechenregeln | 81 |
| Satz V.53.17: | Kettenregel | 84 |
| Satz V.53.22: | Reduktion auf skalare Funktionen | 86 |
| Satz V.54.5: | Eigenschaften des Gradienten | 90 |
| Satz V.55.3: | Satz von Rolle | 97 |
| Satz V.55.6: | Verallgemeinerter Mittelwertsatz in \mathbb{R} | 98 |

| | | |
|------------------|---|-----|
| Satz V.55.10: | LIPSCHITZ-Stetigkeit | 99 |
| Satz V.55.15: | Monotonie | 101 |
| Satz V.55.17: | Zwischenwertsatz für Ableitungen | 102 |
| Satz V.55.18: | Regeln von DE L'HOSPITAL | 102 |
| Satz V.56.2: | partielle Integration | 106 |
| Satz V.56.6: | Integration durch Substitution | 107 |
| Satz VI.77.14: | zusammengesetzte messbare Funktionen | 119 |
| Satz VI.77.15: | Approximation messbarer Funktionen | 121 |
| Satz VI.78.6: | Rechenregeln | 127 |
| Satz VI.78.7: | Eigenschaften | 128 |
| Satz VI.78.10: | Majorantenkriterium | 130 |
| Satz VI.78.19: | Stetigkeit | 134 |
| Satz VI.78.20: | Differenzierbarkeit | 135 |
| Satz VI.79.6: | Substitution für bestimmte Integrale | 139 |
| Satz VI.79.8: | partielle Integration für bestimmte Integrale | 140 |
| Satz VI.79.12: | Differenz von Funktionswerten | 142 |
| Satz VI.80.4: | Satz von TONELLI | 147 |
| Satz VII.105.17: | Satz von SCHWARZ | 159 |
| Satz VII.105.19: | notwendige Integrabilitätsbedingung | 160 |
| Satz VII.105.31: | Taylorreihe | 165 |
| Satz VII.106.1: | Hinreichende Extremwertbedingung | 166 |
| Satz VII.106.4: | Lagrange-Multiplikatorregel, notwendige Bedingung | 168 |
| Satz VII.107.10: | Ableitung der inversen Funktion | 178 |
| Satz VII.108.3: | Differentiation bei Funktionsfolgen | 181 |