

Lineare Algebra 1. Semester (WS2017/18)

Dozent: Prof. Dr. Arno Fehm

1 Grundgegriffe der Linearen Algebra

1.1 Logik und Mengen

Wir werden die Grundlagen der Logik und der Mengenlehre kurz ansprechen.

1.1.1 Überblick über die Aussagenlogik

Jede mathematisch sinnvolle Aussage ist entweder wahr oder falsch, aber nie beides!

- "1 + 1 = 2" → wahr
- "1 + 1 = 3" → falsch
- "Es gibt unendlich viele Primzahlen" → wahr

Man ordnet jeder mathematischen Aussage A einen Wahrheitswert "wahr" oder "falsch" zu. Aussagen lassen sich mit logischen Verknüpfungen zu neuen Aussagen zusammensetzen.

- \vee → oder
- \wedge → und
- \neg → nicht
- \Rightarrow → impliziert
- \Leftrightarrow → äquivalent

Sind also A und B zwei Aussagen, so ist auch $A \vee B$, $A \wedge B$, $\neg A$, $A \Rightarrow B$ und $A \Leftrightarrow B$ Aussagen. Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage ist eindeutig bestimmt durch die Wahrheitswerte ihrer Einzelaussagen.

- $\neg(1 + 1 = 3)$ → wahr
- "2 ist ungerade" \Rightarrow "3 ist gerade" → wahr
- "2 ist gerade" \Rightarrow "Es gibt unendlich viele Primzahlen" → wahr

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	f	w	w
w	f	w	f	f	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w	w

1.1.2 Überblick über die Prädikatenlogik

Wir werden die Quantoren

- \forall (Allquantor, "für alle") und
- \exists (Existenzquantor, "es gibt") verwenden.

Ist $P(x)$ eine Aussage, deren Wahrheitswert von einem unbestimmten x abhängt, so ist

$\forall x : P(x)$ genau dann wahr, wenn $P(x)$ für alle x wahr ist,

$\exists x : P(x)$ genau dann wahr, wenn $P(x)$ für mindestens ein x wahr ist.

Insbesondere ist $\neg\forall x : P(x)$ genau dann wahr, wenn $\exists x : \neg P(x)$ wahr ist.
Analog ist $\neg\exists x : P(x)$ genau dann wahr, wenn $\forall x : \neg P(x)$ wahr ist.

1.1.3 Überblick über die Beweise

Unter einem Beweis verstehen wir die lückenlose Herleitung einer mathematischen Aussage aus einer Menge von Axiomen, Voraussetzungen und schon früher bewiesenen Aussagen.

Einige Beweismethoden:

- **Widerspruchsbeweis**

Man nimmt an, dass eine zu beweisende Aussage A falsch sei und leitet daraus ab, dass eine andere Aussage sowohl falsch als auch wahr ist. Formal nutzt man die Gültigkeit der Aussage $\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B) \Rightarrow A$.

- **Kontraposition**

Ist eine Aussage $A \Rightarrow B$ zu beweisen, kann man stattdessen die Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$ beweisen.

- **vollständige Induktion**

Will man eine Aussage $P(n)$ für alle natürlichen Zahlen zeigen, so genügt es, zu zeigen, dass $P(1)$ gilt und dass unter der Induktionsbehauptung $P(n)$ stets auch $P(n+1)$ gilt (Induktionsschritt). Dann gilt $P(n)$ für alle n .

Es gilt also das Induktionsschema: $P(1) \wedge \forall n : (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n : P(n)$.

1.1.4 Überblick über die Mengenlehre

Jede Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterscheidbarer Objekte zu einem Ganzen. Eine Menge enthält also solche Objekte, die Elemente der Menge. Die Menge ist durch ihre Elemente vollständig bestimmt. Diese Objekte können für uns verschiedene mathematische Objekte, wie Zahlen, Funktionen oder andere Mengen sein. Man schreibt $x \in M$ bzw. $x \notin M$, wenn x ein bzw. kein Element der Menge ist.

Ist $P(x)$ ein Prädikat, so bezeichnet man eine Menge mit $X := \{x \mid P(x)\}$. Hierbei muss man vorsichtig sein, denn nicht immer lassen sich alle x für die $P(x)$ gilt, widerspruchsfrei zu einer Menge zusammenfassen.

Beispiel: endliche Mengen

Eine Menge heißt endlich, wenn sie nur endlich viele Elemente enthält. Endliche Mengen notiert man oft in aufzählender Form: $M = \{1; 23; 4; 5; 6\}$. Hierbei ist die Reihenfolge der Elemente nicht relevant, auch nicht die Häufigkeit eines Elements.

Sind die Elemente paarweise verschieden, dann ist die Anzahl der Elemente die Mächtigkeit (oder Kardinalität) der Menge, die wir mit $|M|$ bezeichnen.

Beispiel: unendliche Mengen

- Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- Menge der natürlichen Zahlen mit der 0: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Menge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
- Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{R} := \{x \mid x \text{ ist eine reelle Zahl}\}$

Ist M eine Menge, so gilt $|M| = \infty$

Beispiel: leere Mengen

Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente hat, die leere Menge $0 := \{\}$.

Definition Teilmenge: Sind X und Y zwei Mengen, so heißt X eine Teilmenge von Y , wenn jedes Element von X auch Element von Y ist, das heißt wenn für alle x ($x \in X \Rightarrow x \in Y$) gilt.

Da eine Menge durch ihre Elemente bestimmt ist, gilt $X = Y \Rightarrow (X \subset Y) \wedge (Y \subset X)$. Will man Mengengleichheit beweisen, so genügt es, die beiden Inklusionen $X \subset Y$ und $Y \subset X$ zu beweisen.

Ist X eine Menge und $P(x)$ ein Prädikat, so bezeichnet man mit $Y := \{x \in X \mid P(x)\}$ die Teilmenge von X , die das Prädikat $P(x)$ erfüllen.

Definition Mengenoperationen: Seien X und Y Mengen. Man definiert daraus weitere Mengen wie folgt:

- $X \cup Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$
- $X \cap Y := \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$
- $X \setminus Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}$
- $X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$
- $\mathcal{P}(X) := \{Y \mid Y \subset X\}$

Neben den offensichtlichen Mengengesetzen, wie dem Kommutativgesetz, gibt es auch weniger offensichtliche Gesetze, wie die Gesetze von de Morgan: Für $X_1, X_2 \subset X$ gilt:

- $X \setminus (X_1 \cup X_2) = (X \setminus X_1) \cap (X \setminus X_2)$
- $X \setminus (X_1 \cap X_2) = (X \setminus X_1) \cup (X \setminus X_2)$

Sind X und Y endliche Mengen, so gilt:

- $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$
- $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$

1.2 Abbildungen

1.2.1 Überblick über Abbildungen

Eine Abbildung f von einer Menge X in eine Menge Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ auf eindeutige Weise genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet. Man schreibt dies als

$$f : \begin{cases} X \rightarrow Y \\ x \mapsto y \end{cases}$$

oder $f : X \rightarrow Y, x \mapsto y$ oder noch einfacher $f : X \rightarrow Y$. Dabei heißt X die Definitionsmenge und Y die Zielmenge von f . Zwei Abbildungen heißen gleich, wenn ihre Definitionsmengen und Zielmengen gleich sind und sie jedem $x \in X$ das selbe Element $y \in Y$ zuordnen. Die Abbildungen von X nach Y bilden wieder eine Menge, welche wir mit $\mathbf{Abb}(X, Y)$ bezeichnen.

Beispiele:

- Abbildungen mit Zielmenge \mathbb{R} nennt man Funktion: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
- Abbildungen mit Zielmenge \subset Definitionsmenge: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}, x \mapsto x^2$
 → Diese Abbildungen sind verschieden, da sie nicht die selbe Zielmenge haben.
- $f : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
- $f : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$
 → Diese Funktionen sind gleich. Sie haben die gleichen Definitions- und Zielmengen und sie ordnen jedem Element der Definitionsmenge das gleiche Element der Zielmenge zu.

Beispiele:

- auf jeder Menge X gibt es die identische Abbildung (Identität)
 $id : X \rightarrow X, x \mapsto x$
- allgemein kann man zu jeder Teilmenge $A \subset X$ die Inklusionsabbildung zuordnen
 $\iota_A : A \rightarrow X, x \mapsto x$
- zu je zwei Mengen X und Y und einem festen $y_0 \in Y$ gibt es die konstante Abbildung
 $c_{y_0} : X \rightarrow Y, x \mapsto y_0$
- zu jeder Menge X und Teilmenge $A \subset X$ definiert man die charakteristische Funktion
 $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}, \begin{cases} x \mapsto 1 & (x \in A) \\ x \mapsto 0 & (x \notin A) \end{cases}$
- zu jeder Menge X gibt es die Abbildung
 $f : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \delta_{x,y} \begin{cases} 1 & (x = y) \\ 0 & (x \neq y) \end{cases}$